集合初步知识

JIHE CHUBU ZHISHI

天津科学技术出版社

集合初步知识

刘玉翘　陈汉卿　编

天津科学技术出版社

集合初步知识

刘玉翘　陈汉卿　编

*

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷一厂印刷

天津市新华书店发行

*

开本787×1092毫米 1/32 印张 4 3/4 字数 96,000

一九八〇年四月第一版

一九八〇年四月第一次印刷

印数：1—49,000

统一书号：13212·6　定价：0.41元

前　言

为了给中学教师提供一些有关集合的参考资料，便于教学，同时帮助中学生和知识青年学习有关集合的知识，我们编写了这本小册子。

研究集合的运算及其性质的数学分支称为集论或集合论。这一数学分支是在十九世纪末及二十世纪初开始发展起来的。德国数学家康脱（G·Cantor）是集合论的奠基人。现在，集合论的概念和方法已经浸透到所有的数学分支，并且改变了它们的面貌，各数学分支的完整体系，都是在所取集合上，设定其元素及子集的性质和运算的公理而构成的。所以，不熟悉集合论的原理就不可能对近代数学获得正确的理解。

较之许多近代数学分支，集合论更以其抽象为特点。正基于此，当我们以集合论的观点去观察所研究的各种数学对象及其彼此间的联系时，能够站得高，看到问题的本质。然而也是由于这种抽象，往往改变了一般初等数学所形成的观念（例如，集合的和、交运算不同于初等数学的加法、乘法运算等），从而使初学者感到困难。本书尽量结合实际引出概念，并力求通过大量例题及通俗易懂的语言，使读者掌握有关概念。书中编有一定数量的练习题，读者还可以随时找出自己所熟悉的算术、代数、几何及高等数学方面相应的实例，用来印证所学的集合的概念和理论，巩固所学知识。

目前，各种有关集合论的书籍使用的记号不统一，本书

选择了较普遍使用的符号，并在第一次出现时，注明一些同义记号和名称。

天津师范学院的鲁又文同志对本书作了详细审阅，提出了不少宝贵的意见，在此我们表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中难免存在不妥之处，请读者批评指正。

编　者

一九七九、八

目　　录

第一章　集合的基本概念

一、什么是集合

1.集合　在日常生活中，我们经常要碰到用“全体”、“所有”之类的词所表示的某些概念．比如，一年级全体同学；五年级所有少先队员等．这里所说的对象是确定的（一年级的学生，五年级的少先队员），范围也是一定的(全体，所有）．在数学里，也经常碰到类似的说法，比如，小学数学第一册里所说的10以内的数，指的就是0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10；自然数的全体，指的就是1、2、3、……；所有等边三角形，指的就是所有三边相等的三角形．也就是说，它们的对象和范围都是确定的．我们把具有一定范围的、确定的对象所组成的全体，叫做集合（简称为集）．用集合论的创始人康脱的话说，就是“把一定的并且彼此可以明确识别的事物——事物可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起，称为集合．”上面所举的例子都是集合．又如：

一个院子里所有的树是一个集合；

一台机器所有的零件是一个集合；

所有的偶数是一个集合．

而“大数的全体”、“高个子人的全体”就不能说是集合，因为属于这个“全体”的范围不能确定．比如，一万是不是大数？身高175厘米的人算不算高个子？都不清楚．在这

种情况下，就不能说是集合．

我们上面对“集合”的解释，只是对集合的一种描述，而不是严格的定义．因为集合是一种最原始的数学概念，它和点、线、面、体、数一样，是不定义概念①，我们只能用一些同义词给它们一种描述，而这种描述又能使我们清楚这一概念指的是什么．

组成一个集合的每一个对象，都叫做这个集合的**元素**（简称为**元**）．如2、4、6都是偶数集合的元素．

例1　$10! =2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$的所有质因数组成一个集合，它有四个元素，就是质数2、3、5、7．

像这样只有有限个元素组成的集合叫做**有限集**．

例2　函数$y=\sqrt{1-x^2}$在实数范围内的定义域，即区间$[-1, 1]$是一个集合，每一个满足不等式$-1\leqslant x\leqslant1$的实数x都是它的元素．

像这样含有无限个元素的集合叫做**无限集**．

一个集合常用一个大写字母A、B、C、……来表示；集合的元素一般用小写字母a、b、c、x、y、……来表示．

2.属于　对于一个确定的元素a和一个确定的集合A，它们之间只有以下两种关系：

（1）a是A的元素，记为$a\in A$（或$A\ni a$），读作“元素a属于集合A”，简称为“a属于A”；

（2）a不是A的元素，记为$a\overline{\in}A$（或$a\notin A$），读作“元素a不属于集合A”，简称为“a不属于A”．

---

①　数学概念分为两种：一种是不定义概念（也叫原始概念或基本概念），即不能用其他数学概念来定义它，如数、点、集合等；另一种是可定义概念，即可用其他数学概念来定义它的，如质数、正方形、圆柱、抛物线等。

记号$\in$读做属于，记号$\overline{\in}$（$\notin$）读做不属于，是用来表示元素和集合的关系的符号.

例 3　P是全体偶数组成的集合. 2是P的元素，记为$2\in P$，（“2属于P”）；而3不是P的元素，记为$3\overline{\in}P$，（“3不属于P”）.

因此，集合还可以说成所属关系明确的事物的全体.

二、集合的表示法

集合通常可以用式子或图形来表示，下面我们介绍集合的三种表示法.

1.列举法　把集合中的元素一一列举出来，加上花括号，这种表示集合的方法叫做列举法. 如果集合M是由元素a、b、c、……组成，那么就记为

$$M=\{a、b、c、……\}.$$

例 4　小于7的自然数的集合A，记为

$$A=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

例 5　10! 的质因数的集合G，记为

$$G=\{2,3,5,7\}.$$

例 6　全体自然数组成的集合N，记为

$$N=\{1,2,3,4\cdots\cdots\}.$$

通常我们总用N表示自然数集合.

这种表示法，便于看出这个集合是由哪些元素组成的.

请读者注意，此种表示法只与组成集合的元素有关，而与元素的排列顺序无关. 如例4的集合A，也可以写为

$$A=\{2,4,6,1,3,5\}$$

或

$$A=\{6,5,4,3,2,1\}$$

等形式.

2.描述法　用描述出集合中元素的公共性质来表示集合的方法，叫做**描述法**.

例如，上节的集合A，也可以这样来表示：

$$A=\{x:\ x\text{是小于}7\text{的自然数}\}$$

或

$$A=\{x:\ x<7,x\in N\}.$$

这表明的是：集合A是由这样一些元素x组成，x小于7并且x是自然数.我们用冒号把元素x和x所满足的条件分开.一般地

设$P(x)$是某一个（或一组）与元素x有关的条件，如果集合M是由全体满足这个（这组）条件的元素x所组成，那么就记为

$$M=\{x:\ P(x)\}.$$

有的书也记为

$$M=\{x\,|P(x)\}.$$

或

$$M=\{x\,;P(x)\}.$$

例7　不等式$x\geqslant5$的所有解的集合B(叫做这个不等式的**解集合**)，可记为

$$B=\{x:\ x\geqslant5\}.$$

这里，$P(x)$就是指“$x\geqslant5$”这个与x有关的条件.而上面的集合A中，$P(x)$是指“$x<7,x\in N$”这一组与x有关的条件.

这种表示法，还可以用花括号将说明元素性质的一句话括起来表示，如下例.

例8　全体有理数的集合G，可记为

$$G=\{\text{全体有理数}\}.$$

这种表示法，便于看出集合中元素所具有的共同性质.

以上两种表示法，究竟采用哪一种，要根据具体问题来确定. 比如，某些由无穷多个元素组成的集合不能用排列法表示. 例如，全体实数组成的集合R，用列举法表示不出来，只能用描述法表示为$R=\{$全体实数$\}$或$R=\{x: -\infty<x<+\infty\}$；又如，暂时只知道元素性质的集合也用描述法来表示.

例如，二次方程$x^2-5x+4=0$所有的根组成的集合C，可记为

$$C=\{x: x^2-5x+4=0\}.$$

在没有求出这个方程的根以前，只好这样表示. 求出这个方程的根以后，C也可以用列举法表示为$C=\{1,4\}$.

我们把一个方程（不等式）所有的解（根）组成的集合，叫做这个方程（不等式）的**解集合**.

3.用图形表示集合 为了便于直观，我们常常用平面上的一条封闭曲线所围成的图形来表示一个集合，这就是韦恩（Venn）图. 例如，图1-1就是集合$E=\{a, b, c, d\}$的图形.

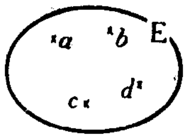

图1-1

值得注意的是，这图形的形状与集合的性质没有任何联系. 这不是几何学的图形，而仅仅是把集合中的元素都包围在内（不是该集合的元素不包括在内）的直观表示. 因此，这种表示法，与封闭曲线的形状无关. 集合E也可以表示成图1-2.

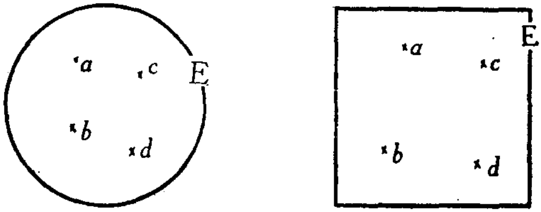

图1-2

三、特殊集合

1.空集　如果集合E不含有任何元素，则称E是空集．空集用记号ϕ表示（有的书也用0来表示）．E是空集，记为$E=\phi$．

例如，设E是教室里学生的集合，如果课间学生们都到院子里去作操，那么教室里学生的集合就是空集．

例9　设F是方程$x^2+1=0$的全体实数解的集合，由于该方程没有实数解，所以这个集合是空集，记为$F=\phi$．

注意：只含有元素0的集合不是空集．因为它含有一个元素0，而不是不含有任何元素．

2.单元素集　只含有一个元素的集合称为单元素集．当集合E是只有一个元素x组成时，记为

$$E=\{x\}.$$

例10　方程$2x+1=0$的解集$A=\{-\frac{1}{2}\}$是单元素集．

注意：单元素集$\{x\}$与元素x不是一个概念，不要混淆．$\{x\}$是以x为元素的集合，而x是集合中的一个元素．

3.参照集　在理论研究和在实际应用中，经常要考虑所

研究集合的范围，这个范围就是研究某些集合的参照集．

任何一个非空集合都可以看做是它本身或它的一部分元素组成的集合的参照集．因此，参照集又可以叫做全集合或满集合，通常用 I （或U）表示．

以哪个集合为参照集，要看所研究的具体问题而定．例如：在正整数范围内研究问题时，常以自然数集合N为参照集；在研究平面上点的集合时，常以整个平面的点集Z作为参照集；在研究三角形的分类时，常以任意三角形的集合作为参照集，等等．

习　　题

1．下列所述是否能组成集合？为什么？

（1）某本书所有的插图；

（2）所有小于等于 9 的自然数；

（3）太阳系里所有的行星；

（4）在给定时间内，房子里所有的人；

（5）平面上所有的圆；

（6）直线上所有的点；

（7）某次数学考试所有80分以上的人；

（8）某次数学考试所有高分数的人；

（9）平面几何的所有难题．

2．说明下面关系式的意义：

（1）$3\in A$；（2）$A\ni 4$；(3)$8\bar{\in}A$．

3．将下列叙述用符号表示：

（1） 5 是集合A的元素；

（2） a属于集合M；

（3） 6 不是集合A的元素；

（4） b不属于集合M.

4.用列举法表示下列集合，并用图形直观表示出来.

（1） 大于5而小于10的整数集合；

（2） 小于20的正奇数集合；

（3） 由1至100的整数中为完全平方数的集合；

（4） 方程$x^2-3x+2=0$的解集合；

（5） 60的约数的集合；

（6） $A=\{x; x\leqslant 3, x\in N\}$；

（7） 1—30间的质数的集合；

（8） 12! 的质因数的集合.

5.用描述法表示下列集合：

（1） $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$；

（2） $\{2,4,6,8,10\}$；

（3） $N=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$；

（4） 函数$y=\lg\sqrt{3-x}$的定义域的集合.

6.设N为自然数集合，P为偶数集合，问此时下列示例中哪些是正确的？哪些不正确？

（1） $2\in N$；

（2） $3\in P$；

（3） 若$n\in N$，则$n\times 2\in P$；

（4） 若$n\in P$，则$n+1\overline{\in} P$.

7.空集、单元素集能否作为参照集？为什么？

第二章　集合的相等与包含

集合之间有各种关系，本章只研究集合的相等和包含两种关系。

一、集合的相等

定义 1　如果集合E的每一个元素都属于集合F，同时集合F的每一个元素都属于集合E，也就是说，集合E和集合F的元素完全相同，我们就说集合E与集合F相等。记为$E=F$。

用式子表示就是：对于一切x，均有

若　　$x\in E$，则　$x\in F$；

并且若　$x\in F$，则　$x\in E$，

那么　　$E=F$。

例 1　集合$A=\{1, 2, 3\}$和集合$B=\{3, 2, 1\}$是相等的，写成$A=B$。

例 2　方程$x^2-3x+2=0$的解集合与集合$\{1, 2\}$是相等的，记为$\{x: x^2-3x+2\}=\{1, 2\}$。

二、集合的包含关系

定义 2　设两个集合E和F，如果F的所有元素都是E的元素，则称F被E包含。记为$F\subseteq E$。读作“F被E包含”或“F包含在E中”。