中学教学参考丛书

代数方程与不等式

山东教育出版社

中学教学参考丛书

代数方程与不等式

马 克 杰 编

山 东 教 育 出 版 社
一九八二年·济南

山东教育出版社出版
(济南经九路胜利大街)
山东省新华书店发行　青岛印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　11.25印张　240千字
1982年11月第1版　1982年11月第1次印刷
印数1—14,000
书号7275·45　定价0.82元

前　言

在生产实践和科学实验中，我们经常遇到量与量之间的相等关系和不相等关系，反映到数学上就是我们要研究的等式和不等式。等式和不等式构成矛盾的对立统一，它们有着密切的联系。因此，我们在本书中将代数方程与不等式放在一起，集中介绍其性质、解法和应用。在每节中都安排了例题和习题，以帮助读者巩固所学的基础知识，提高解题的能力和教师在教学中选用。

冯成进同志参加编写了第二章的部分内容，在拟定本书纲目中曾得到邵品琮、冯成进同志的帮助，谨在此致谢。

请读者批评指正。

一九八一年八月

目　　录

第一部分　代数方程

第二部分　不 等 式

第一部分　代数方程

第一章　方程和方程变形的一般原则

在实践中，我们经常遇到一些互相联系着的量，并且需要对它们进行数量分析，从已知量求出未知量。在数学中，方程就是解决这类问题的有力工具。

第一节　方　　程

1. 恒等式和方程

如等式　　$10(x^2+5)=10x^2+50,$　　①

$6(x+y)=6x+6y$　　②

等，无论用什么同一个数代替①中的 x，①式两边都相等，无论用什么同一个数代替②中的 x，和用同一个数代替 y，②式两边也都相等。

例如：设等式　　$x+10=2x+4,$　　③

$(x-1)^2=0,$　　④

等，用 $x=6$ 代入③式时，得

$$6+10=12+4,$$

$$16=16.$$

两边才相等，$x\neq6$ 时，③式两边就不相等；

用 $x=1$ 代入④式时，两边才相等，$x\neq1$ 时④式两边

就不相等。

上面各式中的 x、y 叫做未知数。如①，②，一个含有一个或几个未知数 x，y，……的等式，无论用什么同一个数代替未知数时，式子的两边都相等，则称这样的等式为恒等式。象③，④那样，含有一个或几个未知数 x，y，……的等式，如果用某些确定的数代替未知数时，两边才相等，则称这样的等式为方程。如果在未知数的可取值范围内，无论用什么数代替未知数，等式都不成立，这样的等式叫做无解方程。

含有一个未知数的式子可用 $f(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$，……表示，含有两个未知数的式子可用 $f(x, y)$，$g(x, y)$，$\varphi(x,y)$，……表示，含有 k 个未知数的式子可用 $f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，$g(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_k)$……等来表示。

由此可知，恒等式和方程都是等式，这是相同点。不同点在于，方程是一个有条件的等式，恒等式是一个无条件的等式。

例 1 等式 $10x+8=2x+24$

只有 $x=2$ 时两边才相等。

等式 $ax+b=a+bx$

只有 $x=1$ 时两边才相等. 所以它们都是方程，不是恒等式。

例 2 等式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

是恒等式。

这里必须指出，有的书中关于方程还有如下定义：

(1) 含有未知数的等式叫做方程。

这种说法虽简明，容易记忆，但没有将恒等式与方程区

别开来，不能说明方程的实质。

（2）形式为

$$f(x, y, \cdots, z)=g(x, y, \cdots, z)$$

的等式叫做方程，其中 $f(x, y, \cdots, z)$ 与 $g(x, y, \cdots, z)$ 是在它们定义域的公共部分里研究的两个函数。

这种说法初中学生不易接受。

2. 方程的分类

我们可以从不同的角度把方程分成不同的类型。

（1）按照方程两边表达式的性质来分类：

若一个方程的两边都是代数式，则称为代数方程。不属于代数方程的方程叫做超越方程。如指数方程，对数方程和三角方程都叫超越方程。

在代数方程中，根据方程两边是有理式还是无理式，又分成有理方程和无理方程。

在有理方程中，根据方程两边是整式还是分式，又分成整式方程和分式方程。

例如，方程 $8x-20=14x+4$ 是整式方程。方程 $\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x-2}=\frac{9-x}{x}$ 是分式方程. 方程 $\sqrt{6x+4}=10x-8$ 和 $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}=\sqrt{x+5}$ 都是无理方程。

又如，方程 $ax+b=cx+d$，不论 a，b，c，d 是否是有理数，它都是有理方程。方程 $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\frac{x(8x-3)}{x}$ 及 $\sqrt{(x+2)^2}=2x+3$ 也分别为分式方程和无理方程。当然，上面的各方程都是代数方程。

（2）按照方程中未知数的个数来分类：

一个方程含有几个未知数就叫做几元方程。

对于整式方程还可以按照未知数的次数来分类：

一个整式方程，如果它的未知数的最高次数（系数不为零的项）是 1，就叫做一次方程；如果是 2，就叫做二次方程；如果是 n，就叫做 n 次方程。

例如，方程 $8x-20=14x+4$ 是一次方程；方程 $x^2+4x+4=0$ 和 $xy-1=0$ 都是二次方程；方程 $x^3+3x^2+3x+1=0$ 和 $x^3-y^3-x-1=0$ 都是三次方程。方程 $0\cdot x^4+0\cdot x^2+x+1=2x-3$ 是一次方程。

方程分类列表如下：

- 方程
  - 代数方程
    - 有理方程
      - 整式方程
        - 一次方程
        - 二次方程
        - 高次方程
      - 分式方程
    - 无理方程
  - 超越方程
    - 指数方程
    - 对数方程
    - 三角方程

习　题 1—1

1. 恒等式和方程有什么异同点？举例说明。

2. 下列各等式哪些是恒等式？哪些是方程？

(1) $5+6=11$；　　(2) $x+6=11$；

(3) $-(3x-4)=4-3x$；　　(4) $9x-2=1$；

(5) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$；　　(6) $(x-y)^2=1$；

(7) $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$；

(8) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$；

(9) $(x-a)(x-b)=0$; (10) $x^2+y=x+y^2$.

3. 下列各方程哪些是代数方程？哪些是超越方程？哪些是整式方程？它们是几次的？

(1) $2x^2+3x+1=0$; (2) $x^2-4xy+1=x^3-y^3$;

(3) $\frac{x-3}{x+3}=3-x$; (4) $\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{y}-1$;

(5) $1+\sqrt{x^2-1}=x$;

(6) $\sqrt{\frac{x-y}{x+2}}=x+1+\sqrt[3]{x^2-y^2}$;

(7) $\cos x=x+1$; (8) $2^{\frac{x}{y}}-x=0$;

(9) $\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y=x+y$;

(10) $\lg x=x^2+1$; (11) $x+y+z=1$;

(12) $xy+y+z=1$.

第二节 方程的解集合

使方程两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解。只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根。

例如，$x=1$ 是方程 $(x-1)^2=0$ 的解，也可以说是它的根。$x=4$ 和 $x=-4$ 都是方程 $x^2=16$ 的解，也可以说都是它的根。数组 $x=0$，$y=0$ 是方程 $x^2+y^2=4xy$ 的解。

一个方程的所有解组成一个集合，叫做这个方程的解集合。

例如，方程$(x-1)(x-2)=x^2$ 和$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$ 的解集合分别为 $A=\left\{\frac{2}{3}\right\}$和 $B=\{3\}$。方程 $x^2=16$ 的解集合为 $C=\{-4,4\}$。

一个方程的解集合可能是空集。显然，这样的方程只能是无解方程(或称矛盾方程)。

例如，在实数范围内，方程 $x^2+1=0$ 和 $\sqrt{x-4}+\sqrt{3x-5}=-1$ 的解集合都是空集．方程 $|x|+|y|+|z|=-1$ 的解集合也是空集(不论在怎样的范围里)。

方程的解集合可能是有限集，也可能是无限集。

例如，有无限多个数组满足方程 $x+y=1$，所以这个方程的解集合是一个无限集．方程 $|x|=x$ 的解集合是所有非负数的集(无论在实数范围还是在复数范围)，也是一个无限集。

求方程的解集合的过程，就叫做解方程．

解方程要写清下面三个问题：

(1) 在未知数的可取范围里，方程有没有解？即解集合是否非空集？

(2) 如果有解，有几个解？即解集合是有限集，还是无限集？

(3) 如果有解，把解求出来．即求出解集合．

方程的解集合推广到方程组就是：

设方程 $f_1(x,y,\cdots,z)=0$，$f_2(x,y,\cdots,z)=0$，…，$f_s(x,y,\cdots,z)=0$ 的解集合分别为 A_1，A_2，…，A_s，则方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y,\cdots,z)=0 \\ f_2(x,y,\cdots,z)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_s(x,y,\cdots,z)=0 \end{cases}$$

的解集合 A 等于 A_1，A_2，…，A_s 的交集，即 $A=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s$。显然，$A$ 是每个 A_i $(1\leqslant i\leqslant s)$ 的子集，即 $A\subseteq$

A_i。当任何一个$A_i=\phi(1\leqslant i\leqslant s)$时，则$A=\phi$。就是说，方程组中的方程，即便有一个是矛盾的，那么原方程组也是矛盾的。

习 题 1—2

1. 什么是方程的解？什么是方程的解集合？下列方程后面括号里的数值属于方程的解集合吗？

(1) $x+1=1$, (0, 1)；　　(2) $x^2=1$, (1, -1)；

(3) $(x-2)(x+2)=0$, (2, -2, 1)；

(4) $\sqrt{x}=\sqrt{x}$, (0, 1, -1)；

(5) $\sqrt{x+1}=x-1$, (0, 3)；

(6) $\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}+1$, (0, 1)。

2. 说出下列各集合的几个元素来，哪些是有限集？哪些是无限集？

(1) 双二次方程 $x^4-2x^2+1=0$ 的解集合；

(2) 方程 $x^2+8=0$ 实根的集合；

(3) 不等式 $2x^2-x+8>0$ 的解集合；

(4) 方程 $2x-y=1$ 的解集合。

3. 在平面上，标出 $x=3$ 的所有点的集合 A，再标出 $y=4$ 的所有点的集合 B，$A\cap B$ 是什么集合？

4. 设 A 是 $x>4$ 的一切点的集合，B 是 $x>5$ 的一切点的集合，C 是 $x<6$ 的一切点的集合，求：

(1) $A\cap B$；　(2) $A\cap C$；　(3) $B\cap C$；

(4) $A\cup B$；　(5) $A\cup C$；　(6) $B\cup C$。

5. 设 A 是 $x<1$ 的一切点的集合，B 是 $x<2$ 的一切点的集合，C 是 $x>3$ 的一切点的集合，求：

(1) $A\cap C$；　(2) $B\cap C$；　(3) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(4) $A\cap B$；　(5) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$。

第三节　方程变形的一般原则

1．同解方程

设有方程 $x-1=2x+3$。

它的解为 $x=-4$。

方程 $2x-2=4x+6$

它的解也为 $x=-4$。

它们的解集合相等。

又如方程 $x^2-5x=-6$

与方程 $x^2-5x+6=0$

的解集合也相等，都为$\{2,\ 3\}$。

一般地，设有两个方程

$$f(x)=g(x) \quad ①$$

$$\varphi(x)=\psi(x) \quad ②$$

若方程①的解集合为A，方程②的解集合为B，当$A=B$时，则称它们是同解方程。

例 1　方程 $2x-3=x+5$ 与$x=8$ 是同解方程。

方程 $x^2+5=6x$ 与 $2x^2+10=12$ 是同解方程。

方程 $x-2=0$ 与 $(x-2)^2=0$ 是同解方程。

例 2　方程 $x-2=0$ 与 $(x-2)(x-3)=0$ 是不同解方程。

在上述同解方程的定义中，只是求出方程的解集合，没有包括根的重数。这是因为，若把重根包括在定义中，对于同解方程定理的证明将带来很大困难。解方程主要求解集合，只要求出解集合，再求根的重数，则非常容易。

同时还须注意，两个方程同解并不意味着它们一定有解。这因为无解方程的解集合是空集，因而所有的无解方程都同解。方程同解的概念是相对的，在这个范围内同解，在另一个范围内可能不同解。例如方程 $x^2+1=0$ 与 $x^2+2=0$，在实数范围内都是无解方程，因而同解，但在复数范围内不同解。所以，为了明确起见，若不特别声明，我们以下只在实数范围内讨论。

2. 方程变形的一般原则

由同解方程的概念可知，同解关系具有传递性，即“若甲与乙同解，而且乙与丙同解，则甲与丙也同解”。解方程常常是应用这一重要性质，通过一定的运算，利用一连串的同解方程，一个比一个简单，最后解出原方程。这种把一个方程变成与它同解的方程的过程叫做方程的同解变形。有时还需要把方程作不同解的变形，化作简单方程，最后确定原方程的解集合。

定理 1 方程

$$f(x)=g(x) \qquad ①$$

的未知数所有可取值使式子 $\varphi(x)$ 都有意义时，则它与方程

$$f(x)\pm\varphi(x)=g(x)\pm\varphi(x) \qquad ②$$

同解。

定理是说，在方程两边同加上一个式子，就得到与之同解的方程。当然，对加上的式子有个要求，即方程的未知数

所有可取值使这个式子都有意义。设 $f(x)$，$g(x)$ 与 $\varphi(x)$ 未知数可取值范围分别为集合 M，N 与 P，则方程①的未知数所有可取值范围为 $M\cap N$，要求 $(M\cap N)\subseteq P$。否则，有可能不同解。

定理 1 证明：设 a 是方程①的任一个解，则

$$f(a)=g(a).$$

因为对方程①未知数所有可取值 $\varphi(x)$ 都有意义，所以 $\varphi(a)$ 是一个确定的数，且

$$f(a)\pm\varphi(a)=g(a)\pm\varphi(a),$$

这表明 a 也是方程②的解。

又设 b 是方程②的任一解，则

$$f(b)\pm\varphi(b)=g(b)\pm\varphi(b),$$

$$f(b)=g(b),$$

这表明 b 也是方程①的解。因此，方程①与②解集合相等，它们是同解的。

例 1　方程 $2x+3=x+5$ 与方程 $(2x+3)+(x+1)=(x+5)+(x+1)$ 同解，但与 $2x+3+\dfrac{1}{x-2}=x+5+\dfrac{1}{x-2}$ 不同解。因为 $x=2$ 时这个方程无意义。

例 2　方程 $\sqrt{x-1}=1$ 与方程 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-10}=1+\sqrt{x-10}$ 不同解。因为 $x=2$ 时式子 $\sqrt{x-10}$ 没有意义。

我们可以从方程的两边同时减去列在一边的一项，这项就在其所在的那边消失，而在另一边将有其绝对值相等而符号相反的一项。这就相当于把方程的一项改变符号后从一边移到另一边。根据定理 1，移项后所得方程与原方程同解。因此，一切方程都可以写成如下形式：

$$F(x)=0.$$

定理 2 方程

$$f(x)=g(x) \quad ③$$

的未知数的所有可取值使式子 $\varphi(x)$ 都有意义，并且不等于零，则它与方程

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x) \quad ④$$

同解。

证明：设 a 是方程③的任一个解，则

$$f(a)=g(a).$$

因为对方程③未知数所有可取值 $\varphi(x)$ 都有意义，且不等于零，所以 $\varphi(a)$是一确定的非零数，且

$$f(a)\varphi(a)=g(a)\varphi(a),$$

这表明 a 也是方程④的解。

又设 b 是方程④的任一解，则

$$f(b)\varphi(b)=g(b)\varphi(b),$$

$$f(b)=g(b),$$

这表明 b 也是方程③的解。因此，方程 ③ 与 ④ 的解集合相等，它们是同解的。

应用定理 2 解方程时，可将方程的两边同乘以或除以任何一个非零数。但必须注意，将方程两边同乘以一个或同除以一个含未知数的式子时，原方程未知数所有可取值使这个式子必须都有意义且不为零，否则，有可能不同解。

例 3 方程 $\frac{3x}{8}+2x-\frac{1}{6}=\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-5$，用 24 乘方程两边，即得一同解方程

$$9x+48x-4=8x+6x-120.$$