2004年

经济类研究生入学考试典型题详解系列

陈跃 主编

概率论与数理统计典型题详解

- 名校历年考研真题详解
- 名校题库精选
- 名校课堂精华

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

2004年

概率论与数理统计

典型题详解

2004年经济类研究生入学考试典型题详解系列

概率论与数理统计典型题详解

陈 跃 主编

机 械 工 业 出 版 社

本书紧扣最新经济类研究生入学考试大纲，以典型题详解的形式涵盖了《概率论与数理统计》大纲中必考的所有内容。本书按照大纲的要求设有综合填空题、综合选择题和综合解答题，并在各题后附有详细的解答过程。题型涉及随机事件和概率、随机变量及其概率分布、随机变量的联合概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。在每章之前，还列出了该章的复习与考试要求、重要公式和结论。对于题型中出现的重要公式作了注解，以引起读者注意。

本书的最大特色是选题典型，解答详细，将各章的题型和考试要点有机地结合起来。读者在阅读本书时，不仅可以掌握各种题型的解题思路和技巧，而且还能对理论知识和考试要点融会贯通。本书是经济类研究生（含 MBA）入学考试高分突破必备用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计典型题详解/陈跃主编. —北京：机械工业出版社，2002.11
(2004 年经济类研究生入学考试典型题详解系列)
ISBN 7-111-10812-4

Ⅰ.概… Ⅱ.陈… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-解题②数理统计-研究生-入学考试-解题
Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 062850 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策　划：常淑荼　责任编辑：赵泽祥　责任校对：肖新民
封面设计：饶　薇　责任印制：付方敏
北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷
1000mm × 1400mmB5·13.25 印张·501 千字
0 001—4 000 册
定价：32.00 元

前　言

从2003年开始，在经济类研究生入学考试中，数学总分值从原来的100分增加到150分，数学成绩的高低成为能否考上研究生的关键。为此，考生花费在数学上的复习时间很多，但大多数人总感到解题能力还是上不去，最后的考分也不理想，这成为众多考生的一块心病。症结在哪里？“看”的题太少，“背”的题太少，“做”的典型题太少。

本丛书是编者多年辅导考研学生经验的精华。不同于市面上的指导、模拟题一类的复习资料，它具有如下特点：

(1) 题目典型且量大，几乎收集了目前经济类考研数学的全部题型和典型题。

(2) 每题有详解。包括选择题在内，每题解答得都很清晰，便于考生理解。有些题的结论在教材上并不作为定理或结论，但在考研中可直接使用，在本书中都做了说明，要求熟记。

认真“做”每道题，认真“背”一些结论性典型题，这是编者的建议。

由于水平所限，本丛书的错误和不妥之处在所难免。若有赐教，不胜感激。圣才工作室全体员工参与了本丛书典型题的筛选、解答和检查，在此表示特别感谢。

需要说明的是，由于考虑读者备考时间，2003年考研题无法收录在本书中，特表歉意。如有需要，编者愿穷全力相助(E-mail:1218c@sohu.com)。

陈　跃

2003年1月

丛书编辑委员会

目　　录

第 1 章　随机事件和概率

1.1　复习与考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件间的关系及运算。

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典概率和几何型概率，掌握计算概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式等。

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

1.2　重要公式和结论

1. 条件概率公式

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

2. 乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

若 A 与 B 相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

3. 全概率公式

若 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1$，2，…，n，那么

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$$

4. 贝叶斯公式

若 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，$i=1$，2，…，n，那么当 $P(B)>0$ 时，有

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(B\mid A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)},k=1,2,\cdots,n$$

5. 已知 $P(A)>0$(或 $P(B)>0$)，那么事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$(或 $P(A|B)=P(A)$)。

6. 事件 A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow$

事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立$\Leftrightarrow$

事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立$\Leftrightarrow$

事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立

注 上述式子表明这四个命题等价。

7. 伯努利概型与二项概率

一次试验中，事件 A 发生的概率为 P，独立重复作 n 次试验，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$p_n(k)=C_n^kP^k(1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$$

1.3 典型题详解

1.3.1 综合填空题(1 ~ 48 题)

1. 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%、30%、10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为________。

解 设 A_i 表示取到的产品是 i 等品，其中 $i=1$、2、3，则未取到 i 等品的产品用$\overline{A_i}$表示，于是所求的任取一件不是三等品而是一等品的概率，实质就是在条件“未取到三等品”下，取到的是一等品的概率，即 $P(A_1|\overline{A}_3)$。

又因为 $P(A_1)=60\%=0.6$，$P(A_2)=30\%=0.3$，
$P(A_3)=10\%=0.1$，所以有

$$P(A_1|\overline{A}_3)=\frac{P(A_1\overline{A}_3)}{P(\overline{A}_3)}=\frac{P(A_1)}{1-P(A_3)}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{2}{3}$$

2. 有 5 条线段，长度分别为 1，3，5，7，9，从这 5 条线段中任取 3 条，则所取 3 条线段能构成一个三角形的概率为________。

解 设 $A=\{$任取的 3 条线段能构成三角形$\}$。因为是从 5 条线段中任取 3 条，所以该试验的基本事件总数为 $n=C_5^3=10$。

若 A 发生，则所取的三条线段必须满足条件：其中任意两段长度之和大于第三段。所以满足事件 A 发生的线段有 3 种情况：3，5，7 或 3，7，9 或 5，7，9，即 $m=3$。故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$$

3. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取的两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为______。

解 以 A 表示事件$\{$从 10 件产品中任取两件，两件都是不合格品$\}$，以 B 表示事件$\{$从 10 件产品中任取两件，至少有一件是不合格品$\}$，则易知所求概率为 $P(A|B)$。

因为 $P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$，$P(B)=\frac{C_4^1\cdot C_6^1}{C_{10}^2}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$

所以根据 $P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，且由 $A\subset B$ 得 $P(AB)=P(A)$

$$有\ P(A\mid B)=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

4. 将 3 个球随机放入 4 个杯子中去，则杯中球的最多个数为 1 的概率是________。

解 设 $A=\{$杯中球的最多个数为 1$\}$。

因为将 3 个球随机放入 4 个杯子中，全部可能的放法有 4^3 种。当杯中球的最多个数为 1 时，即每个杯子最多放一球时，可能的放法有 $4\times3\times2$ 种，故

$$P(A)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}$$

5. 设对于事件 A、B、C，有 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=\frac{1}{8}$。$P(AB)=P(BC)=0$，则 A、B、C 三个事件中至少出现一个的概率为______。

解 因为 $ABC\subset AB$，且依题意有 $P(AB)=P(BC)=0$

所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$

即 $P(ABC)=0$

于是 A、B、C 三个事件中至少出现一个的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0\\&=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

6. 有两只口袋，甲袋有 2 只白球，1 只黑球，乙袋中有 1 只白球，2 只黑球。现在从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，此球为白球的概率是________。

解 设 $B=\{$从甲袋中取出白球放入乙袋$\}$，则 $\overline{B}=\{$从甲袋中取出黑球放入乙袋$\}$。所以 B 与 $\overline{B}$ 构成互斥完备事件组，设 $A=\{$从乙袋中取出白球$\}$，则依题意得

$$P(B)=\frac{2}{3},\ P(A\mid B)=\frac{2}{4},$$

$$P(\overline{B})=\frac{1}{3},\ P(A\mid\overline{B})=\frac{1}{4}$$

根据全概公式，有

$$P(A)=P(B)\cdot P(A\mid B)+P(\overline{B})\cdot P(A\mid\overline{B})$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

7. 将 C、C、E、E、I、N、S 等七个字母随机地排成一行，那么，恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为________。

解 依题意易知应该用排列的知识去做。

因为七个字母任意排列的所有可能种数为 7! 种，又易发现分别有两个相同的字母 C 和 E，它们在排成单词 SCIENCE 的顺序不受影响，即令字母 C 分别写成 C_1，C_2，字母 E 分别写成 E_1，E_2 则排成的单词

$$SC_1E_1NC_2E_2,\ SC_2E_1NC_1E_2$$
$$SC_1E_2NC_2E_1,\ SC_2E_2NC_1E_1$$

均是英文单词 SCIENCE，所以有利的基本事件数为 4，于是所求概率为

$$P=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$$

8. 在 11 张卡片上分别写上 Probability 中的 11 个字母，从中任意抽取 7 张，则其排列结果为 ability 的概率是________。

解 设 $A=\{$抽出的 7 张能排列成 ability$\}$。

因为从 11 张卡片中任意取 7 张排成一排的排法总数为 P_{11}^7，而排成 ability 的全部可能排法是 $C_1^1C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1C_1^1C_1^1=4$，所以

$$P(A)=\frac{4}{P_{11}^7}=\frac{4}{\frac{11!}{4!}}=\frac{4\times4!}{11!}$$
$$=0.0000024$$

9. 设 A、B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________。

解 依题意有 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=P(A\overline{B})=0.3$

又因为 $A\overline{B}+AB=A$，所以

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.3=0.4$$

因此 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$

注 以下公式是考研中常用到的，一定要牢记！

$$A\overline{B}+AB=A \text{ 及 } AB+\overline{A}B=B$$

10. 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人是色盲患者，现随机地选取一人，此人恰为色盲患者，此人是男人的概率等于______。(假设男人，女人各占人数的一半)。

解　设 $A=\{$选取的人患色盲$\}$，设 $B=\{$选取的人是男人$\}$，则 $\overline{B}=\{$选取的人是女人$\}$，依题意得

$$P(B)=\frac{1}{2},\quad P(A\mid B)=0.05,$$

$$P(\overline{B})=\frac{1}{2},\quad P(A\mid \overline{B})=0.0025$$

根据逆概公式(贝叶斯公式)，所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)\cdot P(A\mid B)}{P(B)\cdot P(A\mid B)+P(\overline{B})\cdot P(A\mid \overline{B})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}=\frac{20}{21}$$

11. 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为______。

解　设该射手的命中率为 P，X 表示射手对同一目标独立进行四次射击中命中目标的次数，则 $X\sim B(4,P)$，依题意

$$\frac{80}{81}=P\{X\geqslant 1\}=1-P\{x=0\}$$

$$=1-(1-P)^4$$

于是 $(1-P)^4=1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$

故 $P=\frac{2}{3}$

12. 某射手对一目标进行射击，若每次射击的命中率为 0.2，则必须进行______次独立射击，才能使至少击中一次的概率不小于 0.9。

解　设 $A_i=\{$第 i 次射击命中$\}$，$i=1,2,\cdots$

$B=\{$至少击中一次$\}$。

所以依题意有 $P(A_i)=0.2$，$i=1,2,3,\cdots$

假设必须进行 n 次独立射击，才能使至少击中一次的概率不小于 0.9，则有

$$P(B)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$=1-[1-P(A_1)][1-P(A_2)]\cdots[1-P(A_n)]$$

$$=1-(1-0.2)^n\geqslant 0.9$$

解这个不等式得 $n\geqslant 10.32$，所以 $n=11$。

13. 设 $P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，若事件 A 与 B 互斥，则 $P(B)=$______；若事件 A 与 B 独立，则 $P(B)=$______。

解　若 A 与 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$，于是

$$P(B)=P(A+B)-P(A)=0.7-0.4=0.3$$

若事件 A 与 B 独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，于是由

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$，得

$$P(B)=\frac{P(A+B)-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.4}{1-0.4}=0.5$$

14. 箱中盛有 α 个白球和 β 个黑球，从其中任意地接连取出 $k+1$（$k+1\leqslant\alpha+\beta$）个球，如果每球被取出后不放回，则最后取出的是白球的概率为______。

解　设 $A=\{$最后取出的是白球$\}$。依题意，要注意取球的次序，所以应利用排列法来计算基本事件的个数。显然，从 $\alpha+\beta$ 个球中不还原地接连取出 $k+1$ 个球的所有可能取法数为

$$n=P_{\alpha+\beta}^{k+1}=\frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta-k-1)!}$$

现要求最后一个取出的球是白球，所以这个白球可以是 α 个白球中的任一个，故有 α 种不同取法，而对于每一个固定的白球，前 k 个球按排列法从$(\alpha+\beta-1)$个球中任取 k 个排列，共有 $P_{\alpha+\beta-1}^{k}$ 种方法，所以 $m=\alpha\cdot P_{\alpha+\beta-1}^{k}=\frac{\alpha\cdot(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha+\beta-k-1)!}$

$$故\ P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\alpha\cdot(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha+\beta-k-1)!}\cdot\frac{(\alpha+\beta-k-1)!}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)!}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

15. 设 A，B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}$ = ______。

解　易知事件 $\overline{A}+B$ 与 $A+\overline{B}$ 是互逆的，因此它们同时发生是不可能的，即 $P\{(\overline{A}+B)(A+\overline{B})\}=0$，所以

$$P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=0$$

16. 已知 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.5$，则 $P(B\mid A\cup\overline{B})=$ ______。

解　因为 $P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}$

$$=\frac{P(BA\cup B\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{P(AB)}{0.7+(1-0.4)-0.5}=\frac{P(AB)}{0.8}$$

并且，由 $P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)$

从而，$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})$

$$=0.7-0.5=0.2$$

所以 $P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{0.8}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$

17. 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $P_i=\dfrac{1}{i+1}(i=1,2,3)$，以 x 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P\{x=2\}=$______。

解　设 A_i 表示事件{第 i 个零件是合格品}，则

$$P\{x=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{11}{24}$$

18. 化简：$(A\cup B)-(A-B)=$______

解

$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A-B)&=(A\cup B)(\overline{A-B})\\&=(A\cup B)(\overline{A\overline{B}})=(A\cup B)(\overline{A}\cup B)\\&=A\overline{A}\cup B\overline{A}\cup AB\cup B=B\overline{A}\cup AB\cup B\\&=B\end{aligned}$$

19. 化简：$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=$________

解

$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\overline{B})&=A\cup BA\cup AB\cup B\overline{B}\\&=A\cup A(B\cup\overline{B})\cup\phi\\&=A\cup A\Omega\\&=A\end{aligned}$$

20. 化简：$(A-\overline{B})(\overline{\overline{A}\cup B})=$______

解

$$\begin{aligned}(A-\overline{B})(\overline{\overline{A}\cup B})&=(A\overline{\overline{B}})(\overline{\overline{A}}\overline{B})=(AB)(A\overline{B})\\&=(A\overline{A})(B\overline{B})=\phi\end{aligned}$$

21. 若随机试验：袋中有 3 个红球和 2 个白球，现从袋中任取一个球，观察其颜色，则该随机试验的样本空间 $\Omega=$______。

解　因为任意取出的一个球只可能是红色或白色，而不能是其他颜色的球，因此 $\Omega=$\{红色、白色\}。

22. 对某一目标进行射击，直到击中目标为止，观察其射击次数，则该试验的样本空间 $\Omega=$______，用样本点表示事件 $A=$\{射击次数不超过 5 次\}为 $A=$______。

解　注意到射击的次数只可能取整数，因此

$$\text{样本空间}\ \Omega=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$$
$$\text{事件}\quad A=\{1,2,3,4,5\}$$

23. 下列随机试验的样本空间的样本点总数为________。“从 30 名学生中任选 2 人参加某项活动，观察选举情况。”

解　依题意知应该用组合的方法，因为从 30 人中任选 2 人组合的总数为 C_{30}^2，所以该样本空间的样本点总数为 C_{30}^2。