

# 工程结构地震力理论

王前信 王孝信 著

地震出版社

# 工程结构地震力理论

王前信 王孝信 著

地震出版社

1979

## 内 容 简 介

本书介绍工程结构(包括地面结构与地下结构)所承受的地震力的确定方法。书中分析了弹性结构的自振特性和地震反应,讨论了地震时地基土与结构之间的相互(力学)作用,多分量地面运动对于空间结构的作用以及其他一些问题。本书以弹性反应谱理论为主,也涉及结构的非弹性动力问题。

## 工程结构地震力理论

王前信 王孝信 著

\*

地震出版社出版

北京三里河路54号

北京印刷二厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

\*

开本: 787×1092 1/16 12 1/8印张 300千字

1979年3月第一版 1979年3月第一次印刷

统一书号: 13180·48 定价: 1.30元

# 目 录

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 第一章 绪论 .....                  | (1)   |
| 1.1 什么是地震力 .....              | (1)   |
| 1.2 地震力的研究方法 .....            | (1)   |
| 1.3 弹性地震力理论 .....             | (2)   |
| 1.4 非弹性地震力理论 .....            | (2)   |
| 1.5 挡水坝的地震力理论 .....           | (3)   |
| 第二章 结构的自由振动 .....             | (4)   |
| 2.1 多自由度体系的自由振动 .....         | (4)   |
| 2.2 伸臂梁的自由振动 .....            | (11)  |
| 第三章 弹性地震力理论基础 .....           | (22)  |
| 3.1 弹性体系地震反应的确定 .....         | (22)  |
| 3.2 伸臂梁式结构情形的简化 .....         | (29)  |
| 3.3 地震反应谱的确定方法 .....          | (42)  |
| 3.4 反应谱的一般性质 .....            | (52)  |
| 3.5 反应组合问题 .....              | (59)  |
| 3.6 静力法 .....                 | (63)  |
| 第四章 弹性地震力理论的一些其他问题 .....      | (65)  |
| 4.1 几个其他问题 .....              | (65)  |
| 4.2 结构对于多分量地面运动的反应 .....      | (73)  |
| 4.3 地面运动相位差问题 .....           | (78)  |
| 4.4 剪切扭转耦联振动 .....            | (86)  |
| 4.5 建筑结构的零频刚体转动振型及其地震反应 ..... | (97)  |
| 第五章 非弹性地震力理论梗概 .....          | (118) |
| 5.1 地震时建筑结构的非弹性表现 .....       | (118) |
| 5.2 单自由度弹塑性体系的地震强迫振动方程 .....  | (118) |
| 5.3 数值算法 .....                | (119) |
| 5.4 弹塑性反应谱 .....              | (121) |
| 5.5 计算结果示例 .....              | (122) |

|                        |                                   |       |
|------------------------|-----------------------------------|-------|
| 5.6                    | 单自由度体系的弹塑性设计 .....                | (126) |
| 5.7                    | 多自由度弹塑性体系的地震强迫振动 .....            | (127) |
| 5.8                    | 弹塑性体系地震强迫振动的能量分析 .....            | (130) |
| 第六章 挡水结构的地震力理论初步 ..... |                                   | (133) |
| 6.1                    | 挡水结构的自由振动问题 .....                 | (133) |
| 6.2                    | 挡水结构的地震强迫振动问题 .....               | (145) |
| 第七章 圆筒形隧道的地震反应 .....   |                                   | (150) |
| 7.1                    | 引言 .....                          | (150) |
| 7.2                    | 简谐地震波入射时圆筒形隧道的稳态绕射反应 .....        | (150) |
| 7.3                    | 阶形地震波入射时圆筒形隧道的绕射反应 .....          | (153) |
| 7.4                    | 地震波在不规则形状孔洞附近的绕射 .....            | (157) |
| 7.5                    | 现有分析结果的讨论 .....                   | (158) |
| 第八章 地震力理论的现况综合简述 ..... |                                   | (160) |
| 8.1                    | 地震力理论的几个发展阶段 .....                | (160) |
| 8.2                    | 基于地面运动的地震力理论的有关问题 .....           | (161) |
| 8.3                    | 基于基岩面运动的地震力理论的有关问题 .....          | (162) |
| 8.4                    | 根据基岩面运动推算地面运动 .....               | (163) |
| 8.5                    | 结构与地基的相互作用 .....                  | (167) |
| 8.6                    | 桩与地基土的相互作用 .....                  | (168) |
| 8.7                    | 抗震分析方法分类 .....                    | (169) |
| 8.8                    | 按抗震分析方法对结构分类 .....                | (170) |
| 8.9                    | 抗震设计中应遵循的主要原则 .....               | (170) |
| 附 录 .....              |                                   | (172) |
| 1.                     | 《工业与民用建筑抗震设计规范 TJ11—74》的附录一 ..... | (172) |
| 2.                     | 世界各国抗震设计规范中关于地震荷载的计算规定摘要 .....    | (173) |
| 3.                     | 新的中国地震烈度表 .....                   | (179) |
| 4.                     | 刚度中心和变形主轴 .....                   | (182) |
| 5.                     | 符号表 .....                         | (184) |
| 参考资料 .....             |                                   | (189) |

# 第一章 绪 论

## 1.1 什么是地震力

强烈地震发生时，自震源处释放出巨大的能量，以应力波的形式向四面八方传播。由于介质并非均一，不同的介质分界情况很不规则，各自的力学性质存在大的差异，因而地震波的传播情况是十分复杂的。地震波需经过多次的反射、折射过程，始能到达地面表层。

在地面表层中，地震应力波的波前掠过带有孔洞的介质（有衬砌和无衬砌）时，发生绕射、散射现象，动应力集中应作为地下结构抗震设计的主要依据。地下结构就是这样经受地震的力学作用。

地震波到达地面——自由边界后，地面被激起强烈的振动。工程结构一般修建在地面之上，由于基底运动而引起强迫振动。这种强迫振动，一方面决定于地面运动的规律，另一方面也决定于结构物本身固有的动力学特征。结构物的地震强迫振动反应的大小可以用荷载、内力、变形以及能量等力学量来量度，对于工程设计而言，以地震荷载量度比较直接，较为相宜。地面结构是这样承受着地震的力学作用。

半地下结构的下半部埋于地面表层中，地震对于半地下结构的力学作用既不同于地面结构，又不同于地下结构。地震对于半地下结构的作用方式较之地面结构和地下结构更为复杂。

地震力理论是要反映地震对于各类工程结构的力学作用的一般规律。历代广大的劳动人民群众具有丰富的抗震知识，在场地的选择，建筑平面的布置、耐震和减震的结构型式和抗震建筑材料等多方面都有丰富的经验，对地震力理论的发展起了巨大的作用。

绝大多数工程结构位于地面，地震力理论的研究最初很自然地是针对地面结构进行的。如上所述，地面结构所承受的地震的力学作用可以简练地考虑为地震荷载的作用，因而地震荷载常被称为地震力。当然，这只是狭义的地震力。广义地说，地震力应包括作用于衬砌结构的应力波、强加于结构基底不同部位处的不同的地面运动以及其他的复杂的力学作用等内容。

从本章至第六章介绍适用于地面结构的地震力理论，即基于地面运动的地震力理论。如无特别的必要，在用词上我们对地震荷载和地震力不作严格区分。在第八章中，除继续补充介绍基于地面运动的地震力理论外，还要简略介绍一点适用性较广的地震力理论，比如正在发展中的基于基岩面运动的地震力理论。第七章介绍隧道地震反应的确定方法。

## 1.2 地震力的研究方法

以往，人们主要是通过总结结构震害经验的办法来估算强震时的地震荷载，这是必不可少的研究途径之一，今后还应遵循。近五十年来，实验观测（实物或模型）和理论分析的研

究大量开展起来,并已取得相当进展。地震工作者在不同的地基上观测强地震的地面运动,取得了许多记录。工程人员对各种类型结构物进行实测,积累了相当数量的资料(弹性情形有自振频率或周期、振型、阻尼等,非弹性情形有屈服力或屈服变形、延伸率等)。力学工作者建立了结构物抗地震分析的理论基础,相应的计算技术和模型试验技术也得到发展。已经取得的地面运动记录和结构动力学特性的资料是用以确定结构物地震反应的实际根据,具有简练形式的地震力理论以及相应的计算、试验技术是确定结构物振动反应的有力手段。

就结构物在地震时的工作阶段来区分,地震力理论有初等的弹性理论和进一步的非弹性理论。

### 1.3 弹性地震力理论

弹性地震力理论是建立在下述假定之上的:

1. 结构可简化为多个集中质点或质量连续分布的弹性体系,振动变形很小(微幅),线性叠加原理可以适用。

2. 结构固定在地基之上,地震时,支承结构的地基各部分作同一的运动,在时间上没有相位差\*。

3. 结构的阻尼小,因而具有阻尼的弹性结构的各个振型\*\*之间耦联影响也小,当进行振型分解运算时,实际上耦联影响可以忽略。

弹性地震反应可利用联立解法或基于振型分解原理的广义坐标法来计算。

地震作用下质点系的强迫振动用线性常微分方程组描述,连续体的强迫振动用偏微分方程描述,偏微分方程实际上等效于常微分方程组。方程组的求解需利用电子计算机,一些科学工作者进行了这方面的研究工作,并曾给出许多实际结果。目前,由于一些条件的限制,一般工程设计中还不可能广泛采用联立解法来进行抗震分析。

基于振型分解原理的广义坐标法是公认的便利方法,多自由度弹性体系的复杂振动归结为多个单自由度体系简单振动的线性组合。实际使用时,弹性结构的自振特性通过计算或试验途径由工程设计部门负责确定,单自由度体系地震反应利用“反应谱”的形式由科学部门研究给出,振型组合问题可基于统计分析寻求合理的方案。这便是弹性反应谱理论的概略内容。

### 1.4 非弹性地震力理论

在强烈地震作用下,结构反应可能超出弹性阶段而进入非弹性阶段。这时结构不存在固有的自振特性,弹性理论不再适用(于全过程)。基于地面运动计算多自由度体系的地震反应,只宜利用联立解法而不用振型分解的方法,这给实际应用带来不便。实际应用的要求提出了繁难的科研任务。目前,科研工作中研究得比较多的非弹性体系是弹塑性体系。在单自由度情形,地震反应可用弹塑性反应谱来确定。非弹性地震力理论远不及弹性理论成熟,但

---

\* 进一步的理论考虑相位差,参见第四章4.3节。

\*\* 严格地讲,振型的概念仅适用于无阻尼情形。

其初步研究成果也常有条件地近似变换为“弹性理论”的形式应用于工程实际中。

### 1.5 挡水坝的地震力理论

水工结构的使用要求（防渗漏）不容许裂缝发生，只能进行弹性设计。挡水坝的弹性地震力理论比其他结构的要复杂一些。在振动方程中，需要考虑动水压力的影响，而动水压力又决定于在求解过程中尚属未知的振动位移（或加速度），因而计算比较困难。精确地考虑动水压力的影响是非常繁琐的，在科研工作和实际应用中都常作近似处理。近年来有人提出将反应谱理论推广应用于水工结构的建议。

## 第二章 结构的自由振动

### 2.1 多自由度体系的自由振动

结构自振特性和地面运动规律是用以确定弹性地震反应的实际根据, 这里我们择要叙述多自由度体系自振特性的求解方法, 以供随后某些章节引用。在地震工程中, 如房屋、烟囱、塔架等工业构筑物以及其他许多类型的结构物, 都可以将简图取为多自由度体系。

#### 2.1.1 自由度

自由度这一概念在不同学科中具有不同的含义。在这里我们限于对结构动力学中的自由度的含义做出解释: 自由度是表示振动过程中, 确定任一瞬刻结构体系变形状态所需的独立的几何参数的数目。

一般地说, 具有一个集中质量的弹性空间体系和平面体系分别为 6 个 (3 个移动和 3 个转动) 和 3 个 (2 个移动和 1 个转动) 自由度。具有  $n$  个集中质量的空间体系和平面体系应分别为  $6n$  和  $3n$  个自由度。如果不需考虑转动, 具有  $n$  个质点的空间和平面体系的自由度分别减少为  $3n$  和  $2n$ ; 若有  $\alpha$  个几何约束条件, 则自由度进一步减少为  $3n - \alpha$  和  $2n - \alpha$ 。

在建筑结构的实际情况中, 我们常常可以根据工程和力学知识, 判定某些几何参数在振动反应中是主要的, 而另一些是次要的, 可以忽略而不加考虑。这样一来, 自由度的数目就将减少, 分析工作也将相应减少, 而给出的振动计算结果仍然满足工程必需的精度要求。现就简单的平面结构体系来举例。

图 2.1.1 所示的简单结构应考虑为 2 自由度。支承构件的挠曲变形是主要的, 而纵向变形非常微小, 集中质量可以认为只有水平移动和转动, 竖向移动可以略而不计。

如果图 2.1.1 的集中质量的转动惯量很小, 转动惯性力矩实际上可以不考虑, 这样便简化为单自由度, 如图 2.1.2 所示, 质点仅有水平移动。

仿图 2.1.2, 图 2.1.3 为  $n$  自由度, 每个质点都只有水平移动。



图 2.1.1 二自由度体系 (水平移动及转动)



图 2.1.2 单自由度体系 (水平移动)

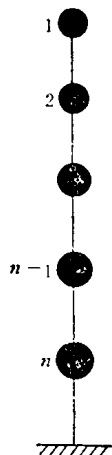


图 2.1.3  $n$  自由度体系 (水平移动)

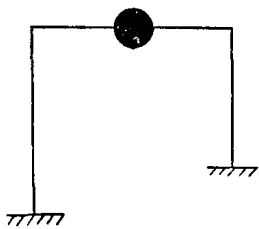


图2.1.4 不对称框架

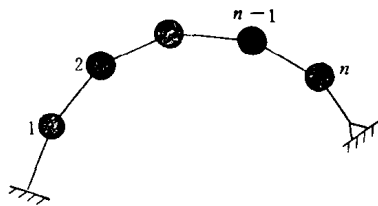


图2.1.5 拱式框架， $n-1$ 自由度

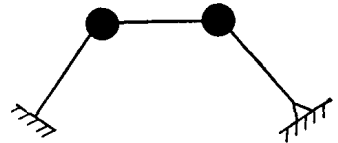


图2.1.6 拱式框架，单自由度

图2.1.4的不对称框架上附有一个质点。严格说来，这是一个2自由度体系（水平移动和竖向移动）。但由于水平移动和竖向移动的耦合是微弱的，故水平振动和竖向振动可作为两个不同的单自由度体系分别处理。

图2.1.5所示拱式框架的 $n$ 个质点用 $n+1$ 个构件相联，构件以挠曲变形为主，纵向变形小。此体系的变形状态可用各构件的整体转动来表示，因受几何约束， $n+1$ 个构件整体转动仅有 $n-1$ 个是独立的，故为 $n-1$ 个自由度。

作为图2.1.5的特例，图2.1.6虽有二质点，却是一个单自由度体系。

如果结构是对称的，利用对称性可使分析大为简化。一般说来， $n$ 自由度体系的复杂振动可分解为一个 $\frac{n}{2}$ （ $n$ 为偶数）或 $\frac{n+1}{2}$ （ $n$ 为奇数）自由度的对称振动，和另一个 $\frac{n}{2}$

（ $n$ 为偶数）或 $\frac{n+1}{2}$ （ $n$ 为奇数）自由度的反对称振动来分别求解。

这里举一个十分简单的例子。图2.1.7的拱式框架为二自由度体系，利用对称性可简化为一个对称的单自由度体系和另一个反对称的单自由度体系分别求解。

反对称结构也可做简化处理，但在地震工程实际中此类结构甚少。

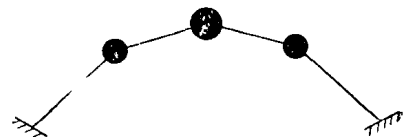


图2.1.7 对称拱式框架

质量分布的体系可以看做是具有无穷多个集中质点的体系，其自由度为无穷大。

## 2.1.2 自由振动方程

当 $n$ 自由度的结构体系处在自由振动状态下，在无阻尼情形，惯性力和弹性恢复力处于平衡，如下式所示：

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j = -m_i \ddot{u}_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中， $u_i$ 为水平或竖向的振动位移（线位移或角位移）， $m_i$ 为位移 $u_i$ 处相应的质量或转动惯量， $i, j$ 为序号， $k_{ij}$ 为刚度系数，即当产生的位移 $u_j$ 为1单位，而其他所有位移皆为零时，沿位移 $u_i$ 方向所需施加的力或力矩。刚度系数具有互等性质，即

$$k_{ij} = k_{ji} \quad (2)$$

整理式（1）可得

$$m_i \ddot{u}_i + \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

这是用刚度系数法表出的  $n$  自由度体系自由振动方程的典型形式。

考虑到自由振动时结构的位移系因惯性力作用所引起, 于是可从另一途径建立方程

$$\sum_{j=1}^n (-m_j \ddot{u}_j) \delta_{ij} = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

式中,  $\delta_{ij}$  为柔度系数, 即当 1 单位的力或力矩沿  $u_j$  方向作用时沿  $u_i$  方向所产生的位移。柔度系数也具有互等性质, 即

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (5)$$

整理式 (4) 可得

$$\sum_{j=1}^n m_j \ddot{u}_j \delta_{ij} + u_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

这是用柔度系数法表出的  $n$  自由度体系自由振动方程的典型形式。

### 2.1.3 自振频率

设

$$u_i = \bar{u}_i \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

代入式 (3) 和式 (6), 经消去整理, 可得

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{u}_j - m_i \omega^2 \bar{u}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

或

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{u}_j = m_i \omega^2 \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

和

$$\bar{u}_i - \sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \bar{u}_j \delta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

或

$$\sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \bar{u}_j \delta_{ij} = \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

以上式中,  $\bar{u}_i$  为位移振幅,  $t$  为时间,  $\omega$  为自振圆频率, 或简称自振频率,  $\varphi$  为相角。

视  $m_i \omega^2 \bar{u}_i$  为给定的自由项, 可求得线性代数方程 (9) 的解答如式 (11) 所示, 这样可以根据刚度系数求柔度系数。同样地, 视  $\bar{u}_i$  为给定的自由项, 可求得式 (11) (未知元为  $m_j \omega^2 \bar{u}_j$ ) 的解答如式 (9) 所示, 这样便可以根据柔度系数求刚度系数。

$\bar{u}_i$  异于零的解是振动解。根据式 (8),  $\bar{u}_i$  异于零的条件给出特征方程

$$\begin{vmatrix} k_{11} - m_1 \omega^2 & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega^2 & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} - m_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

又根据式 (10),  $\bar{u}_i$  异于零的条件给出

$$\begin{vmatrix} 1 - m_1 \omega^2 \delta_{11} & -m_2 \omega^2 \delta_{12} & \cdots & -m_n \omega^2 \delta_{1n} \\ -m_1 \omega^2 \delta_{21} & 1 - m_2 \omega^2 \delta_{22} & \cdots & -m_n \omega^2 \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_1 \omega^2 \delta_{n1} & -m_2 \omega^2 \delta_{n2} & \cdots & 1 - m_n \omega^2 \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

将式 (13) 进行整理, 便得到特征方程

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \omega^2} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \omega^2} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} - \frac{1}{m_n \omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

式 (12) 和 (14) 分别是用刚度系数法和柔度系数法求自振频率的特征方程的典型形式。

式 (12) 和 (14) 是  $n$  次 (对  $\omega^2$  而言) 代数方程, 具有  $n$  个正实根  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_r^2, \dots, \omega_n^2$  (从小到大), 这样便解得  $n$  个自振频率。

当自由度数  $n$  较大时, 将行列式展为多项式求解自振频率实际上是不可能, 也是不必要的。根据多自由度体系的各种不同的结构力学特性, 有一些求解自振频率 (特征值) 的标准计算程序可给调用。

#### 2.1.4 振型

将解得的特征值  $\omega_r^2$  代回到式 (8) 和 (10), 任选  $n-1$  个方程, 可求得相应的特征函数为

$$\bar{u}_i^{(r)} = C_i^{(r)} \bar{u}_{i1}^{(r)} \quad (15)$$

在式 (15) 中, 取  $i = i_1$ , 显见

$$C_{i1}^{(r)} = 1 \quad (16)$$

位移  $\bar{u}_i^{(r)}$  组成的变形图称为振型。每一自振频率与一振型相应,  $r$  既是频率的序号, 也是振型的序号。 $r=1$  时的 (最低) 自振频率和振型通常称为基本频率和基本振型。

振型是一种特殊的变形图。式 (9') 和式 (11')

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \bar{u}_j^{(r)} = m_i \omega_r^2 \bar{u}_i^{(r)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9')$$

$$\sum_{j=1}^n m_j \omega_r^2 \bar{u}_j^{(r)} \delta_{ij} = \bar{u}_i^{(r)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11')$$

的力学含义表明: 单位质量上的振型惯性力等于振型位移和相应的自振频率的平方的乘积。将振型惯性力作用于弹性结构体系, 得到的变形图便是该振型自身。

从式 (9') 和 (11') 还可以看到, 振型只表示振动位移  $\bar{u}_i^{(r)}$  的相对大小, 而其绝对大小是不确定的。

将式 (15) 代入式 (7), 对所有振型求和, 得

$$u_i = \sum_{r=1}^n C_i^{(r)} \bar{u}_i^{(r)} \sin(\omega_r t + \varphi_r) \quad (17)$$

式(17)中, 振幅  $\bar{u}_i^{(r)}$  和相角  $\varphi_r$  根据  $2n$  个初始条件来确定。对于任一振型而言, 各个质点振动的频率和相位都是相同的。

求解结构自振问题的标准计算程序, 通常将自振频率和相应的振型同时给出。

### 2.1.5 正交条件

对于第  $r$  振型和另一第  $s$  振型, 利用结构力学中的功的互等原理, 可以写出关系式

$$\sum_{i=1}^n m_i \omega_r^2 \bar{u}_i^{(r)} \bar{u}_i^{(s)} = \sum_{i=1}^n m_i \omega_s^2 \bar{u}_i^{(s)} \bar{u}_i^{(r)} \quad (r \neq s) \quad (18)$$

整理可得

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{i=1}^n m_i \bar{u}_i^{(r)} \bar{u}_i^{(s)} = 0 \quad (r \neq s) \quad (19)$$

如果  $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{u}_i^{(r)} \bar{u}_i^{(s)} = 0 \quad (r \neq s) \quad (20)$$

这就是振型正交条件。如2.1.2节所述,  $u_i$  为任何水平方向或竖向的振动位移, 故式(20)概括平面体系和空间体系的一般情形。

式(20)说明, 相应于任一振型的惯性力对于任一他振型是不作功的。

有如一般熟知的正(余)弦函数一样, 振型也是正交函数序列。对于质点系, 振型函数值是间断分布的; 而对于弹性连续体, 振型函数值是连续分布的。

基于结构的自振特性求解强迫振动反应时, 由于振型正交条件的存在, 常常使各个振型的反应不相耦合, 可以分别求解, 分析工作因而大大简化。

以下的一些章、节将不时引用本节给出的一般性结果。

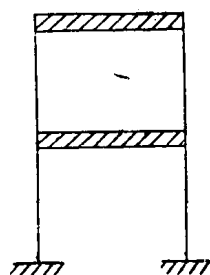
### 2.1.6 例

为了便于理解, 同时也便于读者校核, 以下举一个十分简单的求解多自由度结构体系自振特性的例子。

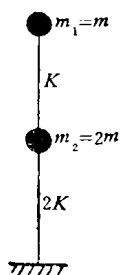
例: 图2.1.8a 为一个二层框架, 楼盖刚度比柱子的刚度大得多, 故结构简图如图2.1.8b 所示。图2.1.8b 中标明的质量和刚度大体上反映下层的楼盖质量和刚度通常大于上层的事实。

根据2.1.2节中所述刚度系数  $k_{ij}$  和柔度系数  $\delta_{ij}$  的定义, 参照图2.1.8c 可求得

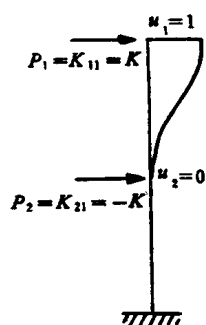
$$\left. \begin{array}{ll} k_{11} = k & k_{12} = -k \\ k_{21} = -k & k_{22} = 3k \end{array} \right\} \quad (21)$$



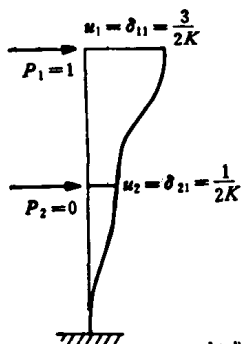
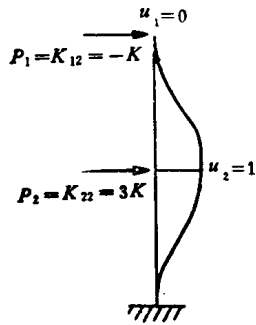
(a) 二层框架



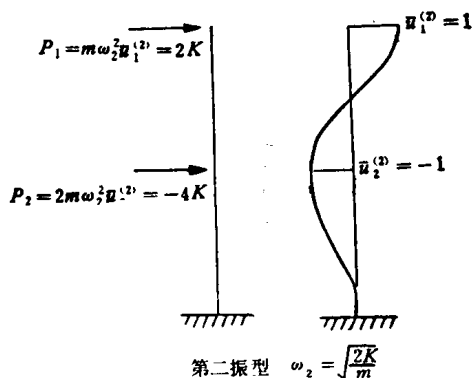
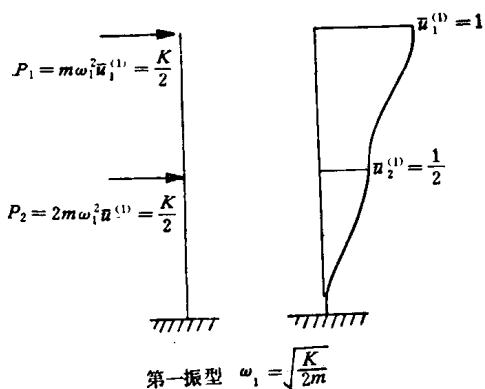
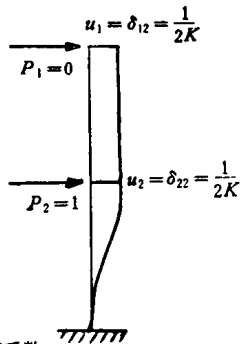
(b) 计算简图



(c) 求刚度系数



d) 求柔度系数



(e) 振型惯性力及振型曲线

图2.1.8 二层框架算例

参照图2.1.8d 可求得

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{3}{2k} & \delta_{12} &= \frac{1}{2k} \\ \delta_{21} &= \frac{1}{2k} & \delta_{22} &= \frac{1}{2k} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

计算结果反映出互等性质  $k_{21} = k_{12}$  和  $\delta_{21} = \delta_{12}$ 。

根据2.1.3中式 (9) 和 (11), 可以分别用刚度系数法和柔度系数法写出自由振动方程

$$\left. \begin{aligned} k\bar{u}_1 - k\bar{u}_2 &= m\omega^2\bar{u}_1 \\ -k\bar{u}_1 + 3k\bar{u}_2 &= 2m\omega^2\bar{u}_2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

和

$$\left. \begin{aligned} m\omega^2\bar{u}_1 \frac{3}{2k} + 2m\omega^2\bar{u}_2 \frac{1}{2k} &= \bar{u}_1 \\ m\omega^2\bar{u}_1 \frac{1}{2k} + 2m\omega^2\bar{u}_2 \frac{1}{2k} &= \bar{u}_2 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

视式 (23) 中  $m\omega^2\bar{u}_1$  和  $2m\omega^2\bar{u}_2$  为自由项,  $\bar{u}_1$  和  $\bar{u}_2$  为未知元, 则式 (24) 是它们的解答, 这样就根据刚度系数求得柔度系数; 视式 (24) 中  $\bar{u}_1$  和  $\bar{u}_2$  为自由项,  $m\omega^2\bar{u}_1$  和  $2m\omega^2\bar{u}_2$  为未知元, 则式 (23) 是它们的解答, 这样就根据柔度系数求得刚度系数。

根据式 (12) 和式 (14) 可写出频率特征方程

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & 3k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

和

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2k} - \frac{1}{m\omega^2} & \frac{1}{2k} \\ \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{2m\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

求解式 (25) 或式 (26) 当然给出同样的结果。

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{2m}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

参照 2.1.4 节, 将  $\omega_1$  和  $\omega_2$  代回到式 (23) 和 (24) 的前式和后式, 可得到

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^{(1)} &= -\frac{1}{k} (m\omega_1^2 - k) \bar{u}_1^{(1)} \quad [\text{由式 (23) 前式}] \\ &= \frac{-k}{2m\omega_1^2 - 3k} \bar{u}_1^{(1)} \quad [\text{由式 (23) 后式}] \\ &= \frac{1 - m\omega_1^2 \frac{3}{2k}}{2m\omega_1^2 \frac{1}{2k}} \bar{u}_1^{(1)} \quad [\text{由式 (24) 前式}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m\omega_1^2 \frac{1}{2k}}{1 - 2m\omega_1^2 \frac{1}{2k}} \bar{u}_1^{(1)} \quad [\text{由式 (24) 后式}] \\
&= \frac{1}{2} \bar{u}_1^{(1)} \quad (28)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2^{(2)} &= -\frac{1}{k} (m\omega_2^2 - k) \bar{u}_1^{(2)} \quad [\text{由式 (23) 前式}] \\
&= \frac{-k}{2m\omega_2^2 - 3k} \bar{u}_1^{(2)} \quad [\text{由式 (23) 后式}] \\
&= \frac{1 - m\omega_2^2 \frac{3}{2k}}{2m\omega_2^2 \frac{1}{2k}} \bar{u}_1^{(2)} \quad [\text{由式 (24) 前式}] \\
&= \frac{m\omega_2^2 \frac{1}{2k}}{1 - 2m\omega_2^2 \frac{1}{2k}} \bar{u}_1^{(2)} \quad [\text{由式 (24) 后式}] \\
&= -\bar{u}_1^{(2)} \quad (29)
\end{aligned}$$

式 (27)、式 (28) 和式 (29) 的结果表明刚度系数法和柔度系数法是殊途同归的。

今取  $\bar{u}_1^{(1)} = 1$  和  $\bar{u}_1^{(2)} = 1$ ，可将振型绘如图 2.1.8e (右侧)。

将振型惯性力作用于体系 (参见图 2.1.8e 左侧)，可见弹性变形图正是振型自身。

现在校验第一和第二振型的正交关系。将振型的计算结果代入 2.1.5 节的式 (20)，得到

$$\begin{aligned}
&m_1 \bar{u}_1^{(1)} \bar{u}_1^{(2)} + m_2 \bar{u}_2^{(1)} \bar{u}_2^{(2)} \\
&= m \times 1 \times 1 + 2m \times \frac{1}{2} \times (-1) = 0 \quad (30)
\end{aligned}$$

正交条件是满足的。

## 2.2 伸臂梁的自由振动

梁、拱、板和壳都是工程结构中常见的连续体，这里我们仅选择伸臂梁的自振问题进行表述，以供随后某些章、节引用，因为伸臂梁简图在地震工程问题中经常遇到。事实上，其他支座情形的梁和其他类型的连续体的自振问题的分析途径，和伸臂梁是相仿的。

### 2.2.1 剪切梁的自由振动方程

参照图 2.2.1，根据惯性力和弹性力的平衡，可以建立剪切梁的自由振动方程

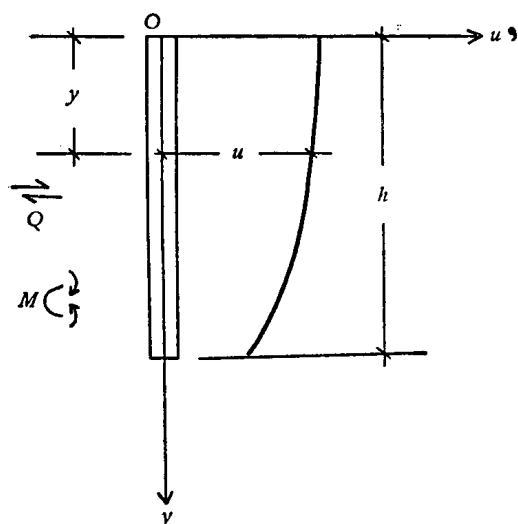


图2.2.1 梁振动方程的建立

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{GF_y}{k} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\rho F_y}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中,  $u$  为剪切梁的振动位移;  $y$  为沿梁轴的坐标;  $G$  为剪切模量,  $F_y$  为截面积, 是坐标  $y$  的函数,  $k$  为截面系数,  $\frac{GF_y}{k}$  即截面的抗切刚度;  $\rho$  为梁材料的容重,  $g$  为重力加速度。

将

$$u(y, t) = \bar{u}(y) \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

代入式 (1), 进行变量分离处理后, 可得

$$-\frac{d}{dy} \left( \frac{GF_y}{k} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = \frac{\rho F_y}{g} \omega^2 \bar{u} \quad (3)$$

令

$$a^2 = \frac{Gg}{k\rho} \quad (4)$$

代入式 (3), 便有

$$\frac{d}{dy} \left( F_y \frac{d\bar{u}}{dy} \right) + \frac{\omega^2}{a^2} F_y \bar{u} = 0 \quad (5)$$

伸臂梁的边界条件为

1.  $y = 0$  (上端),

$$\bar{Q} = -\frac{GF_y}{k} \frac{d\bar{u}}{dy} = 0 \quad (\text{自由}) \quad (6)$$

2.  $y = h$  (下端)

$$\bar{Q} = -\frac{GF_y}{k} \frac{d\bar{u}}{dy} = -c_u \bar{u} \quad (\text{弹性支座}) \quad (7)$$

或

$$\bar{u} = 0 \quad (\text{固定}) \quad (8)$$

式中,  $Q$  为剪力;  $h$  为梁高;  $c_u$  为下端弹性支座的平移刚度。

当  $F_y$  为坐标  $y$  的已知函数时, 根据式 (5) 以及式 (6)、式 (7) 或式 (8) 可解得伸臂剪切梁的各个频率及其相应的振型。

### 2.2.2 等截面剪切梁

对于等截面梁

$$F_y = F \quad (\text{常量}) \quad (9)$$