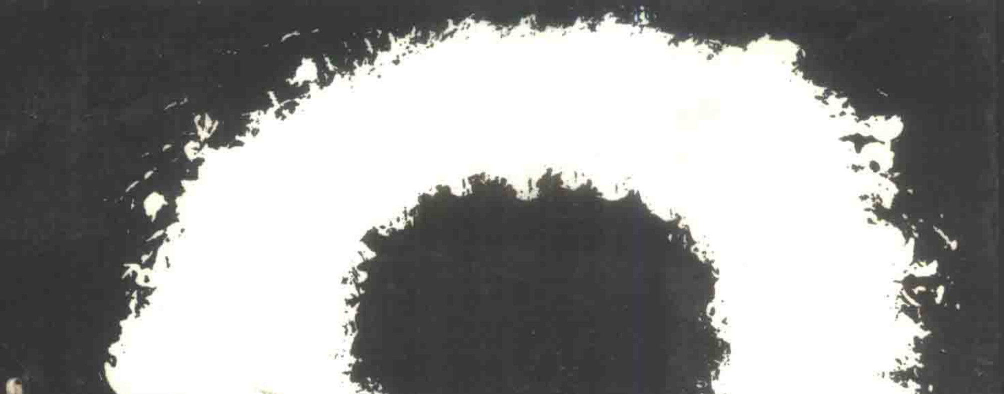

模糊逻辑与模糊推理

ZZY LOGIC AND FUZZY REASONING

刘叙华 著

吉林大学出版社

模糊逻辑与模糊推理

刘叙华　著

责任编辑：张　延	封面设计：甘　莉
吉林大学出版社出版	吉林省新华书店发行
（长春市解放大路85号）	吉林大学印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米 1/32	1989年6月第1版
印张：5.0625	1989年6月第1次印刷
字数：112千字	印数：1-1 000册

ISBN　7-5601-0259-X/N·3　　　定价：1.20元

前　　言

让机器具有思维能力这个天才的思想，在大约300年前，就产生在Leibniz的头脑中。直到1956年，由McCarthy等人，在美国Dartmouth大学召开了第一次人工智能讨论会，才正式宣布了人工智能的诞生。这也许是本世纪人类所从事的研究领域中，最富有挑战性和创造性的一个。人工智能技术已被誉为当代三大尖端技术之一。

让机器具有思维能力，首先就得让机器具有推理能力；让机器具有象人一样的推理能力，就必须使机器不仅具有建立在传统逻辑上的精确推理能力，还要具有建立在非标准逻辑上的不精确推理能力，例如建立在模糊逻辑上的模糊推理能力。

因此，模糊逻辑和模糊推理的研究，在人工智能领域中，日益受到人们的关注。

模糊集理论的创始人Zadeh教授，对模糊逻辑做出了开创性的研究。作者以Zadeh教授的工作和自己的研究成果为内容，曾给吉林大学计算机科学系的研究生开出一门关于“模糊逻辑与模糊推理”的选修课。本书就是以这次讲稿为基础写成的。

本书共分八章。前三章主要是根据Zadeh教授在1965年和1975年发表的两篇论文[1],[3]写成的；后五章主要是作者及其合作者从1980年以来的一些粗浅的研究工作。由于模糊

逻辑的研究还处于早期阶段，更由于作者自己的水平所限，本书所介绍的内容也许很快就被淘汰。不管怎么说，这是一个年轻的有生命力的研究领域，如果本书能引起一些学者的兴趣，并做出使本书很快陈旧的工作，作者的目的就达到了。

我应该特别对我的老师王湘浩授教表示尊敬和感谢，因为没有他的指导，是不可能完成这本书的写作的。

此外，对我的学生安直和杨凤杰在写作过程中给以的协助，表示感谢。

刘叙华

1988.3.30　于长春

目　　录

序　论

在19世纪末，Contor 创立了集合理论以后，集合论就构成了算术和逻辑的基础。从此，科学家们对所研究的对象进行分类时，就很自然地使用了集合的概念。集合中的隶属概念是一个非常精确的概念，亦即，一个元素是否属于某一集合，是非常明确而绝不含混的。但是，这种用集合进行分类的方法，在很多情况下，尤其是涉及人类的自然语言情况时，遇到了麻烦，并不总能将一些对象用集合进行分类。比如，我们将人分成“高”与“不高”两类，就无法找到一个集合来描述“高”这个性质。在过去，通常的办法是，对一些概念（比如，“高”这个概念）给出精确化的科学解释。例如，我们规定：身长超过1.8256m 的人算做“高个子”，否则算做“不高”。使用这种方法将对象分类，不仅有时有悖于常理，而且可能产生矛盾。例如，身长 1.8256m 和 1.8257m 的两个人，前者算做“不高”，后者算做“高个子，就有悖于常理，因为这两个人的高度，在任何人的眼里都是“相等”的；如果再考虑其他的错觉，在人们看来，也许前者比后者高。

用精确的概念描述事物有时会出现上述的困难。用精确的推理获得知识，有时也会出现荒谬。我们用著名的“秃子悖论”来说明这个问题。

例如，我们有一条精确的推理规则：“比秃子多一根头发的人仍是秃子”。如果我们眼前有一个真的秃子，然后，又来了一个人，他比那个秃子只多一根头发，按照上面的规则，我们得出一个很能令人信服的结论：他也是秃子。但

是，如果在我们眼前走过 100 万人，他们每一个人都比前一个人多一根头发，那么，当第 100 万个人来到我们面前时，我们同样会得出结论（通过精确推理得出的结论）：这个满头浓密头发的人竟然也是秃子！

这当然是荒谬的。我们分析一下，它是如何发生的。

设 hair_n 表示一个头上长了 n 根头发的人，$\mathrm{bald}(x)$表示谓词：x 是秃子。我们的推理规则如下：

$$(\forall_n)(\mathrm{bald}(\mathrm{hair}_{n-1})\to \mathrm{bald}(\mathrm{hair}_n)) \qquad (1)$$

用 $T(p(x))$表示谓词 $p(x)$ 的真值，于是，在精确的二值逻辑里，我们有

$$(\forall_n)(T(\mathrm{bald}(\mathrm{hair}_{n-1}))\leqslant T(\mathrm{bald}(\mathrm{hair}_n))) \qquad (2)$$

于是

$$(\forall_n)(T(\mathrm{bald}(\mathrm{hair}_0))\leqslant T(\mathrm{bald}(\mathrm{hair}_n))) \qquad (3)$$

令“有 n 根头发的人是秃子”这个命题的真值（即 $T(\mathrm{bald}(\mathrm{hair}_n))$）就是这个人对“由秃子组成的模糊集合”的隶属度，那么，由(3)式，我们得出结论：一个有任意多根头发的人是秃子为真的程度至少也与没有头发的人是秃子为真的程度相等。虽然，我们使用了模糊集合对秃子进行了分类，但是，使用精确推理，仍然得出了上面的令人吃惊的结论。

问题就出在从(1)式到(2)式的转换上。因为这种转换只有在蕴涵式本身是绝对真的时候，才是正确的。亦即，在二值逻辑中，(1)式与(2)式才是等价的。

但是，如果有人要我们同意：“一个人如果比一个秃子只多一根头发仍然是秃子”，那么，我们一定会有一点疑问，至少觉得这个断言似乎有点“方向反了”。当然，这个疑问并不大。于是，我们会回答：“嗯，我想是这样”。这

个回答里包含了那一点点的疑问。如果提问者不满意我们这个稍有含混的回答，而进一步问我们："更严格一点，对还是不对？"，那么，我们只好被迫回答："对！"。其实，我们本想回答的是："那几乎是对的"，"那差不多是对的"，等等。对蕴涵式的真值的精确的二值要求，强迫我们做出了精确的回答，从而导致了悖论。

如果一个蕴涵式的真值不是等于1，而是小于1，亦即一个推理规则不是"绝对真"的，而是"模糊真"的，则上述的秃子悖论问题，就可以得到合理的解释，例如，令

$$G=(p\to Q)$$

而我们定义：

$$T(G)=\min(1,1-T(p)+T(Q))$$

在二值逻辑中，仍有$T(p)\leqslant T(Q)$。但是，在多值逻辑中，当$T(G)<1$时，必有$1-T(p)+T(Q)<1$，亦即

$$T(Q)<T(p)$$

于是，在"秃子问题"中，只要我们假设："比秃子多一根头发的人仍是秃子"这个推理规则不是绝对真的，亦即，由(1)式所表示的蕴涵式的真值小于1，那么，从(1)式就不能转换成(2)式，而是转换成如下的(4)式：

$$(\forall_n)(T(\text{bald}(\text{hair}_n))<T(\text{bald}(\text{hair}_{n-1}))) \quad (4)$$

因此，有

$$(\forall_n)(T(\text{bald}(\text{hair}_n))<T(\text{bald}(\text{hair}_0))) \quad (5)$$

若$T(G)<1$，则$T(G)=1-T(p)+T(Q)$，于是

$$T(Q)=T(p)-(1-T(G))$$

如果我们假设："比秃子多一根头发的人仍是秃子"这个推理规则的真值是$1-\varepsilon$，那么

$$(\forall_n)(T(\text{bald}(\text{hair}_n))=T(\text{bald}(\text{hair}_{n-1}))-\varepsilon)$$

于是

$$(\forall_n)(T(\text{bald}(\text{hair}_n)) = T(\text{bald}(\text{hair}_0)) - n\varepsilon) \quad (6)$$

从(5)式知，有 n 根头发的人是秃子为真的程度小于没有头发的人是秃子为真的程度，这当然是合理的。

从(6)式知，有 n 根头发的人是秃子为真的程度，等于没有头发的人是秃子为真的程度减去一个随着 n 的增大而增大的数。可见，有非常多头发的人是秃子为真的程度就会非常接近于零，亦即，有非常多头发的人是秃子这个论断就是非常假的。

从上面的讨论中，顺便也可看到：在模糊推理中，每使用一次模糊推理规则，都要付出代价。每推理一步，结论的可信度都要降低一次。因此，在模糊推理中，一个长的推导过程往往是没有价值的。"短证明比长证明漂亮"作为一条美学原则，又一次得到验证。

过分精确的逻辑和数学所带来的局限性，早在1923年著名的逻辑家 Russell 就注意到了。他说："所有的传统逻辑都习惯地假设所使用的符号是精确的，所以它就不能适用于我们这个人间的世界，而只能适应于一个理想中的天堂，……，逻辑研究比别的任何研究都使我们更接近上帝"。

Zadeh 教授在他早期的系统工程研究中就注意到："总的来说，复杂性和精确性之间有一个反比关系，即当一个问题的复杂性上升时，能对之精确地[illegible]析的可能性就会随之下降。""所以，不管怎样，如果 Fuzzy 思维能使那些过于复杂而不能精确分析的问题得到解决的话，那么它就不应该受到抱怨。"

因此，Zadeh 认为，人类的推理，不能完全由严格的具有数学的精确的逻辑来描述。人类推理的力量恰恰就在于它

能直接地掌握并运用不严格的概念。因此，试图用精确性更高的形式模型来模拟人类的推理过程，必然会导致模型的意义和合理性的丧失。

我们得承认，这个世界上的很多模糊现象是由于我们的无知造成的。如果我们承认和接受这种模糊性，掩盖了我们自己的无知，则我们就不会通过必要的努力来认识现象之下可能的精确；反过来，如果我们排斥那些本身就是模糊的但却是很有用的概念，则我们就会制造一大堆这个概念的变形，它们虽然更为精确，但用处却更小。按照B.R.Gaines的说法，Fuzzy集合论就其自身来说是中立的(Neutral)，因为它既允许精确的、分明的概念，也允许模糊概念。其优越性和危险性都在于我们对它的方法的使用。已有的广泛应用，初步表明它是可以有效应用的。

用Karl，Popper的话结束这个序言是合适的。他说：精确和确定，都是虚妄的理想，它们都是不可以得到的，并且如果不加鉴别地用它们做为指导，即么就将危险地步入岐途。当然，我并不是说，有时候提高一个预言，甚至一个公式的精确度不是很有用的。我的意思是指：为精确而精确，特别是语言的精确，通常总是无价值的。因为这样做常常会导致清晰性的丧失，会导致把时间和精力花费到那些结果毫无用处的细节上，因为这些细节会被学科的真正进展超越：谁都不应该企图比问题要求的精度更精确！

第一章　模糊集合

§1　引言

长期以来，人们都相信：一类知识，如果它还不能用严格的数学方法来处理的话，那么它还不能称为是科学。这种观念使人们养成了尊重精确、严格、定量的东西，蔑视模糊的、定性的东西。

计算机的出现使得精确和定量方法得到更为迅速的发展，因为目前计算机科学的理论仍然是数学性质的，所以，计算机加深了人们尊重严格、精确的观念。

但是，有趣的是：正是计算机的出现，使人们产生了对精确性的怀疑。

当代科学中一个极为重要的领域是人工智能，这门学科的发展将对人类命运产生的影响迄今还不能完全估计出来。人工智能的最根本问题是：造出一个有智能而无生命的机器！

这是一种高度复杂的机器，如果它能够“思维”，而“思维”又是高度组织起来的物质的属性，那么，这种能够“思维”的智能机器，必将像人这个系统一样，是高度复杂的。

很不幸，不兼容原理认为：一个系统的复杂性与分析它能达到的精度之间服从一个反比关系。

因此，制造这种智能机器，也就是发展人工智能这门科

学，如果还想依赖传统的数学和传统的逻辑，既使不能说是不可能的，也必然是有极大困难的。

当前，由于人们对人工智能，特别是对专家系统的重视，使人们对不精确推理，对处理不完全可靠的知识的兴趣在增长，这必将导致放弃经典逻辑，而接受模糊逻辑。

在科学方法中，承认并接受模糊方法，这是必然要走的路。

本章将介绍Zadeh教授1965年写出的开创性论文："Fuzzy Sets"中的基本内容。

§2 基本概念

在这一节和下一节里，我们将介绍1965年，Zadeh提出模糊集合这个新概念时，所写的第一篇论文中的基本概念。这些概念是这门新学科的基础。

定义 设U是一个论域，U的一个模糊子集A是由隶属函数(membership)μ_A决定的，μ_A的定义域是U，值域是〔0，1〕，即

$$\mu_A: U \to [0, 1]$$

对任意$u \in U$，$\mu_A(u)$称为u属于U的等级。

显然，当函数μ_A只取0或1两个值时，A就是U的子集，μ_A就是A的特征函数。

例1 令U是所有实数，"远大于1的数的集合A"就是一个模糊集合，它由如下函数表示：

$$\mu_A(0) = 0, \qquad \mu_A(1) = 0,$$

$$\mu_A(5) = 0.01, \qquad \mu_A(10) = 0.2,$$

$$\mu_A(100) = 0.95, \qquad \mu_A(500) = 1, \cdots$$

为了便于清晰地表达，我们采用如下符号代表模糊集

合：

当模糊集 A 有限或可数时：

$$A=\mu_1/u_1+\cdots+\mu_n/u_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_i/u_i$$

其中 + 表示并，μ_i 是 u_i 的等级。等级为 0 的 u_i 项可以省略。特别，当 u_i 不是数时，A 又可简单表示为

$$A=\mu_1u_1+\cdots+\mu_nu_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_iu_i$$

当模糊集 A 不可数时：

$$A=\int_0^1\mu_A(u)/u$$

例2 令 $U=\{1,2,\cdots,9,10\}$，“几个数的集合 A”就是模糊集合

$$A=0.5/3+0.8/4+1/5+1/6+0.8/7+0.5/8$$

定义 设 A，B 是 U 的两个模糊子集，称 A 与 B 相等，记以 $A=B$，如果 $\mu_A(u)=\mu_B(u)$，对任意 $u\in U$。

定义 设 A，B 是 U 的两个模糊子集，称 B 包含 A（或 A 是 B 的子集），记以 $A\subseteq B$，如果 $\mu_A(u)\leqslant\mu_B(u)$，对任意 $u\in U$。

例3 若

$$U=a+b+c+d$$

且

$$A=0.5a+0.8b+0.3d$$
$$B=0.7a+b+0.3c+d$$

则 $A\subseteq B$。

定义 设 A 是 U 的模糊子集，集合 A_S：

$$A_S=\{u\,|\,u\in U\wedge\mu_A(u)>0\}$$

称为 A 的支集。如果 A 的支集中，有一个元素 u 真正属于 A，即

$$\mu_A(u)=1$$

则称 A 为正规模糊集。

例4 若

$$U=a+b+c+d+e$$

$$A=0.5a+0.8b+0.2e$$

于是 A 的支集 $A_S=\{a,b,e\}$。显然，支集是一个分明集（即普通集合）。

定义 设 A 是 U 的模糊子集，集合 A_α：

$$A_\alpha=\{u\,|\,u\in U\wedge\mu_A(u)\geqslant\alpha\}$$

称为 A 的水平集。显然，水平集是分明集。

一个模糊集合，可以分解为它的水平集之并：

$$A=\sum_\alpha \alpha A_\alpha$$

或者

$$A=\int_0^1 \alpha A_\alpha$$

其中 αA_α 是 α 与 A_α 的代数积（简称积），在下节中介绍。

例5 设 $A=0.1/2+0.3/1+0.5/7+0.9/6+1/9$

于是

$$\begin{aligned}A=&0.1(1/2+1/1+1/7+1/6+1/9)\\&+0.3(1/1+1/7+1/6+1/9)\\&+0.5(1/7+1/6+1/9)\\&+0.9(1/6+1/9)\\&+1(1/9)\end{aligned}$$

这种分解式与本章第 4 节的扩张原理结合，为在模糊集合中推广分明集的概念，提供了一条路径。

定义 若U是n个论域U_1，…，U_n的笛卡尔积，则U的任一模糊子集都是U中一个n元模糊关系R，即

$$R=\int_{U_1\times U_2\cdots\times U_n}\mu_R(u_1,\cdots,u_n)\ /\ (u_1,\cdots,u_n)$$

例6 设$U_1=U_2=(-\infty,\infty)$，$U=U_1\times U_2$，U中二元模糊关系"接近"是如下一个模糊子集：

$$接近\triangleq\int_{U_1\times U_2}e^{-\alpha|u_1-u_2|}\Big/(u_1,u_2)$$

其中符号$\triangleq$意为"表示"或"按定义等于"。

例7 设$U_1=U_2=\{1,2,3,4\}$，于是$U=U_1\times U_2$中的一个二元模糊关系，可用矩阵表示。如"远大于"关系，可表示成

R	1	2	3	4
1	0	0.3	0.8	1
2	0	0	0	0.8
3	0	0	0	0.3
4	0	0	0	0

其中第i行第j列的数表示$\mu_R(i,j)$的值。

设R是$U\times V$中一个模糊关系，S是$V\times W$中一个模糊关系，则我们定义R与S的合成关系如下：

$$R\circ S=\int_{U\times W}\max_{v\in V}\{\min\{\mu_R(u,v),\mu(v,w)\}\}/(u,w)$$

若U,V,W是有限集合，则$R\circ S$的关系矩阵，可由R的关系矩阵与S的关系矩阵"相乘"得到。这里的"相乘"是指：最大-最小积。

例如：

$$\underset{R}{\begin{pmatrix}0.3 & 0.8\\0.6 & 0.9\end{pmatrix}}\circ\underset{S}{\begin{pmatrix}0.5 & 0.9\\0.4 & 1\end{pmatrix}}=\underset{R\circ S}{\begin{pmatrix}0.4 & 0.8\\0.5 & 0.9\end{pmatrix}}$$

§3 模糊集合的运算

这一节，我们将把分明集之间的一些运算引到模糊集中，并且也讨论模糊集之间特有的运算。

余运算　设 A 是模糊集，则模糊集

$$\int_U (1-\mu_A(u))/u$$

称为 A 的余集（或 A 的非），记为 $\sim A$。

例1　设

$$U=a+b+c+d+e$$

$$A=0.5a+0.7c+0.1d$$

于是

$$\sim A=0.5a+0.3c+0.9d+1b+1e$$

并运算　设 A,B 是 U 的两个模糊子集，则模糊集

$$\int_U (\mu_A(u)\vee\mu_B(u))/u$$

称为 A 与 B 的并（或称"A或B"），记为 $A+B$。其中 $\vee$ 是取最大(max)运算。

例2　设

$$U=a+b+e+d+e$$

$$A=0.5a+0.1c$$

$$B=0.3a+0.2b$$

于是

$$A+B=0.5a+0.2b+0.1c$$

交运算　设 A，B 是 U 的两个模糊集，则模糊集

$$\int_U (\mu_A(u)\wedge\mu_B(u))/u$$

称为A与B的交（或称"A和B"），记为$A\cap B$。其中$\wedge$是取