

大學用書

非線型自動控制

全一冊

編譯者 馬雲龍

著作人 國立編譯館

補助機關 國家科學委員會

復興書局印行

大學用書

非線型自動控制

全 一 冊

編譯者 馬 雲 龍
著作人 國立編譯館
補助機關 國家科學委員會

復興書局印行

版 權 所 有

中華民國六十六年十月初版

非 線 型 自 動 控 制

全一冊 新臺幣九十元

編 譯 者 馬 雲 龍

著 作 人 國 立 編 譯 館

補助機關 國 家 科 學 委 員 會

印 行 者 復 興 書 局

地址：臺北市懷寧街四十四號

電話：3716911 3315012

本書局登記證字號：行政院新

聞局局版臺業字第〇八一八號

發 行 人 沈 亦 珍

地址：臺北市懷寧街四十四號

(1623臺盛賢)

編輯要旨

- 一、本書係供大學四年級和碩士班研究所教材及參考之用。
- 二、本書專供控制學系、計算機、系統工程以及電機系有關的大學部和研究所教材之用。
- 三、本書提示非線型系統之構成以及研究方法。
- 四、本書第二章刊出解答非線型系統的數學分析法及數值方法。
- 五、本書第三章刊出位相平面法。
- 六、本書第四章刊出利用位相平面法做非線型系統之分析。
- 七、本書第五章刊出圖析函數法。
- 八、本書第六章刊出常用的電驛伺服系統。
- 九、本書各章之後附有習題，以供練習作業之用。
- 十、本書具有一貫性，內容的分析和解釋皆甚詳細，易於理解。
- 十一、本書所用名詞，悉以教育部公布之電機、機械工程名詞為準，並附註原文，藉免曲解。對於未行公布的諸名詞，皆運用與原意義有關聯的名詞示寫。
- 十二、本書係根據 G. T. Thaler; M. P. Pastel: Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems 一書編譯而成，撰校雖力求嚴謹，但錯誤之處恐仍難免，尚祈學人先進，隨時惠予指正。

馬 雲 龍 敬 撰

民國六十五年五月於國立臺灣大學電機系

譯 者 序

本著係精簡節譯自 (G. J. Thaler & M. P. Pastel 二人原作的 "Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems"。原著者共有十一章，但鑑於內容之精簡化，只取其前六章做標題，章節次序雖然相同，內容詞句多加修改，使文章通順，以便學子易於理解。

馬 雲 龍

民國六十五年五月一日

目 次

第一章	序 論	1
1—1	概念.....	1
1—2	非線型系統之作用.....	2
1—3	系統模型之表達.....	5
1—4	非線型系統之研究方法.....	9
第二章	分析及數值方法	12
2—1	序論.....	12
2—2	線型模型之構成.....	12
2—3	正切近似法.....	14
2—4	最小自乘誤差法.....	18
2—5	應用實例.....	23
2—6	數值積分法——Taylor's 級數.....	36
2—7	數值積分法——無窮級數.....	40
2—8	Z 型之導出.....	43
2—9	過渡反應演算用的數值方法.....	47
2—10	非線型方程式——Z 型之應用.....	50
2—11	非連續性非線型系統之過渡反應.....	61
	習 題.....	69
第三章	位相平面	70
3—1	序論.....	70
3—2	位相畫面之求法.....	71
3—3	特異點.....	79

2	非線型自動控制	
3—4	時間反應之求法	84
3—5	一般非線型系統之分析	86
	習題	99
第四章	利用位相面做非線型系統分析	100
4—1	失潤摩擦和激發力的伺服系統	100
4—2	簡易齒隙作用的儀器伺服機構——穩定原則	108
4—3	具有簡易齒隙作用之儀器伺服系統中失潤摩擦和激發力之效果	113
4—4	具有慣量和摩擦的齒隙作用之儀器伺服系統	115
4—5	飽和作用	120
4—6	交流二相伺服電動機	123
4—7	位相面和位相空間法	128
4—8	分段圖形變動之效果	130
	習題	134
第五章	圖析函數法	136
5—1	圖析函數及其分段圖形處理法	136
5—2	圖析函數之導出	141
5—3	代表性非線型輸入——輸出曲線和其圖析函數	149
5—4	穩定度分析	153
5—5	齒隙作用之穩定度分析	157
5—6	錯誤指示和誤差	166
5—7	非線型系統之彌補作用	169
5—8	齒隙作用之線型彌補問題	173
5—9	尼克路斯圖表所用的彌補規型	175
5—10	由圖析函數資料做過渡反應之估計	177
5—11	非對稱非線型、定速度輸入量及轉矩	181

5—12 非線型系統中閉環頻率反應·····	182
5—13 基本圖析函數法·····	183
5—14 圖析函數與幅量和頻率有關的頻率反應·····	198
5—15 閉環頻率反應之分析性圖解法·····	200
5—16 數學模型分析法·····	202
5—17 跳躍共振·····	213
5—18 副諧波·····	216
習 題·····	216
第六章 電驛伺服機構·····	218
6—1 序論·····	218
6—2 物理概念·····	220
6—3 二階次電動機負載的電驛伺服系統·····	224
6—4 電驛伺服系統的極限環分析·····	238
6—5 三階次轉移函數的電動機·····	244
6—6 儀器電驛伺服系統·····	247
習 題·····	249
附 錄·····	251
A—I (4.1.16) 式之證明·····	251
A—II (4.2.6) 式之證明·····	252
A—III (5.3) 節第二曲線的圖析函數之演算·····	253
A—IV (5.3) 節第三曲線的圖析函數之演算·····	256
A—V (5.3) 節第四曲線的圖析函數之演算·····	257
A—VI (5.3) 節第五曲線的圖析函數之演算·····	258
A—VII (5.3) 節第六曲線的圖析函數之演算·····	259
A—VIII (5.3) 節第八曲線的圖析函數之演算·····	259

4 非線型自動控制

A—IX (5.3) 節第九曲線的圖析函數之演算..... 260

A—X 彌補規型圖表的繪出及使用方法..... 261

索 引..... 265

第一章 序 論

1—1 概念

任何的反饋系統 (feedback systems) 得產生動態反應 (dynamic response)，其動態特性亦同樣的可由圖形或公式表達出來，有關此點在線型控制系統 (linear control systems) 中業已提及，但實際言之，並沒有一種在物理上呈完全線型反應的系統，而相反的所有的物理系統應呈非線型關係。此並非意思著利用線型系統分析問題是完全錯誤而是在某些操縱中皆有非線型結果產生，因之在初步設計中可用線型系統討論，但為著結果確實和其可靠性之增大，應在進一步的設計中討論非線型系統之反應現象。

本質上是線型設備，但用於非線型運轉上或非線型設備用於線型運轉上，其結果是相同而產生線型作用。

非線型作用的種類甚多，諸如：阻力摩擦 (coulomb friction)、黏合 (binding)、齒隙作用 (backlash)、死角部份或滑口作用 (dead space or free play) 以及飽和作用 (saturation) 等等。以上所提及的數種非線型作用在控制系統中是無法消除，因之其作用現象以及反應結果得要事先加以理解。至於重量 (weight)、空間 (space) 以及經濟價值等等亦為重要問題，例如所謂的電驛伺服系統 (relay servo)，由於電功率放大器 (power amplifier) 等非線型設備而產生重量、空間以及經濟上之不便。

非線型可分為偶然非線型 (accidental nonlinearities) 和有意非線型 (intentional nonlinearities) 兩種，其亦可稱之為分析性和非分析性非線型，前者為一種緩慢變動者，其可用圓滑單一曲線或曲

2 非線型自動控制

線羣表示有如轉矩——速度曲線，但後者有其快速變動的獨特特性，其曲線應為非連續性或多值者 (discontinuous or multiple-valued)，例如急速反轉、死角作用 (dead zone) 以及電驛 (relay) 等。

1—2 非線型系統之作用

稍微的非線型作用和線型者並沒有甚大區別，若非以仔細測量則很難發現，當非線型作用甚大而具有有意的非線型作用時，此反應和線型者大有不同，其現象是使輸入 (input) 和輸出 (output) 大有相異而不能成正比。其過渡反應 (transient response) 和其階值輸入量 (step input) 之幅量有關，同時任意輸入量之反應亦不能以一系列之脈衝波輸入量者計算之。綜合之，此者不能具有一系統性之轉移函數 (unique transfer function)。

在線型系統中常有時間領域法 (time domain) 和頻率領域法 (frequency domain) 之相關曲線，但在非線型作用中此種關係不能存在，甚至於各呈獨立關係。對於階值輸入量言之，其值小者可使系統呈穩定 (stable)，但其值增加至相當程度時，可能使之呈非穩定狀態。對於時間函數輸入量 (ramp function) 言之更是不能事先預測其結果。

非線型系統中的穩定度是為重要問題，其常以極限環形 (limit cycle) 或是極限定值幅量振盪作用 (sustained finite-amplitude oscillation) 討論之。此極限環形之求出若有外力函數 (forcing function) 之加入更難以實現。

非線型系統的過渡反應和頻率反應 (frequency response) 不論此系統是否穩定，皆有其獨有之特色，如圖 (1.1) 所示的彈簧——質量——摩擦系統 (spring-mass-friction system)， y 為位移 (displacement)， m 為質量 (mass)， f 為阻尼係數 (damping coefficient)。

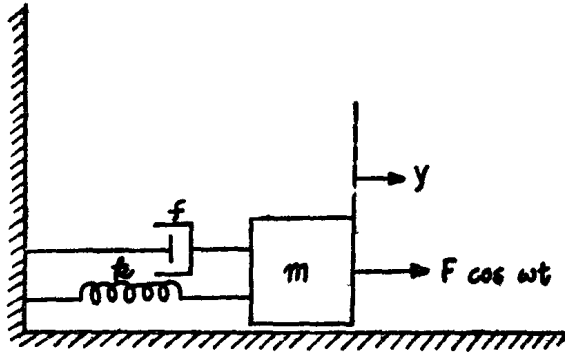


圖 (1.1) 平移系統

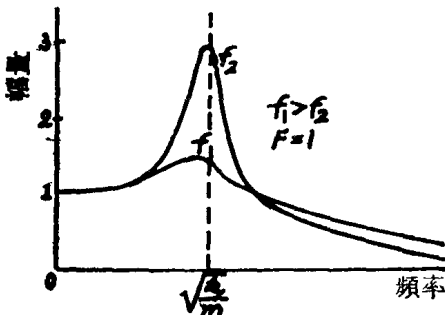
cient), k 為彈簧係數 (spring coefficient), F 為作用外力 (forcing function), 若每個要件皆為線型則可得:

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = F \cos \omega t \dots\dots\dots (1.2.1)$$

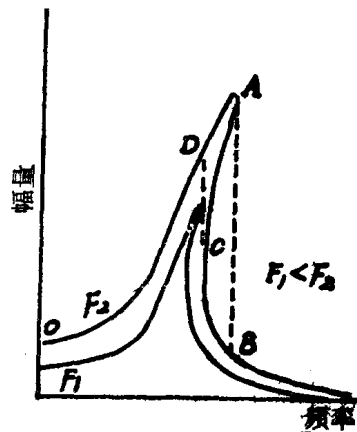
此式應為一線型微分方程式, 但當其中的要件諸如彈簧的剛性 (stiffness) 因伸長度而呈非線型關係時呈非線型微分方程式, 如:

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ay + by^2 = F \cos \omega t \dots\dots\dots (1.2.2)$$

很明顯, 上式的解答應為週期性 (periodic) 者, 因其外力函數為一週期性的關係。線型機械系統 (linear mechanical system) 其頻率反應曲線如圖 (1.2)。



圖(1.2) 線型系統頻率反應



圖(1.3) 非線型系統頻率反應

4 非線型自動控制

但如(2)式所示，因有 by^2 之加入而構成異常的頻率反應曲線，如圖 (1.3) 所示常發生共振尖峯 (resonance peak) 向高頻率側倒向的彎曲作用 (bending)，A點可稱為跳躍共振 (jump resonance)，若(2)式中之 b 為負值，其彎曲方向則呈反向。

有關此類非線型系統頻率反應試驗之程序如下列者，即以低頻率的外力函數先作用之，再慢慢的增加頻率而不變動其振幅值，由此可求出輸出量之變動曲線是否呈圖 (1.3) 所示者，若在進入最高點時即進入尖峯幅值 (peak amplitude)，再稍微增加輸入量則可產生輸出量之急躍 (jump) 作用，很顯然的在同一頻率下竟有兩個幅值。三相伺服馬達發生此種作用，因之利用此種馬達的電驛伺服亦然。

至於線型和非線型系統的時間反應曲線即振盪曲線，在無外力函數作用下，前者是逐漸的減低其振幅，但振盪的週期 (period) 是相等而不變。但後者其振盪振幅顯然亦是逐漸減低，但週期反而增加。因非線型系統其輸出量波型多為非正弦波 (nonsinusoidal) 而為諧波 (harmonic)，有些情形此種所產生的諧波頻率反而小於外力函數之頻率。

非線型系統常發生自持振盪作用 (self-sustained oscillation)，此者常稱為界限圓，在控制系統中常稱為亂調作用 (hunting)，此種現象的代表式應為方得波路方程式 (van der Pol's equation)，即；

$$m\ddot{y} - a(1 - y^2)\dot{y} + ky = 0 \dots\dots\dots (1.2.3)$$

有關(3)式之分析雖然不在此章份內，但一般所知當 $y < 1$ 時式中 $\dot{y}$ 的係數為負，則此阻尼作用亦為負，同時可以發生幅值遞增的干擾振盪作用，當 $y > 1$ ， $\dot{y}$ 的係數為正值，則可發生減衰振盪作用，但無論如何此式有一界限圓作用存在。

今舉出最簡易的非線型實例討論之，如圖 (1.4) 所示的簡易單擺 (simple pendulum)，其單擺長度為 l ，重力加速度為 g ，擺重

質量為 m ，於不計較擺長所用線索的重量，則得：

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \dots\dots\dots (1.2.4)$$

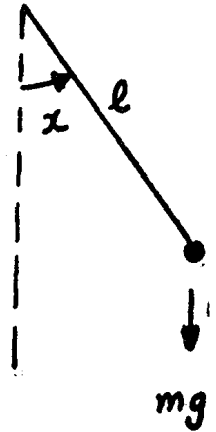
(4)式為非線型微分方程式，但 x 為角度，當 x 角度甚小時，(4)式可變化為：

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \dots\dots\dots (1.2.5)$$

但 $\omega^2 = \frac{g}{l}$ 應為無阻尼角速度。(5)式的解答：

$$x(t) = A \sin (\omega t + \phi) \dots\dots\dots (1.2.6)$$

(6)式中的振幅 A 及位相角 ϕ 可由初期條件值決定之。



圖(1.4) 簡單擺

1—3 系統模型之表達

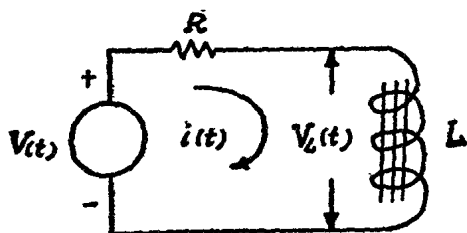
欲研究某控制系統，應有一定之程序，諸如：

- (1)基本初步檢討 (preliminary study)
- (2)模型形成 (formation of the model)
- (3)數學分析 (mathematical analysis)
- (4)設計改良 (modification of the design)

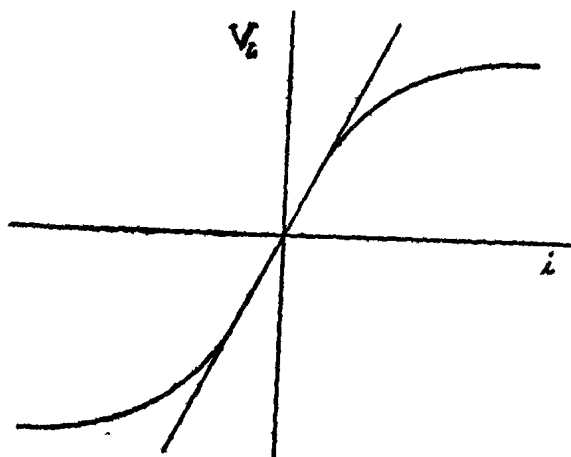
(1)者所示的初步檢討皆為基本者，應包括有經濟方面以及物理現象的各種因素，(2)者所示的模型形成在控制系統中應做出相關的標流圖形(signal-flow-diagram model) 或利用轉移函數 (transfer function) 形成開環或閉環圖形。假若各要件可用拉氏變換式 (Laplace transform) 示之，利用轉移函數表達最為理想，但有時非線型要件可單獨的用圖形或其他方式示之。例舉內含鐵心的電感係數 L (inductance) 和電阻 (resistance) R 的串聯電路如圖 (1.5) 所示，則可得：

$$V(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \dots\dots\dots (1.3.1)$$

6 非線型自動控制



圖(1.5) R-L 電路



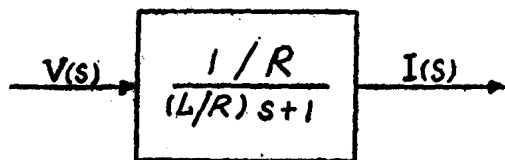
圖(1.6) 含鐵心電感的飽和曲線

(1)式中今取出 $V_L = L \frac{di(t)}{dt}$ 討論，此者為電感係數之反電動勢(back emf)，因線圈內含有鐵心，當激磁電流 (exciting current) i 甚小時可當之為線型如圖 (1.6) 的斜線所示，但當 i 逐漸增大，則 V_L 呈一非線型曲線，因之欲求解 (1) 式，若利用線型分段圖形 (linear block diagram) 如圖 (1.7a) 所示者則只限於微小的電流值，若使電流值任意變動，利用此 (a) 圖一定要產生甚大誤差的結果，因此得利用 (b) 圖分析之，(b) 圖中之 N 為非線型之意。

非線型分段圖形 N 由於其曲線之相異，其所求得公式亦非相同，

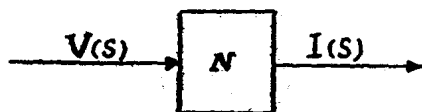
今取圖 (1.8) 討論：

$$y = F(x) \dots\dots\dots (1.3.2)$$



(a)

圖(1.7) (a) 線型分段圖形



(b)

(b) 非線型分段圖形

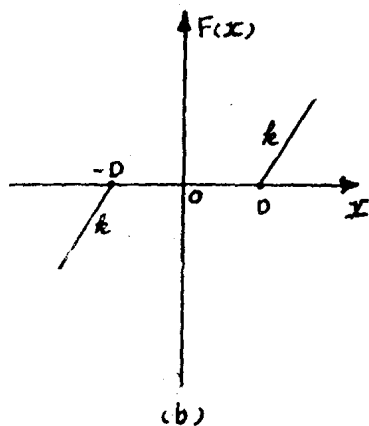
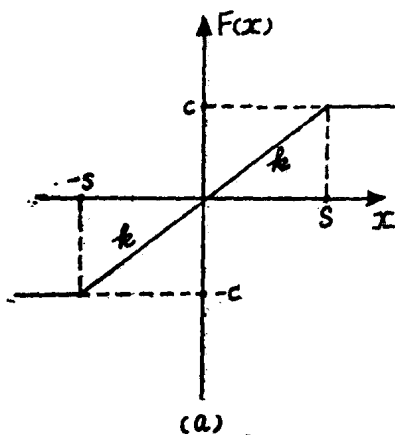
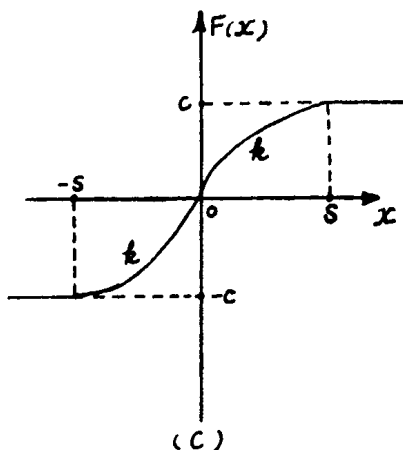


圖 (1.8) (a) 飽和近似曲線

(b) 死角作用曲線



(c) 飽和曲線

(a) 圖所表達圖形的分析式應示之如：

$$F(x) = \begin{cases} kx & |x| \leq S \\ C_{\text{sgn } x} & |x| \geq S \end{cases} \dots\dots\dots(1.3.3)$$

(3)式中的 $k > 0$ 、 $C > 0$ 皆為常數，在此 k 應多為斜率，而 sgn 為符號 (sign) 之意， $\text{sign } x$ 表示當 $x > 0$ 時為正號，但當 $x < 0$ 時為負號。 S 為 x 軸上某常數值。

(b) 圖所表達者的分析式應示之如：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq D \\ k(x \pm D) & |x| \geq D \end{cases} \dots\dots\dots(1.3.4)$$

(4)式中之 D 表示死角區域。

(c) 圖的分析式應示之如：

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3C}{2S} (1 - \frac{1}{3S^2} x^2) x & |x| \leq S \\ C_{\text{sgn } x} & |x| \geq S \end{cases} \dots\dots\dots(1.3.5)$$

(5)式是由 (C) 圖所示曲線實驗而求得的分析式。

在非線型控制系統中電驛的使用是常有的，如圖 (1.9) 所示：