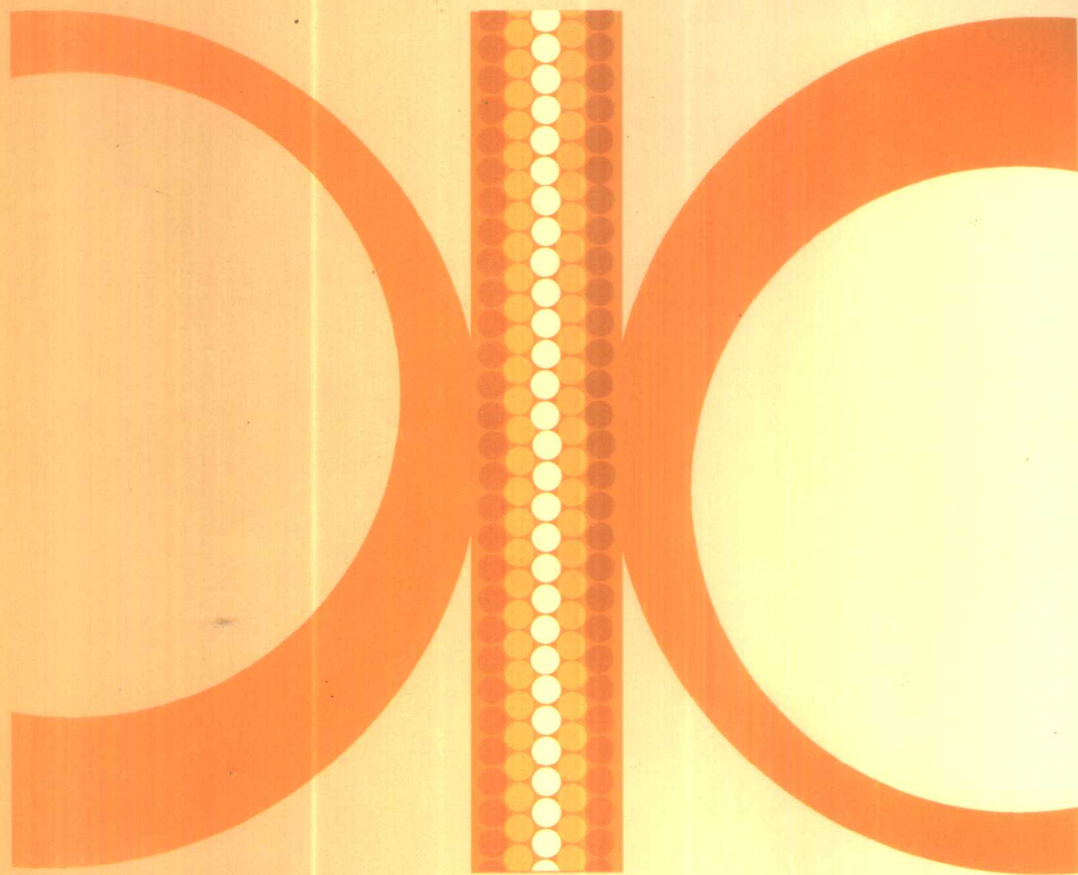


闫宝珠 主编



质量与密度 测量不确定度评定

93
31

中国计量出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

质量与密度测量不确定度评定/闫宝珠主编. —北京: 中国计量出版社, 2002.5
ISBN 7 5026-1631-4

I. 质 · II. 闫 · III. ①质量—计量—不确定度—研究 ②密度—计量—不确定度—研究 IV. TB93

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 030858 号

内 容 提 要

本书主要介绍质量与密度专业测量不确定度的分析计算, 内容详实、具体, 实用性和可操作性强。包括: 质量与密度基本测量方法及其标准不确定度的评定; 砝码、非自动秤、自动衡器和密度测量不确定度的评定与表示。其中详细介绍了标准砝码和密度标准装置的建立过程中测量不确定度的评定; 砝码、非自动秤、自动衡器和密度的检定与校准及其测量不确定度应用的分析计算实例。

本书适合各级计量检定机构和企事业单位从事质量与密度检定、校准、建标考核的技术人员阅读。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话 (010) 64275360

E-mail: jilxb@263.net.cn

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

787 mm × 1092 mm 16 开本 印张 10 字数 230 千字

2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

*

印数 1—5 000 定价: 30.00 元

编 审 委 员 会

主 审 李慎安

主 编 闫宝珠

副主编 唐 煜

编 委 莫 南 曹凤梅 滕怀昌

王均国 陈朝晖

前 言

为了配合 JJF1059—1999《测量不确定度评定与表示》国家计量技术规范（下称“规范”）的贯彻实施，加深对“规范”的理解，并运用规范的原则和方法，详细分析计算质量与密度测量领域中各专业测量的不确定度，全国质量计量技术委员会根据国内有关专业技术人员的要求，组织了青岛市质量技术监督局、中国计量科学研究院、国家青岛衡器测试中心的部分专家，编写了《质量与密度测量不确定度评定》一书。本书旨在使广大质量与密度计量工作者，在计量检定、校准，建立质量、密度计量标准，质量认证及实验室认可等方面，对质量与密度测量不确定度评定与表示的应用有一个全面、系统、一致的认识，在应用过程中达到具体、实用、易于操作的目的。

本书所涉及的内容是质量与密度测量领域中所属专业的测量不确定度的分析计算。包括：质量与密度基本测量方法及其标准不确定度的评定；砝码、非自动秤、自动衡器和密度测量不确定度的评定与表示。其中详细介绍了标准砝码和密度标准装置的建立过程中测量不确定度的评定；砝码、非自动秤、自动衡器和密度的检定与校准及其测量不确定度应用的分析计算实例。这些实例都是按照相应的国家计量检定规程或国际法制计量组织的国际建议进行检定或校准的，并根据“规范”分析计算测量结果的不确定度，内容详细、具体，实用性和可操作性强，特别适合各级计量检定机构和企事业单位从事质量与密度检定、校准、建标考核的技术人员阅读，也可作为从事其他检定业务的科技人员学习理解“规范”的重要参考书。

本书第一章、第二章由莫南同志编写；第三章由唐煜、滕怀昌、王均国、闫宝珠同志编写；第四章由曹凤梅、陈朝晖同志编写，全书由闫宝珠和唐煜同志统稿。特别值得提出的是，“规范”的主要起草人李慎安先生对全书进行了认真的审定，提出了许多中肯的意见，使编者在加深对“规范”的理解上获益匪浅，从而对质量与密度测量不确定度的评定和表示与应用的把握上更趋于完善。本书的编写还得到原国家质量技术监督局计量司量传处的大力支持，在此一并表示感谢。

本书的编写，意在抛砖引玉，如广大质量与密度计量工作者能从中有所借鉴和启发，我们将十分欣慰。更希望读者对书中的缺点、谬误诚恳指出，不吝赐教。

编 者

2002年3月

目 录

第一章 质量的基本测量方法及其标准不确定度	(1)
第一节 直接比较法	(2)
第二节 组合比较法	(11)
第二章 砝码的测量及不确定度的评定	(17)
第一节 国家千克副基准	(17)
一、国家千克基准装置的建立	(18)
二、国家千克副基准的检定/校准	(26)
第二节 E 级砝码的检定/校准	(31)
第三节 F 级砝码的检定/校准	(44)
一、E ₂ 级毫克组标准砝码装置的建立	(44)
二、F 级砝码的检定/校准	(46)
第四节 M 级砝码的检定/校准	(51)
第三章 衡器的测量及不确定度的评定	(54)
第一节 非自动秤	(54)
一、测量不确定度来源和数学模型	(54)
二、各输入量标准不确定度的评定	(57)
第二节 自动衡器	(59)
一、测量不确定度的来源和数学模型	(60)
二、各输入量标准不确定度的评定	(68)
三、评定原则	(70)
第三节 衡器不确定度计算实例	(70)
一、非自动秤	(71)
二、自动衡器	(79)
第四章 密度计量的不确定度评定	(100)
第一节 密度检定/校准的一般模型	(100)
第二节 密度检定/校准不确定度的数学模型	(102)
第三节 密度检定/校准中的不确定度来源	(102)
第四节 不确定度分类	(103)
第五节 副基准酒精计及一、二等标准浮计建标与检定/校准中 的不确定度分析	(104)
一、与测量重复性有关的不确定度 $u(I_d)$	(104)
二、与上级标准有关的不确定度 $u(\Delta\rho_A)$	(105)
三、与毛细修正有关的不确定度 $u(\Delta\rho_c)$	(105)

四、数据修约的不确定度 $u(z)$	(107)
五、液体表面张力变化所导致的不确定度 $u(a_\sigma)$	(107)
六、与上缘读数有关的不确定度 $u(\Delta_{sh})$	(107)
第六节 有关基标准装置建立的不确定度评定与表示	(108)
一、副基准酒精计标准装置	(108)
二、一等酒精计标准装置	(111)
三、一等密度计标准装置	(114)
四、二等密度计标准装置	(117)
五、二等石油密度计标准装置	(119)
六、一等海水密度计标准装置	(122)
第七节 检定/校准中的不确定度评定与表示	(124)
一、副基准酒精计组	(124)
二、一等标准酒精计组	(127)
三、二等标准酒精计组	(129)
四、一等标准密度计组	(131)
五、二等标准密度计组	(135)
六、二等标准石油密度计组	(138)
七、SY-02 型石油密度计	(140)
八、一等标准海水密度计组	(142)
九、一等标准糖量计组	(145)
十、乳汁计	(148)

第一章 质量的基本测量方法 及其标准不确定度

砝码作为质量标准,具有相应准确度的质量值。质量计量最核心的是砝码的质量测量,与质量测量密切相关的又有砝码体积(或密度)的测量,这是因为空气浮力的影响在质量测量中起着十分关键的作用。质量测量有两种主要方法,即直接比较法和组合比较法,所以这里将就直接比较法质量测量、组合比较法质量测量和砝码体积(或密度)测量三种情况,分别讨论其数学模型及标准不确定度评定。

在分析数学模型之前,应澄清到底是分析折算质量还是真空质量或是分别讨论两者的不确定度。折算质量 m_c 和真空质量 m 是砝码质量的两种表示方法,具有确切的数学关系,即:

$$m_c = m \frac{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}{1 - \frac{1.2}{8000}} = \frac{m - \rho_0 \cdot V}{1 - \frac{1.2}{8000}}$$

式中: ρ_0 ——参考空气密度 $= 1.2 \text{ mg/cm}^3$;

ρ ——砝码材料密度;

V ——砝码的体积。

折算质量的不确定度 $u(m_c)$ 和真空质量的不确定度 $u(m)$ 之间的关系可以推导得到:

$$u(m_c) = \frac{1}{1 - \frac{1.2}{8000}} \sqrt{u^2(m) + \rho_0^2 u^2(V) - 2\rho_0 \rho_a u^2(V)}$$

$$\approx \sqrt{u^2(m) + \rho_0^2 u^2(V)}$$

或

$$u(m) \approx \sqrt{u^2(m_c) + \rho_0^2 u^2(V)}$$

这里 $u(V)$ 表示砝码体积 V 的不确定度, ρ_a 表示测量得到砝码质量 m_c 或 m 时的实际空气密度。

所以,只要计算折算质量的不确定度 $u(m_c)$ 和真空质量的不确定度 $u(m)$ 中的任何一个,就可以根据上述公式计算出另一个。为简化处理,可以发现,在分配与砝码体积有关的不确定度时,一般要求其分量小于合成不确定度的三分之一,所以

$$\rho_0 u(V) \leq \frac{1}{3} u(m_c)$$

从而,根据不确定度评定原则,可以忽略这部分不确定度分量。所以

$$u(m) = u(m_c)$$

这就是为什么一般认为折算质量和真空质量的不确定度大小相等的缘故。由于在日常质量计量中折算质量使用得更广泛,特别是与国际接轨后,从 E_1 级及其以下等级的砝码均将使用折算质量。因此,本书将只讨论如何计算折算质量(副基准质量测量使用真空质量)的不确定度,而认为真空质量的不确定度等于折算质量的不确定度。当然,若想根据上式来计算真空质量的不确定度也是可行的。

为简化表示形式,以下出现的质量全部为折算质量,将不再使用下标 c 。

第一节 直接比较法

直接比较法广泛用于 F_1 级砝码及其以下等级砝码的质量测量。这种方法是在天平上,通过直接比较被测砝码的质量 m_t 和参考标准的质量 m_r , 获得它们之间的质量差平均值 $\overline{\Delta m}$, 从而计算得到被测砝码的质量 m_t 。测量公式可表示为

$$\begin{aligned} m_t &= m_r + \overline{\Delta m} \\ &= m_r + \sum_{i=1}^n [\Delta I_i f + (\rho_{ai} - \rho_0)(V_t - V_r)] \end{aligned}$$

式中:下标 i ——对应于第 i 次测量;

m_t ——被测砝码的折算质量;

m_r ——参考砝码的折算质量;

$\overline{\Delta m}$ ——被测砝码和参考砝码之间的折算质量差平均值;

$$\overline{\Delta m} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \sum_{i=1}^n [\Delta I_i f + (\rho_{ai} - \rho_0)(V_t - V_r)];$$

f ——所用天平或比较仪的标尺因子;

ρ_{ai} ——实际空气密度;

V_t ——被测砝码的体积;

V_r ——参考砝码的体积;

$$\rho_0 = 1.2 \text{ mg/cm}^3;$$

ΔI_i ——被测砝码和参考砝码对应的天平示值误差。

根据上述直接测量法质量测量的数学模型,就可以知道如何进行测量结果 m_t 的不确定度评定。首先让我们根据上述数学模型和不确定度分类,来分析要考虑哪些不确定度分量。

从数学模型来看,至少应包括三部分分量,分别来自 m_r 、 $\sum_{i=1}^n [(\rho_{ai} - \rho_0)(V_t - V_r)]$ 和

$\sum_{i=1}^n (I_i f)$ 三项,第一项的不确定度分量对应于参考标准砝码的标准不确定度 $u_{\text{ref}}(m_t)$, 第二项对应于与空气浮力有关的标准不确定度 $u_b(m_t)$, 第三项可认为对应于天平的标准不确定度(这里是指与天平有关的不确定度分量) $u_{\text{ba}}(m_t)$, 这一部分分量又包括与天平的灵敏度、分辨力、偏载、磁性等有关的各不确定度分量。但还有一个综合分量,就是与称量有关的标准不确定度 $u_w(m_t)$, 来自测量重复性。综上所述,一般共有以下 4 个不确定度分量:

①测量重复性引入的标准不确定度 $u_w(m_t)$

②参考砝码引入的标准不确定度 $u_{\text{ref}}(m_t)$

③空气浮力引入的标准不确定度 $u_b(m_t)$

④天平引入的标准不确定度 $u_{ba}(m_t)$

所以, m_{ca} 的合成不确定度可根据下式计算:

$$u(m_t) = \sqrt{u_w^2(m_t) + u_{ref}^2(m_t) + u_b^2(m_t) + u_{ba}^2(m_t)}$$

以下将分别讨论上述四类不确定度的评定方法。

1. 测量重复性引入的标准不确定度 $u_w(m_t)$

测量结果首先体现在质量差的测量, 所以该不确定度分量在任何测量质量差的过程中都存在。衡量过程的标准不确定度可根据在相同测量条件下测得的多个测量结果所对应的数据分布情况计算得到。如果测量了多次, 最终测量结果用其平均值 $\overline{\Delta m}$, 衡量过程的标准不确定度对应于平均质量差, 即

$$u_w(m_t) = u_w(\overline{\Delta m}) = \frac{s(\Delta m_i)}{\sqrt{n}}$$

其中 $s(\Delta m_i)$ 为 Δm_i 的单次测量标准差。由此可知, 这个不确定度分量是根据多个测量结果用统计的方法评定的, 所以, 一般归入 A 类不确定度。 $s(\Delta m_i)$ 的计算要视具体情况而定, 具体可分以下 3 种情况来讨论。

(1) 当测量次数 n 较大(应至少为 5 次),

$$s(\Delta m_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta m_i - \overline{\Delta m})^2}$$

(2) 当测了 J 个系列, 每个系列的单次测量标准差为 $s_j(\Delta m_i)$, 每个系列的测量次数都为 n 次时, 则

$$s(\Delta m_i) = \sqrt{\frac{1}{J} \sum_j s_j^2(\Delta m_i)}$$

(3) 当 $n \leq 2$ 时, 这是目前 E₂ 级及其以下等级砝码检定或校准的典型情况。这时以上几种方法都不适用, 这就需要根据其他的信息来确定, 以下提供 3 种简单可行的方法。

第一种是利用历史的数据, 若曾经针对用同级别同材料的砝码在相同的天平上, 并且在同一实验室内环境条件也类似, 测量方法也一致的情况, 测量过 m 次(m 应大于 10), 可计算出其相应的单次标准差 s_{old} , 这就是根据历史数据得到的标准差, 这时可取 $s(\Delta m_i) = s_{old}$ 。

第二种是利用天平证书中列出的重复性数据 Δ_r 。据此, 可根据下式计算出单次测量的标准差:

$$s(\Delta m_i) = \begin{cases} \frac{\Delta_r}{3} & \text{AB 法} \\ \frac{\Delta_r}{3\sqrt{2}} & \text{ABBA 法} \\ \frac{\Delta_r}{2\sqrt{3}} & \text{ABA 法} \end{cases}$$

第三种是利用天平的质量允差 $\delta(m)$ 。我们知道, 一台合格的天平, 其测量重复性不会超过质量允差 $\delta(m)$, 所以可取

$$s(\Delta m_i) = \begin{cases} \frac{\delta(m)}{3} & \text{AB 法} \\ \frac{\delta(m)}{3\sqrt{2}} & \text{ABBA 法} \\ \frac{\delta(m)}{2\sqrt{3}} & \text{ABA 法} \end{cases}$$

AB 法、ABBA 法、ABA 法在下文有详细叙述。

2. 参考砝码的标准不确定度 $u_{\text{ref}}(m_i)$

如果使用了多个参考砝码, 设其不确定度分别为 $u(m_{ri})$, 如果相关系数不知道, 则认为相关系数为 1, 所以

$$u_{\text{ref}}(m_i) = \sum_i u(m_{ri})$$

若已知任何两个参考标准之间的相关系数, 设 m_{ri} 和 m_{rj} 之间的相关系数表示为 r_{ij} , 则

$$u_{\text{ref}}(m_i) = \sqrt{\sum_i u^2(m_{ri}) + 2 \sum_{i,j, i < j} r_{ij} u(m_{ri}) u(m_{rj})}$$

参考砝码的不确定度应包括两个分量, 一个是参考标准质量值检定、校准或测试时的测量不确定度 $u_0(m_r)$, 另一个是自上一次校准/检定或测试以来参考砝码质量的不稳定性带来的不确定度 $u_{\text{ins}}(m_r)$ 。两个分量的合成, 就得到参考砝码的不确定度:

$$u(m_r) = \sqrt{u_0^2(m_r) + u_{\text{ins}}^2(m_r)}$$

在《E₁, E₂, F₁, F₂, M₁, M₂, M₃ 级砝码》国际建议中, 虽然提到由参考砝码的不稳定性带来的不确定度, 但未提到要按照上式进行合成。

下面根据以下几种具体情况来分析如何计算 $u_0(m_r)$ 。

(1) 如果证书中未给出质量修正值或者只使用砝码的标称质量作为实际质量, 其不确定度可从质量最大允差 $\pm \delta_m$ (见表 1-1) 计算而来, 并按均匀分布处理

$$u(m_i) = \frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

这时, 就不必单独分析上述两项不确定度分量, 可以认为已经考虑了与砝码稳定性有关的不确定度分量。

表 1-1 砝码最大允许误差

标称值	$\pm \delta_m / \text{mg}$						
	E ₁ 级	E ₂ 级	F ₁ 级	F ₂ 级	M ₁ 级	M ₂ 级	M ₃ 级
5000kg			25000	85000	250000	850000	2500000
2000kg			10000	33000	100000	330000	1000000
1000kg		1600	5000	16000	50000	160000	500000
500kg		800	2500	8000	25000	80000	250000
200kg		300	1000	3000	10000	30000	100000
100kg		160	500	1600	5000	16000	50000
50kg	25	80	250	800	2500	8000	25000
20kg	10	30	100	300	1000	3000	10000
10kg	5	16	50	160	500	1600	5000

续表

标称值	$\pm \delta_m/\text{mg}$						
	E ₁ 级	E ₂ 级	F ₁ 级	F ₂ 级	M ₁ 级	M ₂ 级	M ₃ 级
5kg	2.5	8	25	80	250	800	2500
2kg	1.0	3	10	30	100	300	1000
1kg	0.5	1.6	5	16	50	160	500
500g	0.25	0.8	2.5	8	25	80	250
200g	0.10	0.3	1.0	3	10	30	100
100g	0.05	0.16	0.5	1.6	5	16	50
50g	0.03	0.10	0.3	1.0	3	10	30
20g	0.025	0.08	0.25	0.8	2.5	8	25
10g	0.020	0.06	0.20	0.6	2.0	6	20
标称值	$\pm \delta_m/\text{mg}$						
	E ₁ 级	E ₂ 级	F ₁ 级	F ₂ 级	M ₁ 级	M ₂ 级	M ₃ 级
5g	0.016	0.05	0.16	0.5	1.6	5	16
2g	0.012	0.04	0.12	0.4	1.2	4	12
1g	0.010	0.03	0.10	0.3	1.0	3	10
500mg	0.008	0.025	0.08	0.25	0.8	2.5	
200mg	0.006	0.020	0.06	0.20	0.6	2.0	
100mg	0.005	0.016	0.05	0.16	0.5	1.6	
50mg	0.004	0.012	0.04	0.12	0.4		
20mg	0.003	0.010	0.03	0.10	0.3		
10mg	0.003	0.008	0.025	0.08	0.25		
5mg	0.003	0.006	0.020	0.06	0.20		
2mg	0.003	0.006	0.020	0.06	0.20		
1mg	0.003	0.006	0.020	0.06	0.20		

(2) 检定/校准或测试证书中给出了其扩展不确定度 U 和包含因子 k ，这时

$$u_0(m_r) = \frac{U}{k}$$

(3) 若证书中未给出不确定度，可查规程或有关法制文件，我们知道，扩展不确定度($k=2$)不能超过质量最大允差 δ (见表 1-1)的三分之一。所以， $u(m_r)$ 可取为

$$u_0(m_r) = \frac{\delta}{6}$$

对于后两种情况，还需要考虑由参考标准的不稳定性带来的不确定度。在《E₁，E₂，F₁，F₂，M₁，M₂，M₃ 级砝码》国际建议中，未提供具体如何估计由参考标准的不稳定性带来的不确定度。具体如何计算呢？这里根据质量最大允差 $\pm \delta_m$ (见表 1-1)来计算，即

$$u(m_r) = \frac{\delta_m}{3\sqrt{3}}$$

这里有必要说明上式是如何得来的。在国际建议中，可以发现对质量不稳定性的技术要求，可从以下两条分析得到：

①8.1 总论

“……材料的品质应保证砝码在正常使用条件下的质量变化相对于最大允许误差而言是可以忽略不计的”

②11.1 总论

“表面品质应是砝码在正常使用条件下的质量变化相对于最大允许误差而言是可以忽略不计的……”

由此可知, 砝码在正常使用条件下的质量变化 $\pm \epsilon$ 相对于最大允许误差而言是可以忽略不计的, 即不大于最大允许误差 δ_m 的三分之一, 所以

$$\epsilon \leq \frac{\delta_m}{3}$$

显然, ϵ 可以作为评定不确定度的半宽度, 由于很难确定其分布, 故按照均匀分布处理, 就得到上述计算公式。

3. 空气浮力的标准不确定度 $u_b(m_t)$

这一部分不确定度将与空气浮力是否修正、如何修正有关, 具体可分以下两种典型情况:

(1) 未进行空气浮力修正。这种情况适用于低精度砝码质量测量等空气浮力很小以至于可以忽略的情况。虽然在计算质量时可以忽略空气浮力, 但仍应考虑空气浮力对不确定度的贡献。这时可用两种方法来估计:

①根据空气浮力可忽略的条件来估计, 即空气浮力大小 ϵ_b 应不大于扩展不确定度的三分之一时才可以忽略, 即

$$\epsilon_b \leq \frac{U}{3} \leq \frac{\delta_m}{9}$$

δ_m 见表(1-1), 所以可取:

$$u_b(\overline{\Delta m}) = \frac{\delta_m}{9\sqrt{3}}$$

②根据空气浮力的实际大小来计算, 这就需要首先估计空气浮力 ΔC 的实际大小,

$$\epsilon_b = (\rho_{ai} - \rho_0)(V_t - V_r)$$

然后, 不确定度的计算可以是

$$u_b(\overline{\Delta m}) = \frac{\epsilon_b}{\sqrt{3}}$$

(2) 进行空气浮力修正。这一部分不确定度的来源又可细分为空气密度和体积的不确定度贡献, 分别表示为 $u(\rho_a)$ 、 $u(V_t)$ 和 $u(V_r)$ 。直到目前为止, 对于同一组质量测量, 仍然认为所有空气密度的测量不确定度相同, 且完全正相关。虽然这与实际事实有差异, 要进一步处理这一问题, 尚需要建立不确定度的模型, 这里不予讨论。被测砝码和参考砝码的体积不确定度虽然可针对每次测量进行计算, 尤其是在高准确度测量中需要修正砝码的体积膨胀, 但是每次测量的体积只是随温度在作微小的变化, 故其不确定度则可以合理地认为相同且完全正相关。根据不确定度传播定律, 可得到空气浮力的不确定度计算公式:

$$u_b(m_t) = \sqrt{(V_t + V_r)^2 u^2(\rho_a) + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{ai}\right)^2 [u^2(V_t) + u^2(V_r)]}$$

下面针对目前质量计量情况专门讨论如何计算 $u(\rho_a)$ 、 $u(V_t)$ 和 $u(V_r)$:

①空气密度的标准不确定度 $u(\rho_a)$

首先如果空气密度没有测量,而采用了 $1.2\text{mg}/\text{cm}^3$ 或采用当地年平均空气密度,则其合理标准不确定度采用 $0.12/\sqrt{3}\text{mg}/\text{cm}^3$ 是比较适当的。

$$u(\rho_a) = \frac{0.12}{\sqrt{3}} \text{mg}/\text{cm}^3$$

目前我国一般均采用公式法得到空气密度的值,空气密度的不确定度计算公式为

$$u(\rho_a) = \sqrt{u_F^2 + \left[\frac{\partial \rho_a}{\partial p} u(p)\right]^2 + \left[\frac{\partial \rho_a}{\partial T} u(T)\right]^2 + \left[\frac{\partial \rho_a}{\partial h} u(h)\right]^2}$$

式中: u_F ——标准不确定度;

$u(p)$ ——气压 p 的标准不确定度;

$u(T)$ ——气温 T 的标准不确定度;

$u(h)$ ——空气湿度 h 的标准不确定度

公式及其近似公式请参照 OIML R111《 E_1 , E_2 , F_1 , F_2 , M_1 , M_2 , M_2 级砝码》国际建议的附录 E, 则

$$u_F = 10^{-4} \rho_a$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = 10^{-5} \rho_a \text{Pa}^{-1}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial T} = -3.4 \times 10^{-3} \rho_a \text{K}^{-1}$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial h} = -10^{-2} \rho_a$$

②体积的测量不确定度 $u(V_1)$ 和 $u(V_2)$

可分为以下几种情况来分析:

一是证书上给出其体积及其不确定度,只要用扩展不确定度除以包含因子即可。

二是证书上虽然给出了体积,但未给出不确定度,可根据体积测定时所依据的技术文件来确定,例如,在 JJG99—1990《砝码》国家计量检定规程中,已列出砝码体积检定的要求,这样就可查到相应的检定结果作为砝码体积的扩展不确定度。

三是未使用实际的体积值,而是使用砝码材料密度的标称值,这时应找出砝码材料密度的范围,来源主要是砝码制造厂家或进行砝码定型鉴定的计量部门或其他来源。下面列出两个典型情况,情况一是只知道砝码是什么材料组成,可根据表(1-2)列出的密度不确定度导出体积的不确定度,情况二是只知道砝码满足国际建议的要求,这时可根据“砝码所用材料的密度影响的空气密度偏离特定空气密度($1.2\text{mg}/\text{cm}^3$)的 10% 是产生的误差不超过最大允许误差的四分之一”来计算,即可根据表(1-3)的密度界限来计算。密度界限和密度不确定度计算的关系为

$$u(\rho) = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{2\sqrt{3}}$$

密度不确定度 $u(\rho)$ 和体积不确定度 $u(V)$ 的关系为

$$u(V) = \frac{m_0}{\rho^2} u(\rho)$$

式中: m_0 ——砝码标称质量。

表 1-2 常用于制造砝码的合金材料的密度不确定度

合金材料	密度值/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	扩展不确定度/ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ($k=2$)
铂	21400	150
镍银	8600	170
黄铜	8400	170
不锈钢	7950	140
碳钢	7700	200
铁	7800	200
铸铁(白)	7700	400
铸铁(灰)	7100	600
铝	2700	130
JF1 不锈钢	8000	10

表 1-3 砝码的密度界限

标称值	$\rho_{\min}, \rho_{\max}/10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$					
	E ₁ 级	E ₂ 级	F ₁ 级	F ₂ 级	M ₁ 级	M ₂ 级
$\geq 100\text{g}$	7.934…8.067	7.81…8.21	7.39…8.73	6.4…10.7	≥ 4.4	≥ 2.3
50g	7.92…8.08	7.74…8.28	7.27…8.89	6.0…12.0	≥ 4.0	
20g	7.84…8.17	7.50…8.57	6.6…10.0	4.8…24.0	≥ 2.6	
10g	7.74…8.28	7.27…8.89	6.0…12.0	≥ 4.0	≥ 2.0	
5g	7.62…8.42	6.9…9.6	5.3…16.0	≥ 3.0		
2g	7.27…8.89	6.0…12.0	≥ 4.0	≥ 2.0		
1g	6.9…9.6	5.3…16.0	≥ 3.0			
500mg	6.3…10.9	≥ 4.4	≥ 2.2			
200mg	5.3…16.0	≥ 3.0				
100mg	≥ 4.4					
50mg	≥ 3.4					
20mg	≥ 2.3					

4. 天平的标准不确定度 $u_{\text{ba}}(m_t)$

这部分不确定度又有多个分量, 分别与天平的灵敏度、偏载、漂移、分辨率、磁性等不确定度有关。如果砝码磁化率和磁化强度满足相应国际建议的要求, 即由磁性带来的不确定度应小于最大允许误差的 $1/10$, 那么不确定度的分量可以忽略。如果砝码磁化率和磁化强度不满足相应国际建议的要求, 其不确定度很难估计, 幸好这种砝码不允许使用。因此, 这里只考虑与天平的灵敏度、偏载、漂移、分辨率有关的不确定度, 分别表示为 $u_s(m_t)$, $u_E(m_t)$, $u_{\text{drift}}(m_t)$ 、 $u_d(m_t)$ 。合成可得天平的标准不确定度:

$$u_s(m_t) = \sqrt{u_s^2(m_t) + u_E^2(m_t) + u_{\text{drift}}^2(m_t) + u_d^2(m_t)}$$

(1) 灵敏度 $u_s(m_t)$

如果天平事先用砝码 m_s 测量了其灵敏度 s 或标尺因子 f , 而且天平的灵敏度到测量结束

可认为未发生变化,则可根据下式计算

$$u_s(m_1) = u_s(\Delta m) = |\overline{\Delta m}| u_r(f) = |\overline{\Delta m}| \sqrt{\left[\frac{u^2(m_s)}{m_s^2} + \frac{u^2(\Delta I_s)}{\Delta I_s^2} \right]}$$

其中 ΔI_s 为对应于砝码的天平示值变化; $u(\Delta I_s)$ 表示 ΔI_s 的不确定度,其大小可根据天平的重复性 Δ_r 来计算,即

$$u(\Delta I_s) = \frac{\Delta_r}{3}$$

如果灵敏度随时间、温度、加载量不同而不同,则应考虑其相应的不确定度贡献。但这时,一般灵敏度测量就比较频繁。

对于机械天平,应采用上述评定方法。对于电子天平,典型的情况是并不实测灵敏度,而只是用校准砝码或内校砝码对天平进行校准。由于质量差一般非常小,因此,对于 E_2 级及其以下等级砝码的测量,可忽略这项不确定度贡献。对于高精度测量或质量差较大时,这里建议应实测灵敏度,即按照上式处理。

(2) 来自于偏载误差的不确定度 $u_E(m_1)$

对于机械天平,一般忽略此项分量。对于电子天平,则

$$u_E = \frac{l}{R} \frac{\Delta_c}{2\sqrt{3}}$$

其中 Δ_c 为在检定天平中所测试的偏载误差,这可在证书中找到, l 为两次加载砝码时的砝码中心之间距离, R 为天平半径或天平盘中心到天平盘一角的距离。常常难以确定 l/R 的大小,较合理的值可取为 $l/R = 1$ 。

(3) 由于漂移带来的不确定度分量 $u_{\text{drift}}(m_1)$

当采用 ABBA 法(双次替代法)时,该项不确定度分量一般可忽略。但当采用单次替代法(AB 法)时,对于漂移大的天平往往不能忽略。评估这项不确定度需要了解天平的漂移速率,一般天平的漂移接近线性,故在做不确定度评估时,可看作线性漂移;另一方向漂移是时间的函数,时间越长,漂移越大。设漂移随时间变化的速率为 α , 单次测量所需的时间估计为 Δt , 则

$$u_{\text{drift}} = \frac{\alpha \Delta t}{\sqrt{3}}$$

(4) 与分辨力有关的不确定度 $u_d(m_1)$

其大小不仅与实际分度值 d 有关,而且与 ΔI 获得的方法有关。典型 ΔI 获得的方法有 3 种,可形象地称为 AB 法、BAB 法、BAAB 法,3 种方法计算 ΔI 的公式略有不同,根据所使用的衡器是数字指示式还是模拟指示式,又有所不同,这里根据不确定度处理方式的不同,区分为两类:一类是平衡位置式,即每一个读数都对应平衡位置,如电子天平;另一类是非平衡位置式,各读数并不对应平衡位置,只有通过计算才能获得代表平衡位置的读数,如机械天平,往往要读取天平摆针的 3 个或 3 个以上的位置,最后根据公式计算得到平衡位置。为便于讨论不确定度评估,假设同一个(或组)砝码的读数是完全相关的,而不同的砝码则是完全不相关的。并假设这类不确定度服从均匀分布。以下分别对这 6 种典型情况描述如下:

① AB 法——平衡位置式

先把砝码 A 放在衡量仪器上测量,一般分别读两个读数,然后取下砝码 A,放上砝码 B,同样读两个读数。可用表格的形式表示见表 1-4。

表 1-4 AB 法——平衡位置式

	读数 1	读数 2	平衡位置 I_A	示值差 ΔI
A	I_{A1}	I_{A2}	$I_A = \frac{I_{A1} + I_{A2}}{2}$	$\Delta I = I_A - I_B$
B	I_{B1}	I_{B2}	$I_B = \frac{I_{B1} + I_{B2}}{2}$	

$$u_d(m_1) = u_d(\overline{\Delta m}) = \frac{d/2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2}$$

②AB 法——非平衡位置式

这里只讨论读 3 个数的情况,见表 1-5。

表 1-5 AB 法——非平衡位置式

	读数 1	读数 2	读数 2	平衡位置 I_A	示值差 ΔI
A	I_{A1}	I_{A2}	I_{A3}	$I_A = \frac{I_{A1} + 2I_{A2} + I_{A3}}{4}$	$\Delta I = I_A - I_B$
B	I_{B1}	I_{B2}	I_{B3}	$I_B = \frac{I_{B1} + 2I_{B2} + I_{B3}}{4}$	

$$u_d(m_1) = u_d(\overline{\Delta m}) = \frac{d}{4}$$

③BAB 法——平衡位置式

表 1-6 BAB 法——平衡位置式

	读数 1	读数 2	平衡位置 I_A	示值差 ΔI
B	I_{B11}	I_{B12}	$I_{B1} = \frac{I_{B11} + I_{B12}}{2}$	$\Delta I = \frac{2I_A - I_{B1} - I_{B2}}{2}$
A	I_{A1}	I_{A2}	$I_A = \frac{I_{A1} + I_{A2}}{2}$	
B	I_{B21}	I_{B22}	$I_{B2} = \frac{I_{B21} + I_{B22}}{2}$	

$$u_d(m_1) = u_d(\overline{\Delta m}) = \frac{d/2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2}$$

④BAB 法——非平衡位置式

表 1-7 BAB 法——非平衡位置式

	读数 1	读数 2	读数 2	平衡位置 I_A	示值差 ΔI
B	I_{B11}	I_{B12}	I_{B13}	$I_{B1} = \frac{I_{B11} + 2I_{B12} + I_{B13}}{4}$	$\Delta I = \frac{2I_A - I_{B1} - I_{B2}}{2}$
A	I_{A1}	I_{A2}	I_{A3}	$I_A = \frac{I_{A1} + 2I_{A2} + I_{A3}}{4}$	
B	I_{B21}	I_{B22}	I_{B23}	$I_{B2} = \frac{I_{B21} + 2I_{B22} + I_{B23}}{4}$	

$$u_d(m_1) = u_d(\overline{\Delta m}) = \frac{d}{4}$$

⑤BAAB 法——平衡位置式

表 1-8 BAAB 法——平衡位置式

	读数 1	读数 2	平衡位置 I_A	示值差 ΔI
B	I_{B11}	I_{B12}	$I_{B1} = \frac{I_{B11} + I_{B12}}{2}$	$\Delta I = \frac{I_{A1} + I_{A2} - I_{B1} - I_{B2}}{2}$
A	I_{A11}	I_{A12}	$I_{A1} = \frac{I_{A11} + I_{A12}}{2}$	
A	I_{A21}	I_{A22}	$I_{A2} = \frac{I_{A21} + I_{A22}}{2}$	
B	I_{B21}	I_{B22}	$I_{B2} = \frac{I_{B21} + I_{B22}}{2}$	

$$u_d(m_i) = u_d(\overline{\Delta m}) = \frac{d/2}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2}$$

⑥BAAB 法——非平衡位置式

表 1-9 BAAB 法——非平衡位置式

	读数 1	读数 2	读数 2	平衡位置 I_A	示值差 ΔI
B	I_{B11}	I_{B12}	I_{B13}	$I_{B1} = \frac{I_{B11} + 2I_{B12} + I_{B13}}{4}$	$\Delta I = \frac{2I_{A1} - I_{B1} - I_{B2}}{2}$
A	I_{A11}	I_{A12}	I_{A13}	$I_{A1} = \frac{I_{A11} + 2I_{A12} + I_{A13}}{4}$	
A	I_{A21}	I_{A22}	I_{A23}	$I_{A2} = \frac{I_{A21} + 2I_{A22} + I_{A23}}{4}$	
B	I_{B21}	I_{B22}	I_{B23}	$I_{B2} = \frac{I_{B21} + 2I_{B22} + I_{B23}}{4}$	

$$u_d(m_i) = u_d(\overline{\Delta m}) = \frac{d}{4}$$

第二节 组合比较法

组合比较法又称为细分衡量法。组合比较法测量是多个直接比较法测量的组合，广泛用于高准确度等级砝码质量测量中，其原因主要有两个，一是直接比较法要求使用与被测砝码相同标称值的更高准确度等级的参考标准，这往往造成困难，准确度等级越高，难度越大。若使用组合比较法，则允许只使用一个参考标准，就可以测量一组砝码；二是组合比较法允许有多余测量，正是这种多余测量，使得结果具有更高的可信性，测量准确度能有效得到提高，但实际上在日常检定/校准中，很少使用多余测量，自然是为了减少工作量。这里通过介绍典型的组合比较法、建立一般性的数学模型，来介绍如何进行不确定度评定。

1. 典型的组合比较法

典型的组合比较法有 3 种，分别用于公斤组 5221 砝码、克组 5221 砝码、毫克组 5221 砝码的检定/校准。

(1) 公斤组(5221)砝码(1~20kg)

被测砝码标称质量为 1kg, 2kg, 2.5kg, 5kg, 10kg 和 20kg，其质量分别表示为 [1], [2], [2.5], [5], [10] 和 [20]。作为参考标准的砝码表示为 [R]。组合比较方式见表 1-10，第一栏所列组合砝码与第二栏所列组合砝码进行比较测量，所得质量差列于第三栏，各衡量方程式列于第四栏。