结构抗震译文集

E. C. 索罗金等著

科学出版社

結构抗震译文集

E. C. 索罗金等著

陈府祥等譯

科学出版社

1965

內 容 簡 介

本文集共包括六篇有关结构抗震的论文，內容包括结构振动中材料非弹性阻尼计算方法的理论探讨，地震荷载及风荷载对结构物影响的概率方法，以及竖向地震作用，地震区砖石结构的设计和抗震结构适用的轻质材料的研究等.

結构抗震譯文集

[苏联]E.C.索罗金等著

陈 府 祥 等 譯

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳門内大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1965 年 3 月第一次印刷 印张：4 7/16

印数：0001—3,500 字数：116,000

統一书号：15031·179

本社书号：3211·15—10

定价：[科七] 0.75 元

目　　录

結构振动計算中材料非弹性阻尼的計算方法

E. C. 索罗金著

序　言

在結构振动时，結构从外界获得的能，有一部分为結构材料的非弹性(不可恢复的)变形所消耗而变成热能.

在一般容許应力极限內的加荷和卸荷循环过程中，材料所具有的以热能形式吸收和散发部分变形能的性能，如众所知，乃是結构动力工作中的极其重要的因素. 由于弹性能在每次变形循环中的减少，結构物的固有振动，甚至在外界阻尼很小的情况下，也会很快地衰減，而在周期荷載作用下发生共振时的強迫振动，則具有一定的有限的极限.

在非弹性固体中吸收振动能的物理本性，还很少研究. 大多数的現代物理学家将这一現象与材料顆粒的局部塑性变形联系起来，此种变形由于材料結构的不均匀，甚至在不大的应力条件下亦可产生. 但是，在不同結构的材料中(金属、木材、混凝土)，显然，这种塑性变形的机械作用（механизм）在本质上是各式各样的，为了說明在金属中的这种机械作用，可以运用一系列的、以精細的物理試驗为根据的假說，对于象木材或混凝土这样的結构較复杂的材料，其塑性变形的机械作用几乎沒有研究过. 在我們看来，对于固体材料具有吸收能量的机械作用，还不能作出有力的物理解释时，就不可能把它看作是我們在計算时，試图根据經驗所观測到的外表現象来考虑振动能量发散的一种障碍.

在我們的技术文献中用以表示材料在不可复原的(非弹性)变形时消耗部分振动能的性能，使用这样一些术語："內阻尼"、"內

摩擦"、"內衰减"、"韌性"、"弹性滞后". 我們認为，为了区别非弹性力和一般的弹性力，最正确的术語是"非弹性阻尼"，因为它比第一术語更为明确.

材料中部分变形能轉变为热能的現象，一般称为"能的吸收"或"能的扩散". 我們下面将采用第一个术語，因为这里指的是，振动能的吸收是由于材料的性能所致而不是外阻尼的作用[1]. 有的地方需要強調此一区别时，我們将应用"振动能的內吸收"或簡称为"內吸收"的术語.

在結构动力計算中，对振动能的內吸收的正确計算，乃是現代結构动力学的重要問題. 如果这一問題不能得到很好的解决，当需要估計結构在变荷載作用下发生共振时所产生的动荷应力或位移时，結构动荷載的計算方法就不可靠.

同样地，在制定降低振动的措施时，包括对于結构在动力荷載作用下隔振体的起动共振（пусковой резонанс）計算，正确地考虑內吸收，也具有很重要的意义.

但是，沒有根据認为这个問題已經有了充分的說明. 为了証实这一点，可以指出，在应用振动理論的一些著作中，已有好几种不同的关于內吸收的工作机理假說（рабогий гипотез）；至于其中那一假說最恰当，尙无統一意見，此外，在絕大多数的著作中，到目前为止，采用最多的是其中依据最少的假說——弗赫特假說（гиро-теза Фохта），此假說較簡单而受欢迎.

本文从現有假說是否与試驗相符合的观点出发，对已有的假說作了分析，并且論述了著者所提出的內吸收的工作机理假說，此一假說足够可靠，并且在应用时也比較簡单.

在依据中举出了經过很多次試驗后而积累起来的实际資料，这些試驗主要是在中央工业建筑科学研究所动力学試驗室中专門进行的. 应該強調說明，在本文的課題中，沒有列举这种或那种建筑材料和結构吸收系数的数字. 这些系数的平均試驗数值，对于

1) 我们对外阻尼的理解是这样的：如结构中支承部分的摩擦、气体的动力阻尼等.

主要材料和某些形式的結构可以从有关文献[1]、[16]、[17]中找到.

第一节 內吸收的工作机理假說

这里我們将研究非常具体的內吸收假說，这些假說可以直接用于解决应用振动理論問題. 这样的假說我們称之为工作机理假說.

这里所要研究的假說是考慮到材料中的非弹性阻尼的假說. 非弹性阻尼在容許应力范围內的动力变形过程中有着决定性的意义. 它表現为：一、在周期荷載下的"应力一应变"图成一滞后迴綫；二、固有振动的衰減；三、共振振动时振幅的稳定. 因此，这里我們将不討論考慮材料其他非弹性性能的假說，这些性能在容許应力范围內的静力变形(緩慢的)过程中具有重要意义. 此处非弹性性能包括后效、松弛，或两者均有(見 A. Ю. 依斯林斯基的著作[2]及 A. P. 尔然尼采的著作[3]). 就是在这一基础上，我們来研究适用于由振动轉为塑性变形的情況的假說[4]. 同时，这里沒有談到用来考慮液态粘滞介质中振动能的吸收的假說，譬如 A. E. 德索夫[5]的关于在未凝混凝土中振动的假說. 最后，对于具有比較一般性的假說，我們也沒有考慮，例如薄克假說[19]，此假說适用于单自由度体系的諧和強迫振动.

在本文中所研究的假說里，同时也包括我們所提出的假說. 因此，在叙述这些假說以前，我們簡单地介紹一下本文所提出的假說的一些概念.

一、本文所提出的假說

不管建筑材料的物理力学性能如何不同，然而在試驗中发現了与振动能內吸收性能有关的某些共同規律. 这些共同規律表現在以下几个方面：

1. 对不同材料的試件的試驗証明，在不同应力状态下(拉伸一压縮、弯曲、扭轉)，在容許应力范围內，外力 P (力、力矩)和总变

形 y（位移、旋轉角）之关系或应力 σ（法向应力、剪应力）和相对变形 ε（伸长，剪移）之間的关系，严格說起来，在加荷和減荷中是非綫性的和不相同的．在加荷和減荷的循环过程中，当改变次数已达到足够数量以后，对于一个完整的荷載变化过程，这种关系用一种称为滞后迴綫的封閉曲綫表示（图 1）．

2. 滞后迴綫的形状象一个很狹窄的橢圓．在与变形軸垂直的方向切断迴綫的綫段，等于非弹性阻尼力的二倍（$2R$，見图 1. a）．

从迴綫的图形可以看出，最大非弹性阻尼力在迴綫的中心，即变形为 $\dfrac{y_{max}+y_{min}}{2}$ 处，非弹性阻尼力的零值則在迴綫之两端，即变形为 y_{max} 和 y_{min} 处．

3. 試件材料在一个完整的变形循环中的吸收功和扩散成热能的功，可按一定的比例，用迴綫面积来測定．这种功（ΔW）与相应于变形振幅二倍，$2y_0$ 的弹性功（W_0）之比值，近似地确定了这一完整变形循环中不可恢复（塑性）变形所消耗的全部能量中的部分能量：

$$\Delta = \frac{\Delta W}{W_0}.$$

在技术文献中，一般不用 Δ 值而用四倍于它的值：

$$\psi = 4\Delta = \frac{\Delta W}{W}. \tag{1.1}$$

式中：W——相应于变形振幅 $y_0 = \dfrac{y_{max}-y_{min}}{2}$ 的弹性能（見图 1，б）．ψ 值可称之为振动能的吸收系数．

4. 滞后迴綫的面积与循环的延續时間无关，它的变动范围很大——从慢循环（几分鐘）到快速循环（几千分之一秒）．所以，在建筑中一般频率的內吸收与变形速度无关：

$$\Delta W(\dot{y}) = \text{常数}; \qquad \psi(\dot{y}) = \text{常数}. \tag{1.2}$$

5. 对于所給材料及应力状态的类型，系数 ψ 可以看作与試件尺寸和形状无关的系数．对于主要建筑材料，系数 ψ 可以近似地看作与应力状态的強度也是无关的系数：

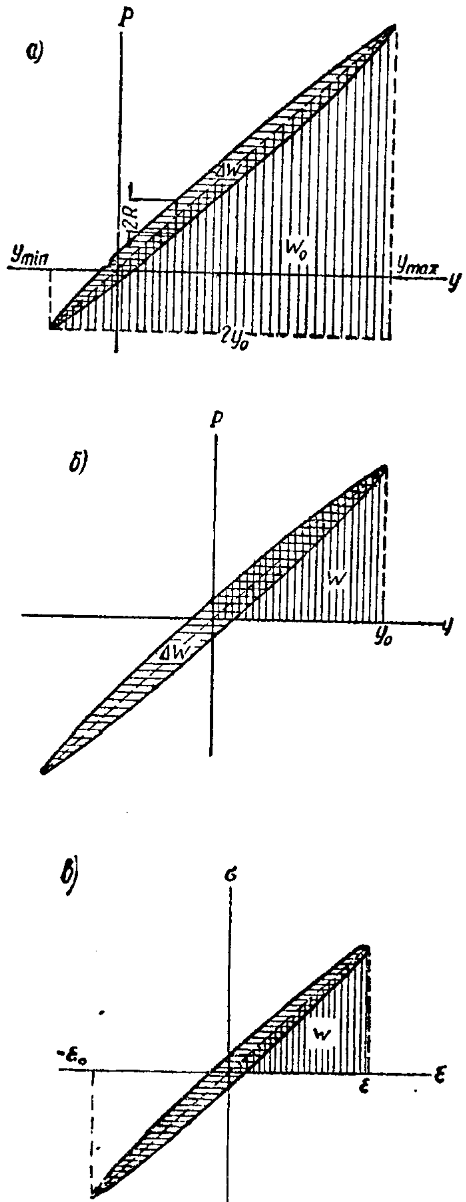

图1　滞 后 迴 线

$$\psi(\sigma) \approx 常数.$$

6. 这些結論同时也为用来研究不同材料試件有衰減的自由振动的試驗結果所証实. 衰減的对数遞減量 δ 实际上与振动频率无关,而且在应力变化的很大范围內它的变化很小. 同时,在 ψ 和 δ 之間存在着一种簡单的近似关系式:

$$\psi \approx 2\delta. \tag{1.3}$$

这些試驗前提已作为建立本文所提出的內吸收假說的依据.

首先应該指明,在研究材料內吸收的試驗中,載荷随时間而循环改变的特性通常是諧和的或接近于諧和的. 因此,很自然,在提出假說时,是以考虑諧和类型的循环过程为依据的.

諧和振动时在"应力—相对应变"图中滞后迴綫的方程式, 我們考虑到試驗結果,建議采用如下形式[1]:

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{\psi}{2\pi} E\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0^2}}. \tag{1.4}$$

式中: σ——变化的应力;

ε——变化的相对应变;

ε_0——变化的相对应变之振幅;

E——材料之弹性模量;

ψ——与吸收系数相等的材料常量.

应該注意: 根号的两个符号正号表示滞后迴綫的上升支綫, 負号表示下降支綫.

不难检驗,关系式(1.4)是符合于上述試驗結果的.

事实上(1.4)式是非綫性的, 具有两种符号, 并且确定了滞后迴綫应为椭圓形. 对于整个試件,在所給应力状态下,无論是均匀的(压縮—拉伸)或不均匀的(扭轉,弯曲),根据上述关系式来計算 $\frac{\Delta W}{W}$ 这一比值, 就可直接导得(1.1)式的比值. 这点說明 (1.4)式中的参数 ψ, 实际上与吸收系数相符合, 因此,它与試件的形式和

---

1) 推导过程见原书著者的另一著作[6].

尺寸无关，但却說明了上述材料的弹性性能．其次，因为(1.4)式中沒有包括变形速度，所以能的吸收与变形速度也是无关的．

应該指出，(1.1)关系式对于“应力—相对应变”图(見图 1. в)也是正确的．实际上，从(1.4)方程式中計算迴綫面积 ΔW 时，我們得出:

$$\Delta W=\int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0}\sigma_1 d\varepsilon-\int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0}\sigma_2 d\varepsilon=$$

$$=\frac{\psi}{\pi}E\varepsilon_0\int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0}\left[\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}\right]d\varepsilon=\frac{\psi}{2}E\varepsilon_0^2,$$

式中 σ_1 和 σ_2 分别为迴綫的上升支綫和下降支綫；因为 $W=\frac{E\varepsilon_0^2}{2}$，那么得出:

$$\frac{\Delta W}{W}=\psi.$$

由此可以看出，当 ψ 为常数时，相应于試件不同点上变形的滞后迴綫是相似的．

(1.4)式中包含的吸收函数

$$f(\varepsilon)=E\frac{\psi}{2\pi}\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}},\tag{1.5}$$

从为了很好地說明試驗滞后迴綫的观点出发，当然并不是唯一可能的函数．由于迴綫支綫的曲率很小，所以該迴綫可用抛物綫弧，双曲綫或其他曲綫来近似地計算．但是，(1.5)式中的函数在这样一种意义上是唯一的函数：即(1.4)式中右边部分在諧和振动过程中可能是直綫形的．

假設变形是按下列規律变化的:

$$\varepsilon=\varepsilon_0\sin[\varphi(t)+\mu],\tag{1.6}$$

式中 $\varphi(t)$——时間連續单調函数，而 μ 是常数．(1.6)式的規律明显地說明了，振动是諧和型的，但却是变頻率的振动．将(1.6)式代入(1.4)式，则:

$$\sigma=E\varepsilon_0\sin[\varphi(t)+\mu]+\frac{\varphi}{2\pi}E\varepsilon_0\cos[\varphi(t)+\mu].\tag{1.7}$$

容易看出，在(1.7)式中保留有象(1.4)关系式中的两項数值，即第二項的两个数值符合于第一項的任一数值. 从(1.6)中可得出:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}=\varepsilon_0 \cos[\varphi(t)+\mu];$$

由此,(1.7)式可改写成:

$$\sigma=E\varepsilon+\frac{\psi}{2\pi}E\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}, \tag{1.8}$$

(1.8)式在变頻率振动的情况下,是(1.4)式的綫性方程. (1.8)式可写成另一形式:

$$\sigma=E\varepsilon+\frac{\psi}{2\pi}E\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varphi}}, \tag{1.8'}$$

式中 $\dot{\varepsilon}=\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$——变形速度，而 $\dot{\varphi}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}$——循环速度（循环頻率）. 在諧和运动的情况下（$\varphi=\omega t$; $\dot{\varphi}=\omega$），我們可得到稳定強迫諧和振动的簿克假說[19]:

$$\sigma=E\varepsilon+\frac{\psi}{2\pi\omega}E\dot{\varepsilon},$$

式中 ω——干扰力的不变頻率. 最后，如果将方程式(1.6)所确定的振动过程写成复数形式，則可以給予(1.8)式第三种形式:

$$\varepsilon=\varepsilon_0 e^{i[\varphi(t)+\mu]}, \tag{1.9}$$

将(1.9)式代入(1.8)式可得:

$$\sigma=E\varepsilon+i\frac{\psi}{2\pi}E\varepsilon. \tag{1.10}$$

应該指出：对于随时間而变化的变形規律(1.6)或(1.9)来說，关系式(1.4)、(1.8)和(1.10)，仅是同一物理假說的各种不同的数学方程式. 这就是說，在和諧振动的問題中,采用这些关系式中的任一式,都可得到相同的結果.

現在产生了这样两个問題：这些关系式是否能适用于复杂的周期变形过程？在一般情况下，这些关系式是否是同一种假說？从理論假設来看,如果考虑內吸收时,力作用的迭加原理是正确的

話，那么这些关系式就可适用于任何一种周期运动．关于第二个問題的試驗資料是沒有的．但是当注意到非弹性阻尼力小于弹性力时，可以認为，力作用的迭加原理至少是近似的．我們認为，这个原理在这里是可适用的．

假設在一定时間內，变形 ε 按照复杂的周期規律变化，并假設它为諧和分量 ε_{κ} 的总和，則永远是

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_{\kappa}, \tag{1.11}$$

式中

$$\varepsilon_{\kappa} = \varepsilon_{0\kappa} \sin\left[\varphi_{\kappa}(t) + \mu_{\kappa}\right], \tag{1.12}$$

或

$$\varepsilon_{\kappa} = \varepsilon_{0\kappa} e^{i[\varphi_{\kappa}(t)+\mu_{\kappa}]}. \tag{1.12'}$$

所有三个关系式对每个諧和分量都是正确的：

$$\sigma_{\kappa} = E\varepsilon_{\kappa} + \frac{\psi}{2\pi} E\varepsilon_{0\kappa}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{\kappa}^2}{\varepsilon_{0\kappa}^2}};$$

$$\sigma_{\kappa} = E\varepsilon_{\kappa} + \frac{\psi}{2\pi} E\frac{\partial\varepsilon_{\kappa}}{\partial\varphi_{\kappa}};$$

$$\sigma_{\kappa} = E\varepsilon_{\kappa} + i\frac{\psi}{2\pi} E\varepsilon_{\kappa}.$$

根据力作用的迭加原理，总应力等于各分量之和

$$\sigma = \sum \sigma_{\kappa}. \tag{1.13}$$

将上述方程式依次代入(1.3)式，并注意(1.11)式，可得：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma &= E\varepsilon + \frac{\psi}{2\pi} E\sum \varepsilon_{0\kappa}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_{\kappa}^2}{\varepsilon_{0\kappa}^2}};\\
\sigma &= E\varepsilon + \frac{\psi}{2\pi} E\sum \frac{\partial\varepsilon_{\kappa}}{\partial\varphi_{\kappa}};\\
\sigma &= E\varepsilon + i\frac{\psi}{2\pi} E\varepsilon.
\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

不难証明，这些关系式，可以由一个演变为另一个：把(1.12)中的 ε_{κ} 式代入第一关系式后，就得到第二关系式，把(1.12′)式中的式子代入第二关系式后，就得第三关系式，这样，(1.14)式中的每个关系式，对任何周期变形过程都表示了同一假說．

但是，将假說写成复数形式，比其他两种具有本质的优越性：

它是綫性的，同时沒有明显地包括变形振幅 ε_0 和与时間有关的参数 φ；因此，对于任何周期运动都是不变的。

可以进一步将它簡化：

$$\sigma=\left(1+i\frac{\psi}{2\pi}\right)E\varepsilon. \tag{1.10}$$

本文所提出的假說的方便形式，我們今后还将采用。

二、工作机理假說的綜合

在介紹我們所知道的工作机理假說以前，我們提出下列几点意見：

第一个意見　这些假設中的大多数的原有形式是这样的：

$$R=\mu f(y),\qquad \text{当 } y>0;$$

$$R=-\mu f(y),\qquad \text{当 } y<0,$$

式中：$R(t)$——非弹性阻尼力（应力）；

$y(t)$——位移（变形）；

$f(y)$——某一函数；

μ——不变系数；

$\dot{y}=\dfrac{\partial y}{\partial t}$——位移（变形）速度。

为了減少书写，我們采用这样的形式：

$$R=\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}\,\mu f(y),$$

式中：$|\dot{y}|$——速度的絕对值，很明显：

$$\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}=+1,\qquad \text{当 } y>0;$$

$$\frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}=-1,\qquad \text{当 } \dot{y}<0.$$

第二个意見　所有的假說，我們将写成既包括弹性力（应力），又包括非弹性阻尼力（应力）的总內力（应力）．这样，如果 $S(t)$ 是弹性力，$S^*(t)$ 是力之总和，那么假說可写成一般的形式：

$$S^*=S+R.$$

第三个意見　如果每个假說都用著者所給予的原有写法，那么，所有的假說都是用各种不同的参数(綫位移或角位移，相对綫变形或相对角变形)写成的，因此，对于不同自由度的体系所写出的式子也不同．所以，为了便于假說的比較，我們将把它們写成同一参数——相对綫变形的函数，从这一函数变为任一参数和任意自由度的体系并不是困难的．另外，改变著者原来所采用的符号也是必要的．

下面按年代的先后举出八个假說：

$$
\left.
\begin{array}{l}
1.\ \sigma^* = E\varepsilon + \bar{x}\dot{\varepsilon},\ \text{В. 弗赫特[7], 1890 年,} \\[2ex]
2.\ \sigma^* = E\varepsilon + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\bar{\alpha}\dot{\varepsilon}^{\nu},\ \text{Е. Б. 龙茨[8]1), 1938 年,} \\[2ex]
3.\ \sigma^* = E\varepsilon + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\bar{\mu}\varepsilon,\ \text{И. Л. 考尔欽斯基[9], 1938 年,} \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
4.\ \sigma^* = E\varepsilon + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\dfrac{\bar{\mu}}{2}\varepsilon_0 \\[2ex]
4a.\ \sigma^* = E\varepsilon + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\bar{\mu}\varepsilon_0\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)
\end{array}\right\}\text{假說 3 的另一形式,} \\[2ex]
5.\ \sigma^* = E\varepsilon + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\bar{\eta}\varepsilon_0^{\nu}\left[2^{\nu-1} - \left(1 + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\nu}\right]\ \text{Н. Н. 达} \\
\qquad\text{維堅科夫[7], 1938 年,} \\[2ex]
6.\ \sigma^* = E\varepsilon + \dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\bar{\gamma}\varepsilon_0\left[1 - \left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right],\ \text{Д. Ю. 巴罗夫[10],} \\
\qquad\text{1940 年,} \\[2ex]
7.\ \sigma^* = \left(1 + i\dfrac{\psi}{2\pi}\right)E\varepsilon.\ \text{本文所提出的}
\end{array}
\right\}\quad (\mathrm{I})
$$

在这些假說中，$\bar{x}$, $\bar{\alpha}$, ν, $\bar{\mu}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\gamma}$, ψ, 都是表示材料內吸收的材料常数．用 $\varepsilon(t)$ 表示相对变形的振幅，$\dot{\varepsilon}$ 表示变形速度，i 表示单位虛数．

对假說的分析，在以后的几节里已有論述．这里我們只談談它們的一般特性，并列举便于解算各种不同問題的算式．

---

1) 假说的著者用位移写出了他的假说．应该指出，由于假说的非线性性质，应注意式 2 中写出的那些参数．下面我们回到著者所提出的假说．

假說 1 中認为，內吸收是由与变形速度成正比的力所引起的．这个假說在动力学問題中所导出的結果，我們准备在下面特别詳細地研究，因为到目前为止，在理論和实际中被广泛地采用．現在我們只提出这样一个意見：弗赫特假說与試驗是矛盾的．

假說 2 是其作者根据对鋼筋扭轉振动研究所进行的試驗而提出来的．这里所采用的非弹性阻尼力是与变形速度 ν 次方成正比的，指数 ν 决定于材料．对各种型号的鋼材，作者給出了平均值 $\nu = 2.17$，黃銅和青銅的 $\nu = 1.54$，鋁的 $\nu = 1.37$．但是假說本身幷不是从这些試驗結果中得出来的．

假設 3 是依据多次試驗的結果而得出的．这里認为，非弹性尼阻力不是取决于变形速度、而是取决于变形本身．作为第一次近似，将非弹性阻尼力看成与变形的一次方成正比[1]．

假說 4 和 4a 保留了假說 3 的基本概念，幷想更正确地表示滞后迴綫的試驗形式．

假說 5 和 6 中包括变形的非綫性函数，它們很好地表現了滞后迴綫的試驗形式．

假說 2、3、4、4a、5 和 6，在解动力学問題时带来了很大的复杂性，或者甚至是原則上的困难．所以在制訂假說 7 时提出了这样的目的：要能得到一个足够可靠的而且使用方便的工作机理假說．

假說 (I) 給出了应力和 σ^* 的表达式．在解結构动力学問題时，一般要求知道与外力平衡的內力和 S^* 的表达式．实际上，任何体系的振动方程式的一般形式，都可以写成：

$$S^* = I + F,$$

式中，S^*——內力和（弹性和非弹性的）；

I——慣性力；

F——外力．

应該強調指出，无論在这里或在以后的所有的文章中，对于

---

1) 假说的作者在他以后的著作中并没有采用它．

力，应該理解为广义力，它的因次，可以是不同的（公斤-厘米，公斤，公斤/厘米，公斤/平方厘米）.

从应力 σ^* 变为內力 S^* 时，可采用普通材料力学的方法，計算后卽得[1]:

$$
\left.\begin{aligned}
&1.\quad S^* = S + \kappa^* \dot{S};\\
&2.\quad S^* = S + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\alpha^* \dot{S}^{\nu};\\
&3.\quad S^* = S + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\mu^* S;\\
&4.\quad S^* = S + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\frac{\mu^*}{2} S_0;\\
&4a.\ S^* = S + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\mu^* S_0\left(1 - \frac{S}{S_0}\right);\\
&5.\quad S^* = S + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\eta^* S_0^{\nu}\left[2^{\nu-1} - \left(1 + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\frac{S}{S_0}\right)^{\nu}\right];\\
&6.\quad S^* = S + \frac{\dot{S}}{|\dot{S}|}\gamma^* S_0\left[1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^2\right];\\
&7.\quad S^* = \left(1 + i\frac{\psi}{2\pi}\right)S,
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(II)}
$$

这里 $S^*(t)$ 和 $S(t)$——分别为合力与弹性力；

$S = \frac{\partial S}{\partial t}$——力 $S(t)$ 变化的速度；

S_0——力 $S(t)$ 的振幅；

κ^*, α^*, μ^*, η^* 和 γ^*——新常数.

力之和 S^* 系通过（II）式中的各关系用恢复力（弹性力）S 来表示. 对于各种弹性体系和各种应力状态的力 S，皆用弹性理論的方法来确定.

例如：若在一理想的弹性体系上，作用有一集中外力 P，那么与其平衡的恢复力，正为大家所知，应該是：

$$S = ky, \qquad (1.15)$$

1) 下面列出的假说 2 和 5，不是从(1)式中相应的假说得出来的，而是用 S 代替 e 得出来的. 这样做的理由是为了保留该作者所给予的位移假说.