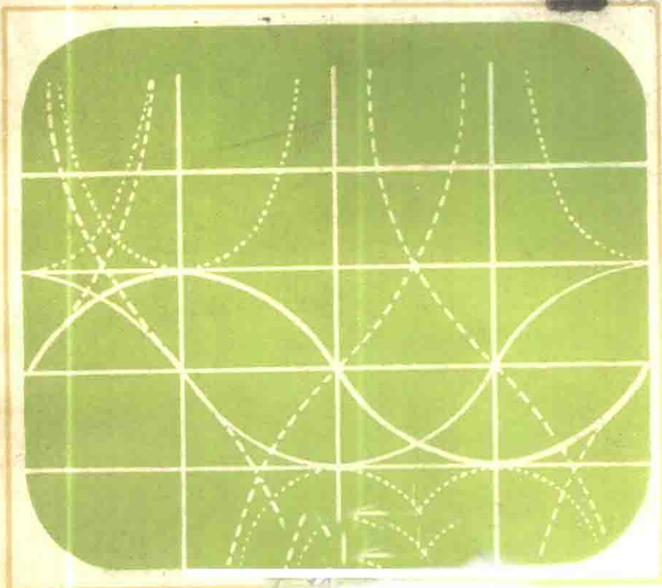

蒋声

从单位根谈起

上海教育出版社

从单位根谈起

蒋声

一

内容提要

本书主要介绍单位根对于解初等数学问题的应用，在这个基础上简单介绍了群的概念，并附有一些练习题，可供高中学生、中学数学教师阅读。

从单位根谈起

蒋　声

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2.25　字数 45,000

1980 年 3 月第 1 版　1980 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—80,000 本

统一书号：7150·2218　　定价：0.18 元

前　　言

单位根这个题材，通常是作为高等代数的讨论对象，在初等数学里很少引起重视．正因为过去较少注意，可挖掘的潜力就更大．有感于此，想尝试写一本题为《从单位根谈起》的小册子，着重谈谈单位根在初等数学中的应用，适当介绍理论背景．

执笔的过程，同时也是笔者学习和思考的过程．读者在读完了本书之后，也一定会发现，关于单位根确实还有许多有趣的问题值得想一想．如果这本小册子有助于此，将是作者非常高兴的．同时，对于本书中可能存在的缺点和错误，除再三查对以尽力减少外，还请同志们多多批评指正．

谨向在写作中给以热情帮助的同志表示由衷的感谢．

作　者

一九七九年六月

目　　录

一、单位根的基本性质

先看一个简单而有趣的例题①：

[例 1]　已知 $a^2+a+1=0$，求证

$$a^{1979}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=a^{2000}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2000}.$$

证　从条件 $a^2+a+1=0$ 可以得到 $a^3=1$．这是因为：

$$a^3=(a^3-1)+1=(a-1)(a^2+a+1)+1=1.$$

所以

$$a^{1979}=a^{3\times 659+2}=(a^3)^{659}\cdot a^2=a^2,$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=\frac{1}{a^{1979}}=\frac{1}{a^2}=\frac{a}{a^3}=a,$$

$$a^{2000}=a^{3\times 666+2}=(a^3)^{666}\cdot a^2=a^2,$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{2000}=\frac{1}{a^{2000}}=\frac{1}{a^2}=a.$$

由此立刻得到

$$a^{1979}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=a^{2000}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2000}.$$

事实上，我们不仅能证明上述等式成立，而且能把每端的值也求出来：

$$a^{1979}+\left(\frac{1}{a}\right)^{1979}=a^2+a=(a^2+a+1)-1=-1.$$

用类似的方法，可以解答下面这个更一般的例题：

---

① 如无说明，本书中字母代表复数。

[例 2]　若 $a^2+a+1=0$, n 为某一自然数,求 $a^n+\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

解　$a^n+\left(\frac{1}{a}\right)^n=\begin{cases}-1, & \text{当 } n \text{ 不是 } 3 \text{ 的倍数;}\\ 2 & \text{当 } n \text{ 是 } 3 \text{ 的倍数.}\end{cases}$

详细的解答过程这里就不写了，请读者补出．很容易看出,解答例 2 的关键步骤,仍在于发现并利用等式

$$a^3=1.$$

不单是这两个例题，而且本书以下将要讨论的大部分的问题和练习题,都要涉及到一个如下形式的等式:

$$a^n=1,\ n \text{ 为某一自然数.}$$

那么满足这个等式的 a 究竟是些什么数呢?

从一个角度讲,$a^n=1$ 中的 a 就是 1 的 n 次方根．高中数学告诉我们,在复数范围里,由于

$$1=\cos 0+i\sin 0,$$

由复数开方法则,就得到 1 的 n 次方根为

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}. \tag{1}$$

其中 k 为任意的整数．在本书中，ε_k 始终取这个含义．当 k 取 0, 1, …, $n-1$ 时 ε_k 有 n 个各不相同的值，而当 k 取其他数值时，ε_k 就要和 ε_0, ε_1, …, ε_{n-1} 中的一个相同,这从“正弦和余弦都是周期为 2π 的周期函数”不难证得．通常 1 的任何一个 n 次方根又叫 n 次单位根或单位根．上述结果就是说: n 次单位根有并且只有 n 个不同的值,为

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1}.$$

我们特别注意到 $\varepsilon_0=1$.

从另一个角度讲，n 次单位根又是方程

$$x^n-1=0 \tag{2}$$

的根．或者说，ε_0，ε_1，…，ε_{n-1} 是方程(2)的 n 个不同的（也是全部的）根．更进一步，由于

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1),$$

所以 ε_1，ε_2，…，ε_{n-1} 恰是方程

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$$

的全部根．由此，我们立刻可以得到

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}), \tag{3}$$

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}). \tag{4}$$

为了使读者对单位根有些感性知识，我们先具体地讨论一下 $n=3$ 的情况．

［例 3］　三次单位根

$$\varepsilon_0=1,$$

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

习惯上，对三次单位根常用 ω 来记 ε_1，这时，

$$\omega^2=\varepsilon_1^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\varepsilon_2,$$

因此恰有 $\varepsilon_2=\omega^2$．本书中以后总以 1，ω，ω^2 记三次单位根．再明确一下，

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

我们现在来罗列一下三次单位根的性质：

(1) 三次单位根的模都是 1，即

$$|1|=|\omega|=|\omega^2|=1.$$

(2) $1, \omega, \omega^2$ 是 $x^3-1=0$ 的根，而 ω, ω^2 又是 $x^2+x+1=0$ 的根，由根和系数的关系，立刻得

$$1+\omega+\omega^2=0 \quad 或 \quad \omega+\omega^2=-1.$$

读者现在可以想一想，在例 1、例 2 中怎么会想到 $a^3=1$ 的？

(3) 不仅 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2$，而且 $\varepsilon_2^2=\varepsilon_1$. 事实上

$$\varepsilon_2^2=(\omega^2)^2=\omega^3\cdot\omega=\omega=\varepsilon_1.$$

这说明，如果我们规定 $\varepsilon_2=\omega$，那就有 $\varepsilon_1=\omega^2$，而三次单位根仍然是 $1, \omega, \omega^2$ 这样的形式. 但本书中为了使 ω、ω^2 的几何意义更确定，总规定

$$\varepsilon_1=\omega.$$

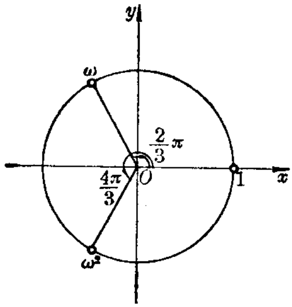

图 1

(4) 在复数平面上标出三次单位根时，它们恰恰把一个半径为 1 的圆——单位圆三等分(图 1)，而且其中的一个分点是 (1, 0).

(5) $\overline{\omega}=\omega^2$, $\overline{\omega^2}=\omega$.

这从 ω、ω^2 的值和图 1 上都很容易看出.

(6) $1^n+\omega^n+(\omega^2)^n=\begin{cases}3, & 当 n 是 3 的倍数时;\\ 0, & 当 n 不是 3 的倍数时.\end{cases}$

设 r 是 n 除以 3 的余数，即 $n=3q+r$, $0\leqslant r<3$. 则有

$$\begin{aligned}1^n+\omega^n+(\omega^2)^n&=(1^3)^m\cdot1^r+(\omega^3)^m\cdot\omega^r+(\omega^3)^{2m}\cdot\omega^{2r}\\&=1+\omega^r+\omega^{2r}.\end{aligned}$$

而当 n 是 3 的倍数时余数 $r=0$，当 n 不是 3 的倍数时余数 $r=1$ 或 $r=2$. 用 r 的这些值代入后立刻可以算得.

现在我们来介绍 n 次单位根的性质，读者可以看出上面罗列的性质不过是 $n=3$ 时的特例.

性质 1 n 次单位根的模是 1. 即

$$|\varepsilon_k|=1,\ k \text{ 为任意整数.}$$

证 从 ε_k 的表示式(1)中立刻可得.

这个性质还说明，n 次单位根都不是 0.

性质 2 两个 n 次单位根 ε_j、ε_k 的乘积仍然是一个 n 次单位根，具体地，有

$$\varepsilon_j\cdot\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}. \tag{5}$$

其中 j、k 是任意整数.

证 由(1)式和复数乘法法则，得

$$\begin{aligned}\varepsilon_j\cdot\varepsilon_k&=\left(\cos\frac{2j\pi}{n}+i\sin\frac{2j\pi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\\&=\cos\frac{2(j+k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(j+k)\pi}{n}=\varepsilon_{j+k}.\end{aligned}$$

这是单位根的一个非常重要而基本的性质，由此可以得出一系列有用的推论.

推论 1 $(\varepsilon_j)^{-1}=\varepsilon_{-j}$.

证 根据复数中负指数的定义，$(\varepsilon_j)^{-1}=\dfrac{1}{\varepsilon_j}$，但

$$\varepsilon_j\cdot\varepsilon_{-j}=\varepsilon_{j+(-j)}=\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_j\neq 0,$$

$$\therefore\quad (\varepsilon_j)^{-1}=\frac{1}{\varepsilon_j}=\varepsilon_{-j}.$$

推论 2 对任何整数 m，有

$$(\varepsilon_k)^m=\varepsilon_{mk}.$$

证 分三种情况讨论:

i) 当 m 是正整数时，取 m 个 ε_k 连乘并利用(5)式，即得

$$(\varepsilon_k)^m=\varepsilon_{mk}.$$

ii) 当 $m=0$ 时，注意到非零复数的零指数的意义，有

$$(\varepsilon_k)^0=1=\varepsilon_0.$$

结论也成立.

iii) 当 m 是负整数时，$-m$ 就是正整数，从而

$$(\varepsilon_j)^m=\frac{1}{(\varepsilon_j)^{-m}}=\frac{1}{\varepsilon_{-mj}}=\varepsilon_{mj}.$$

推论 3 若 k 除以 n 的余数为 r，则

$$\varepsilon_k=\varepsilon_r.$$

由此立刻可得 $\varepsilon_k=\varepsilon_l$ 的充分必要条件是 k 与 l 除以 n 后余数相同，或者说 k 与 l 的差是 n 的倍数.

证 由题设，$k=nq+r$，其中 q 是整数，$0\leqslant r<n-1$. 那么

$$\varepsilon_k=\varepsilon_{nq+r}=\varepsilon_{nq}\cdot\varepsilon_r=(\varepsilon_q)^n\cdot\varepsilon_r=\varepsilon_r.$$

其中 $(\varepsilon_q)^n=1$ 是因为 ε_q 也是 n 次单位根.

作为这条性质的特例，我们得到：$\varepsilon_k=1$ 的充分必要条件是 $r=0$，即 k 是 n 的倍数.

由于余数只可能是 0, 1, …, $n-1$ 这 n 个，我们再次肯定了任何 n 次单位根的值只有

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1} \tag{6}$$

这 n 个不同的值. 为了叙述的方便，以后凡说到“所有 n 次单位根”，就是指 n 个互不相等的 n 次单位根，特别地，它们可以用(6)式作为代表.

推论 4 任何一个单位根都可以写成 ε_1 的幂，具体地说，

$$\varepsilon_k=(\varepsilon_1)^k.$$

这是推论 2 的明显结果.

现在问，所有 n 次单位根中，除了 ε_1 外，还有没有另一个单位根 ε_l，能使得任何一个单位根都是 ε_l 的幂？

这是可能有的. 以三次单位根为例,除了 ε_1 能使

$$\omega=\varepsilon_1,\ \omega^2=(\varepsilon_1)^2,\ 1=(\varepsilon_1)^3$$

外. ε_2 也有这样的性质,因为

$$\varepsilon_2=\varepsilon_2,\ \varepsilon_1=\omega=\omega^4=(\varepsilon_2)^2,\ 1=(\varepsilon_2)^3.$$

有这种性质的 n 次单位根,称为是 n 次本原单位根,简称为 n 次原根或原根.

n 次单位根中除 ε_1 外哪些是原根? 这一点放在第七节中介绍.

从这个推论我们知道,所有 n 次单位根还可以写成

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_1^2,\ \cdots,\ \varepsilon_1^{n-1},\ \varepsilon_1^n(=\varepsilon_0=1). \tag{7}$$

推论 5 一个 n 次单位根的共轭也是一个 n 次单位根,具体地说,

$$\overline{\varepsilon_k}=\varepsilon_{n-k}.$$

证 由复数性质 $z\cdot\bar{z}=|z|^2$ 和 $|\varepsilon_k|=1$, 得

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{|\varepsilon_k|^2}{\varepsilon_k}=\frac{1}{\varepsilon_k}=\varepsilon_{-k}=\varepsilon_{n-k}.$$

最后一个等号是因为 $-k$ 和 $n-k$ 的差是 n.

从证明过程中我们看到单位根的倒数还可写成其共轭:

$$\frac{1}{\varepsilon_k}=\overline{\varepsilon_k}.$$

这个推论说明,所有虚的 n 次单位根都成对共轭.

推论 6 对任何整数 k、l, 有

$$(\varepsilon_k)^l=(\varepsilon_l)^k.$$

证 $(\varepsilon_k)^l=\varepsilon_{kl}=(\varepsilon_l)^k$.

性质 3 设 m 是整数,则

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}n, & \text{当 } m \text{ 是 } n \text{ 的倍数时;}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 不是 } n \text{ 的倍数时.}\end{cases}$$

证 当m是n的倍数时，$(\varepsilon_k)^m=1$对任何k都成立，故

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=n.$$

当m不是n的倍数时，$(\varepsilon_1)^m=\varepsilon_m\neq1$，故

$$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=1+\varepsilon_1^m+(\varepsilon_1^2)^m+\cdots+(\varepsilon_1^{n-1})^m$$

$$=1+\varepsilon_1^m+(\varepsilon_1^m)^2+\cdots+(\varepsilon_1^m)^{n-1}$$

$$=\frac{1-(\varepsilon_1^m)^n}{1-\varepsilon_1^m}=\frac{1-(\varepsilon_1^n)^m}{1-\varepsilon_1^m}=\frac{1-1}{1-\varepsilon_1^m}=0.$$

推论 1 全部单位根的和为 0，即

$$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0.$$

证 这是性质 3 中$m=1$的特例. 又从全部n次单位根是$x^n-1=0$的根并结合根与系数的关系也可证明这个推论.

推论 2 设n次单位根$\varepsilon_k\neq1$，则

$$1+\varepsilon_k+(\varepsilon_k)^2+\cdots+(\varepsilon_k)^{n-1}=0$$

证 由于$\varepsilon_k\neq1$，故k不是n的倍数，利用性质 2 的推论 6 和性质 3，有

$$1+\varepsilon_k+(\varepsilon_k)^2+\cdots+(\varepsilon_k)^{n-1}$$

$$=1+(\varepsilon_1)^k+(\varepsilon_2)^k+\cdots+(\varepsilon_{n-1})^k=0.$$

性质 4 全部单位根正好把复平面上的单位圆n等分，即构成了外接圆半径为 1 的正n边形顶点，并且一个分点或顶点是(1, 0).

高中数学课本中已有这一性质的证明，这里从略。

现在我们继续研究一些习题:

[例 4] 求五次单位根.

解 可以证明(见书末练习题 1)：

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

所以 $$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

由此得到 $$\varepsilon_0=1,$$

$$\varepsilon_1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i.$$

由性质 2 推论 4, 得到

$$\varepsilon_2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i\right)^2$$
$$=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i.$$

再利用性质 2 推论 5, 又得到

$$\varepsilon_3=\overline{\varepsilon_2}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i,$$

$$\varepsilon_4=\overline{\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,i.$$

[例 5] 求六次单位根.

解 $\varepsilon_0=1,$

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon_2=\cos\frac{4\pi}{6}+i\sin\frac{4\pi}{6}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega,$$

$$\varepsilon_3=\cos\frac{6\pi}{6}+i\sin\frac{6\pi}{6}=-1,$$

$$\varepsilon_4=\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\omega^2,$$

$$\varepsilon_5=\cos\frac{10\pi}{6}+i\sin\frac{10\pi}{6}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

读者可以验证一下对五、六次单位根来说，是否满足单位根的诸性质。

[例 6] 求

$$1+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\cdots+C_n^{3l-3}+C_n^{3l}.$$

其中 $3l$ 是不大于 n 的最大的 3 的倍数。

分析 这道题目就是要从组合数的序列

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^3,\ \cdots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n$$

中，从第一个开始，每隔两个取出一个求和.

回忆一下我们熟知的

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$$

是怎样求出的. 一种求法是，在

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$$

中，分别令 $x=+1,\ -1$ (注意这也就是二次单位根)，然后相加，得

$$2C_n^0+C_n^1[1+(-1)]+C_n^2[1^2+(-1)^2]+C_n^3[1^3+(-1)^3]$$
$$+\cdots+C_n^n[1^n+(-1)^n]=(1+1)^n+(1-1)^n,$$

等号左边逢奇项为 0, 逢偶项方括号中为 2, 故

$$2(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots)=2^n$$

故 $$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}.$$

根据性质 3, 三次单位根有性质:

$$1+\omega^m+(\omega^2)^m=\begin{cases}3, & \text{当 } m \text{ 是 3 的倍数时;}\\ 0, & \text{当 } m \text{ 不是 3 的倍数时.}\end{cases}$$

恰好能用于本题.

证 在

$$C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n=(1+x)^n$$

中，分别令 $x=1,\ \omega,\ \omega^2$, 然后相加. 得

$$3C_n^0+(1+\omega+\omega^2)C_n^1+[1^2+\omega^2+(\omega^2)^2]C_n^2$$
$$+[1^3+\omega^3+(\omega^2)^3]C_n^3+\cdots+[1^n+\omega^n+(\omega^2)^n]C_n^n$$
$$=(1+1)^n+(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n.$$

由于性质 3, 左边的系数恰恰是从第一项起隔两项为 3, 其余为 0, 故

$$3C_n^0+3C_n^3+3C_n^6+\cdots+3C_n^{3l}=2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n.$$

即

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+\cdots+C_n^{3l}=\frac{1}{3}[2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n]$$
$$=\frac{1}{3}\left[2^n+\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)^n\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

二、单位根与整除性

设 $f(x)$ 和 $p(x)$ 是两个已知的多项式, 并且假定可找到第三个多项式 $q(x)$, 使得

$$f(x)=p(x)\cdot q(x). \tag{1}$$

如果这三个多项式 $f(x)$、$p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数都是整数, 就说在整系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除, 或者说 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式.

类似地, 如果(1)式中多项式 $f(x)$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数都是有理数, 就说在有理系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除, 而如果(1)式中三个多项式 $f(x)$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数都是实数, 或者都是复数, 则相应地说在实系数范围内或在复系数范围内 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除.

中学数学里常见的系数允许范围，不外乎整数、有理数、实数和复数四种情形，其中尤以整系数多项式的整除性问题最为常见.

[例 1] 若

$$f(x)=x^2-1, \quad p(x)=2x+2,$$

则 $f(x)$ 和 $p(x)$ 都是整系数多项式. 但在整系数范围内，$f(x)$ 却不能被 $p(x)$ 整除，因为虽然我们可写出形如(1)式的等式

$$x^2-1=(2x+2)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right),$$

但是右端第二个多项式 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的系数已不是整数了.

如果扩大讨论范围，把 x^2-1 和 $2x+2$ 都看成有理系数多项式，则在有理系数范围内，多项式 x^2-1 又能被 $2x+2$ 整除了.

例 1 表明，整除性与系数允许范围有很大关系. 给定了两个多项式 $f(x)$ 和 $p(x)$，即使能找到第三个多项式 $q(x)$，使(1)式成立，仍不能贸然断定 $f(x)$ 被 $p(x)$ 整除，还要看三个多项式 $f(x)$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数是否都在我们研究的范围之内. 其中，$f(x)$ 和 $p(x)$ 既然是已知多项式，它们的系数当然都应该包括在允许范围之内，因而关键就在于考察多项式 $q(x)$ 的系数是否仍属于允许范围了. 但是由(1)式知道，$q(x)$ 的系数可由 $f(x)$ 的系数和 $p(x)$ 的系数决定，所以为了使检查系数范围的这一步手续得到简化，我们考虑下面的问题:

设多项式 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的系数都属于同一允许范围，并且知道存在某个多项式 $q(x)$，使

$$f(x)=p(x)\cdot q(x),$$

问在什么条件下，$q(x)$ 的系数也属于这一允许范围?