序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喩。

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲，前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與諮院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢敢，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋彬、李煥燊、南登岐、孫賡年(物理學總執筆人)、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉秦庠、鍾恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文教先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。茲値本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

中華民國五十一年元月湯元吉序於臺北

*該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄭堅厚、湯元吉等九人。

Tmt. 92/1.8

徐氏基金會啓事

一、凡對本書任何一部分，或本會所印行之其他書籍，能在內容及文字方面，提供建議，致使讀者更易迅捷了解書中意義者，如被採納，當致酬美金十二元五角(折合新臺幣五百元)至一百二十五元（折合新臺幣五千元），以示謝意。

二、本會誠徵關於自然科學及機械、電機、電子等工程之中文創作或翻譯稿件，以適合於一般人士或中等學校以上學生自修之用者爲標準。稿費每千字美金二元五角（折合新臺幣一百元），特優譯著稿酬另議。

三、玆爲獎酬本會出版各書之作者及譯者起見，將於各書出版後之次年年底，核計其在臺灣、香港及星加坡三處之銷售數量，分配贈與其作者或譯者以下列三項獎金：

1. 銷數最多者美金6,000元

2. 第二多數者美金4,000元

3. 第三多數者美金2,000元

關於上開一、二兩項事宜，請逕函香港郵政信箱 1284 號徐氏基金會接洽。

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要為中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要為主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟為存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約為六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故為便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印為一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之；其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，尚冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之逐譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

數學第十四册目錄

上册　数

下册　體

上册　　數

幾何級數在商業計算方面之運用

複利計算

I. 前言：單利息

讀者都知道，債務人S向債權人G貸得本金A，例如500元， 40
債務人必須付給**利息**的，例如**利率**是4%＝百分之四＝$\frac{4}{100}$＝本金的 0.04；參閱第四册中之〔370〕節及第七册中之〔695〕…節。意即**債務人**S過了一年之後，對於債權人 G 不但要**償還本金** $A=500$元，並且要按4%加付本金的利息(參閱第七册中之〔695〕節)，即$0.04\times500=20$元利息(Z)，加起來則爲 $A+Z=520$元。假如債務人S 到期不能償還這個加重的債務 $A+Z$，亦即債務尚未清結，那末他至少必須先償還債款的利息，每個年底，把這個單年利20元交付債權人，一直到他償還所借的本金A 爲止。

我們用p%(例如4%)＝$\frac{p}{100}=0.01\,p$（例如$\frac{4}{100}=0.01\times4=0.04$)代表**利率；利率是一個數，用這個數來乘本金**A**，便得到單年息** Z；分數$\frac{p}{100}$的**分子**p**稱爲百分數**(參閱第七册中之〔696〕節)；再用E_1代表第"一年年底的**本利和**"，亦即本金A外加尚未償付的利息Z之和。

例如

本金 $A=600$元；$p=4$； 利率4%＝0.04；

債款利息 $Z=0.04\times600$元＝24元；

本利和$E_1=(600+0.04\times600)$元＝624元，或者：

本金 $A=200$元；$p=4\frac{1}{2}=4.5$； 利率＝$\frac{4.5}{100}=\frac{45}{1000}=0.045$；

利息$Z=0.045\times 200$元$=9$元；

本利和$E_1=200$元$+0.045\times 200$元$=209$元

寫成一般算式如下：

$$Z=\frac{p}{100}\cdot A=0.01p\cdot A\ ;\ E_1=A+\frac{p}{100}\cdot A=A+0.01\,p\cdot A$$

由上面所述的關係中，我們還要指出一直到今日還有許多專門刊物仍然無法避免的一種表達方式的錯誤（參閱第二冊中之〔166〕節）。例如，一家商店上年度的銷貨額U_1為10,000元，而本年度則為30,000元$=U_2$，如果說今年銷貨額比去年多了三倍，那就錯了。正確的說法是，它是去年銷貨額的三倍，或有去年的三倍大，或者也可以說是增至去年銷貨額之三倍，或比去年多了兩倍。這些說法都容易使人迷惑，但如用數學的簡單算式寫出來，則一切狐疑便可消失；在上面所舉的例中：

30,000元$=U_2=3\times 10,000$元$=3\times U_1$或

$U_2=10,000$元$+20,000$元$=U_1+2\cdot U_1$

由此等式立即可以看出，“大三倍”的說法，實比“多了兩倍”的說法來得簡單明瞭！

習　題：

1）試把U_2有U_1的n倍大一般說法，用數學的簡單算式表達出來！

2）然則U_2究比U_1大多少倍？

3）將600元的金額 *a*) 增加本值的300％ *b*) 加到本值的300％。

4）$A=1,000$元增加到2,000元。*a*) 試問此值為原值的百分之幾？*b*) 又所增之數為原值之百分之幾？

41 我們在$E_1=A+0.01\cdot p\cdot A$算式裏是將E_1當作和數表示，其中含有“大於”A之意。試問應如何使此算式變形，以便由“大於”之涵義變為“幾倍大”，即由和變成積？這個問題我們已在第二冊中〔132〕節解答過了：即將$A=1\cdot A$及$0.01\cdot p\cdot A$這兩個相加數中之共同因數A放在括弧之前：

$$E_1 = A \cdot (1 + 0.01p)$$

例如：　$A = 250$元；利率$= 5\%$，即$p = 5$；

$$E_1 = 250 \times 1.05\text{元} = 262.50\text{元}$$

請各位自己再舉幾個這一類的例子！

還有一種更簡單的寫法，即在利息計算中可用簡單符號 q 代表括弧內之值$(1 + 0.01 \cdot p)$；q有一個特別名稱，叫做**利息因子**，如果我們用 q，就可獲得一個簡單公式，用以計算本金 A 在一年內究竟增加到多麼大的本利和E_1，假如利息不予提取的話：

$$\boxed{E_1 = A \cdot q}$$

各位應用這個公式的時候，必須經常弄明白，q 在此到底代表什麼？它代表的是1與利率之和，亦即1與$\frac{p}{100}$之和：

$$\boxed{q = 1 + 0.01p}$$

例　　如：

號數	p	利率 p %	利息因子 q	$E_1 = A\ q$
1	3	$3\ \% = 0{,}03$	$1+0{,}03 = 1{,}03$	$A \cdot 1{,}03$
2	$3{,}2$	$3.2\ \% = 0{,}032$	$1+0{,}032 = 1{,}032$	$A \cdot 1{,}032$
3	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}\ \% = 0.0\overline{3}\ldots$	$1+0{,}0\overline{3}\ldots = 1{,}0\overline{3}\ldots$	$A \cdot 1{,}0\overline{3}\ldots$
4	10	$10\ \% = 0{,}10 = 0{,}1$	$1+0{,}10 = 1{,}10$	$A \cdot 1{,}1$
5	12.5	$12{,}5\ \% = 0.125$	$1+0.125 = 1{,}125$	$A \cdot 1{,}125$
6	200	$200\ \% = 2{,}00 = 2$	$1+2{,}00 = 3{,}00$	$A \cdot 3$

上表第二欄裏用斜體字印的較粗p 之單位數代表利率的百分數，因此在 q 中就變成小數點以下兩位！（參閱第七册中之〔695〕節）！

習　題：

試就上表所規定之利率求$A=800$元之E_1，首先當作和數，然後當作乘積！這個乘積的近似值可用計算尺求之。從這裏各位諒已看出，爲什麼用乘法計算E_1比用加法來得便利。——在此要附帶提及的，卽在儲蓄銀行裏對於按年計息的儲存額是有現成的表可查的。

42 II. 複　　利

接期計算利息，併入本金A，再把這本利和作爲下期的本金，這樣利上加利的計算利息就叫做複利。

儲蓄銀行和一般銀行雖可事先有所協議，將未提的利息有效的作爲新的有息存款，但照例有其許多限制的規定，例如不足一元之數不予計息等等；下面的複利計算是不管這些規定的。

A) **每次息金應於年終加入本金計算**。爲求簡便起見，假定初期本金A是曆年一開始就存進去的。此後到了第一年，第二年，…至第n曆年終了時，由本金A利上加利所形成的本利和，則稱之爲E_1；E_2；…E_n。

實　例：　　　　一般算式：

$A=500$元；$p=4$；$q=1.04$

$E_1=500\times1.04$元　　　　$E_1=A\cdot q^1$

對第二年而言，E_1是初期本金；如用$q=1.04$乘E_1，卽得本利和E_2。參閱第十三册中之〔9〕節。

$E_2=E_1\cdot q=500\times1.04\times1.04$元$=500\times1.04^2$元　　$E_2=A\cdot q^2$

$E_3=E_2\cdot q=500\times1.04^2\times1.04^1$元$=500\times1.04^3$元　　$E_3=A\cdot q^3$

餘類推　　　　餘類推

$E_n=500\times1.04^n$元　　　　$E_n=A\cdot q^n$

由此獲得**複利公式**：

$$\boxed{E_n=A\cdot q^n}$$

在此公式中，E_n之指數n是表示第n年之序數；但q^n之冪指數n則是用作自乘的基數；E_n 及A 都是金額。

附註： 1）此複利公式祇適用於n的整數值。

2）此複利公式可與第十三册〔12〕節所講的公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ 作一比較。這裡冪指數的差別究作如何解釋？雖然兩個公式最末一項皆與其商爲q 之幾何級數有關。請看下面一覽表便知其詳：

一 覽 表

	第1項	第2項	第3項	…	第n項	第 $n+1$ 項
a_n公式						
項的名稱	a_1	a_2	a_3	…	a_n	
項的號數	1	2	3	…	n	
項 的 值	$a_1\cdot q^0$	$a_1\cdot q^1$	$a_1\cdot q^2$	…	$a_1\cdot q^{n-1}$	
E_n公式						
項 的 值	$A\cdot q^0$	$A\cdot q^1$	$A\cdot q^2$	…	$A\cdot q^{n-1}$	$A\cdot q^n$
結息年度的數目	0	1	2	…	$n-1$	n

在一覽表內，可見 a_n及E_n 值之組成是上下相同的，例如 $a_1\cdot q^2$ 及$A\cdot q^2$ 二值。但兩個公式的n意義並不相同：在 a_n公式裡，n是代表級數項的號數，從第1號開始；它是項數 1,2,3,…等等的一般表示。但在E_n公式裡，n並不代表項的號數，却代表過去年度的數目；在一覽表內是從 0 年度開始；因此n可當作年數 0,1,2,…等一般表示看待。祇有從n的這些各種不同意義裡，才能說明兩個公式在結構上的差別。

習 題：

試明白指出〔41〕節之E_1公式是〔42〕節 E_n 公式之特殊情形！

複利公式 $E_n=A\cdot q^n$ 可以解答下面一個問題：卽本金A 以複 43
利計算，到了 n 年終了，本利和究有若干？（其中$q=1+\frac{p}{100}$，

p %爲利率，而 p 爲每年生息之百分數。）

計算例題：

本金 $A=680$ 元，存款期限爲5年，以 3%複利計算。我們用對數求本利和 $E_5=A\cdot q^5=680$ 元 $\times 1.03^5$；爲期獲得較大的精度，我們要用六位對數表（參閱第十三册中之〔39〕節）計算 q^n；但在中間計算之末尾，必須簡約至小數點以下四位爲止，因爲對於 680 所用只是四位對數：

680元 $\times 1.03^5=788.3$ 元

$$
\begin{array}{rr}
 & lg680=2.8325 \\
5\cdot lg1.03=5\times 0.012837= & \underline{0.064185} \\
 & 2.8967
\end{array}
$$

習　題：

1）本金4,600 元，年利率爲 $3\frac{1}{4}\%=3.25\%$，每年一期複利計算，問十年後的本利和是多少？

2）本金 10,000 元，每年以3.5%計息，並將每年的息金併入本金，再按年利率生息；試求15年後之本利和！

3）一角錢的本金經過 1900 年後，本利和將增到如何大的一個數，假如從這個年度一開始，就按4%的複利來計算的話？（爲什末本題沒有眞實的價值，那是用不着對各位詳加解釋的。）

4）100 元在十年內本利和究能增至若干，假如分別按 2%，按3%，按4%，按5%之複利來計算的話？

5）有人在儲蓄銀行存入 4,500 元，利率爲 $3\frac{1}{4}\%$，假如利率改爲 $3\frac{1}{2}\%$ 時，試問經過十年後，增加之複利是多少？

6）私人債務 500 元，約定於三年後以單利4%還淸。問債權人蒙受了若干損失，因爲他未用複利計算？

44 以複利生息的本金 A，因爲經過 n 年之後有其增加值爲 $E_n=A\cdot q^n$，故今日存入銀行放利之本金 A，相當於 n 年後由此增加的本利和 E_n。

存入銀行生息的本金，其價值是與時間有關聯的，亦即爲以複利計息之時間的函數。

對此實際情況尙可提出另一特別重要的問題：今日必須存放若干本金A，才能在n年內使本金增加到 $E_n=A\cdot q^n$？（利率應爲已知數！）因爲所求是本金A，故須將複利公式變形爲：

$$\boxed{A=\frac{E_n}{q^n}}$$

例如：$E_n=500$元；$p\%=3.5\%$，$n=4$年；$A=$？

$$A=\frac{500\text{元}}{1.035^4}=435.7\text{元}$$

$$\begin{array}{r} lg500=2.6990 \\ 4\cdot lg1.035=0.0598 \\ \hline 2.6392 \end{array}$$

答案：現值爲 435.7 元的本金，年利 3.5%，複利計算，四年後可得本利和爲500元。

下面是另一同等重要的問題，也是以上述事實爲基礎：

根據協議n年(本例爲4年)後到期，須償還一個債額 E_n(例如500元)；但債務人却要立刻償還(**貼現**)：問此債額的現值應爲多少？答案：435.70元。

假如要比較各種不同時限到期的債額，必須計算定期的，好比到今天爲止的債額兌現值，在變形公式 $A=\frac{E_n}{q^n}=\left(\frac{1}{q}\right)^n\cdot E_n$ 裏出現的分數"$\frac{1}{q}$"稱爲**貼現因子**或**折息因子**。

習　題：

1) 試求A，假如已知：

a) $E_n=1{,}500$元；$p\%=4.25\%$；$n=10$年

b) $E_n=5{,}100$元；$p\%=5\%$；$n=12$年

2) 債務人S根據協議，應於2年後償還5,600元。可是因他現在已經有錢可供支配，願意把貸款立刻予以折付現款，亦即按現

值償還；假定利率爲 3.75%。問現值是多少？

3）爲求明瞭資產狀態起見，某君 N 必須於1946年一月一日把下面的債額兌現值計算出來：

a) 680元；3%；1946年一月一日到期

b) 800元；4%；1947年一月一日到期

c) 2,000元；4.5%；1948年一月一日到期

4）一個商人本應向一債務人於1948年一月一日索還8,000元之債務。但如他希望提前於1946年一月一日收回賬款，問須減收若干元(利率3.75%)？

5）一個父親須在儲蓄銀行裏存入多少錢(以 3.75%利率計息)，才能使其女在20年後獲得約略等於5,000元的妝奩費？

45 從E_n公式還可導引下式：

$$\boxed{q=\sqrt[n]{\frac{E_n}{A}}}$$

此式可供解答下面的問題之用：須要選用多大的利息因子 q (亦卽多大的利率$p\%$)，始能使本金A於n年後由複利計算增加到本利和E_n？因爲金額E_n與A含有同樣的計算單位(例如：元)，故在根號之下可將二者之單位一併消去。依此方法求得之q乃是一個純粹數字。

例如：$A=1,000$元；$E_n=2,000$元；$n=20$年

$$q=\sqrt[20]{\frac{2000}{1000}}=\sqrt[20]{2}=1.036\text{；所以利率}=3.6\%$$

$$\frac{1}{20}\cdot lg2=0.01505$$

習　題：

1）一個本金須用那幾種百分比的複利來計算，使它可在 *a*) 十年後，*b*)二十年後，*c*) 五十年後變爲雙倍？

2）有人貸出600元，訂立 700 元的借據，言明二年後還淸。

求利率！

現在再把複利公式加以變形，使能計算 n： 46

$$q^n=\frac{E_n}{A}$$

因爲此式的右邊自然消去錢的單位，E_n及A在下式裏不再代表錢的數量，而祇代表此數量的量度數，故可用對數進行計算；參閱第五册中之〔452〕節：

$$n\cdot lgq=lgE_n-lgA\text{；以}lgq\text{除之，則得}$$

$$\boxed{n=\frac{lgE_n-lgA}{lg\ q}}$$

此公式可用以解答下面的問題：按複利生息的本金A須經若干年後才會增至本利和E_n，假如利息因子是q的話？

例題：$A=1{,}500$元；$E_n=5{,}100$元；$p\%=3.75\%$；

$$q=1.0375\text{；}\quad n=?$$

$$n=\frac{lg5100-lg1500}{lg1.0375}=\frac{3.7076-3.1761}{0.01599}$$

$$=\frac{0.5315}{0.01599}=\frac{53150}{1599}\text{；}$$

$n=33.2\cdots$年(這種計算可用對數完成之)

因爲利息通常要到年終才結算，故一直要在34年之後纔能獲得所規定的本利和。這裏的零數化整與一般四捨五入的慣例有所不同，即不能將小數點後面的2捨去，却要把它收作整數，故$n=34$年！

習　題：

1）試求下列各題的n：

a) $A=6{,}300$元；$E_n=9{,}400$元；$p\%=4\%$；

b) $A=36$元；$E_n=47$元；$p\%=3.25\%$

2）一個本金須在若干年後始可增至二倍，如用複利生息而利率各爲；a)3%，b)4%，c)5%？

3）有一林場每年增加樹木約爲3%，如果體積的增加同此百分比，問幾年後該林場的材積便可增至二倍之數？

47 *B*) **短期結算之利息**。假如**年利率**爲 $p\%$(例如5%)，仿照銀行辦法在每半年終了時，把利息併入下一期作爲本金，再使利上加利，則每半年乃按 $\frac{p}{2}\%$(好比 $p=5$時，應爲 $\frac{5}{2}\%$) 計算利息。由此可得下列的算式：

實例：	一般算式
$A=600$元	A
$p\%=5\%$	$p\%$
利息併入	利息併入
每 $\frac{1}{2}$ 年一次	每 $\frac{1}{n}$ 年一次
每 $\frac{1}{2}$ 年的利率：	每 $\frac{1}{n}$ 年的利率：
$\frac{p}{2}\%=\frac{5}{2}\%=2.5\%$	$\frac{p}{n}\%$
每 $\frac{1}{2}$ 年的利息因子 q：	每 $\frac{1}{n}$ 年的利息因子 q：
$q=1+0.025=1.025$	$q=1+\frac{0.01\cdot p}{n}$

在 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{2}$…年之後所得到的本利和，分別稱爲 $E_{\frac{1}{2}}$，$E_{\frac{2}{2}}$ $E_{\frac{3}{2}}$…。請各位核對下列算式是否沒有錯！

$E_{\frac{1}{2}}=600$元$\times 1.025^1=615$元；$E_{\frac{2}{2}}=600$元$\times 1.025^2=630.4$元

每年計算利息一次之本利和應爲 $E_1=600$元$\times 1.05=630$元。從這個實例中，各位可以看出，半年計息比一年計息爲有利。

但我們要問：四分之一年，即每三個月的定期計息（在商業習慣上並不常有)是否要比半年計息更爲有利？仍以 $A=600$元及

$p=5$爲例，計算每四分之一年的定期利率：$\frac{p}{4}\%=\frac{5}{4}=1.25\%$；

$q=1+0.0125$；

$$E_{\frac{4}{4}}=600\text{元}\times 1.0125^4\approx 631\text{元}$$

將E_1，$E_{\frac{2}{2}}$及$E_{\frac{4}{4}}$之得數列出，作一簡明對照：

$$E_1=E_{\frac{1}{1}}=630\text{ 元}；\ E_{\frac{2}{2}}=630.4\text{元}；E_{\frac{4}{4}}=631\text{元}$$

在上述一切情況下，均以本金 $A=600$ 元一年爲期複利生息，其利率是由 $p=5$ 出發計算。但利息的計算和利息的併入，却依各種不同的時限爲之，例如上面所擧的實例中：α) 一年之後，β) 每半年結束之後，γ) 每四分之一年終了之後。利率亦各有不同，在α)爲$\frac{p}{1}\%=\frac{5}{1}\%$；在$\beta$)爲$\frac{p}{2}\%=\frac{5}{2}\%$；在$\gamma$)爲$\frac{p}{4}\%=\frac{5}{4}\%$。至於所求得的本利和（總是對第一年的年終而言！）更有不同的寫法：α) $E_{\frac{1}{1}}$；β) $E_{\frac{2}{2}}$；γ) $E_{\frac{4}{4}}$；一般的寫法應爲：$E_{\frac{n}{n}}$。由此可見指數$\frac{n}{n}$的涵義，在分母方面是指每n分之一年期滿後必有一次利息的結算；在分子方面是指在全年中有n次的如此結算。最後由觀察所得，可知本利和$E_{\frac{n}{n}}$之增大是與計息期限的縮短有聯帶關係。

C) e 值

48

不是實際從事銀行業務的專家，而是純粹的數學家很容易想到把計息的期限無止境的愈縮愈短，結果甚至于使其接近於極限值 0；在此種情形下，我們對此期限的縮小，遂獲得下列的級數（其中每項暫可加一“年”字）：

$$\frac{1}{1}；\frac{1}{2}；\frac{1}{3}；\cdots\cdots\frac{1}{n}\cdots\cdots\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

參閱第四册中之〔375〕節！由於本利和的計算，(慣例以全年計算，但祇以一年爲限。) 可得下面的級數；後者雖包含各種不同的E值，但尚無法進行計算：

$$E_{\frac{1}{1}}\ ;\ E_{\frac{2}{2}}\ ;\ E_{\frac{3}{3}}\cdots\cdots E_{\frac{n}{n}}\cdots\cdots$$

一如我們以前對於級數中爲首幾項所作之觀察，在此算出的E值是否無止境的繼續增大，或接近於極限值，這是值得檢討的一個問題。

我們對以下的研究，擬選擇一個不甚通用，但相當簡單的複利計算例子：對於第一年開始的初期本金，可以一般值A表示之。假定利息數字$p=100$，則利率應爲：

$$p\%=100\%=\frac{100}{100}=1$$

因此按〔41〕節所講，對於五年期的付息遂爲$q=(1+\frac{p}{100})^1=(1+\frac{100}{100})^1=(1+1)^1$；又按〔47〕節可知半年期的付息乃是$q=(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{100})^2=(1+\frac{1}{2})^2$；對於$\frac{1}{3}$年期的付息$q=(1+\frac{1}{3})^3$；餘類推。據此可求(參閱第十三册中之〔30〕節)：

$$E_1=A\cdot(1+1)^1=A\cdot2.0$$

$$E_{\frac{2}{2}}=A\cdot(1+\frac{1}{2})^2=A\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2=A\cdot\frac{9}{4}=A\cdot2.25$$

$$E_{\frac{3}{3}}=A\cdot(1+\frac{1}{3})^3=A\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3=A\cdot\frac{64}{27}\approx A\cdot2.370$$

$$E_{\frac{4}{4}}=A\cdot(1+\frac{1}{4})^4=A\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^4=A\cdot\frac{625}{256}\approx A\cdot2.441$$

一般公式爲：$E_{\frac{n}{n}}=A\cdot(1+\frac{1}{n})^n$

爲了各位利用一定的n值將此計算繼續下去時便於核對起見，我們特別給各位寫出幾個比較確實的對數於下：