

大專升學必備

# 標準解析幾何

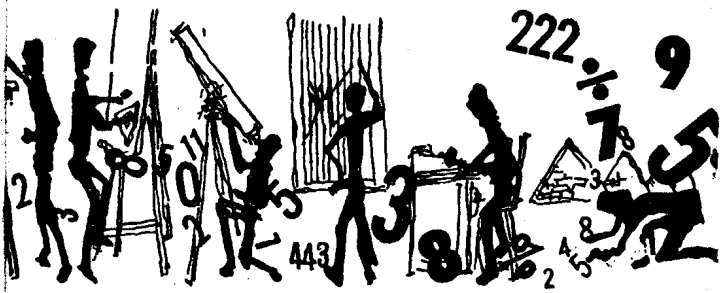
陳明哲編著



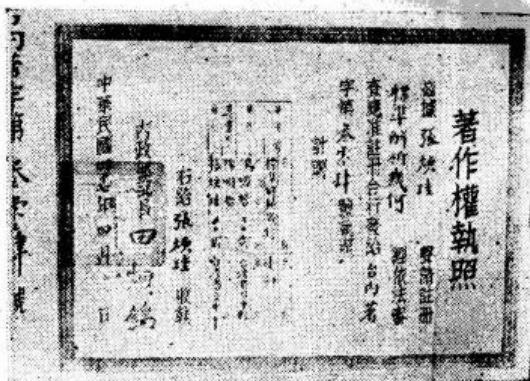
中央書局

# 標準解析幾何

陳明哲編著



中央書局



(著作權執照：臺內著字第三〇四號)

標準解析幾何

定價 24 元

版權所有・翻印必究



編著者 陳 明 哲  
 發行人 張 煥 珪  
 印刷所 中 信 印 刷 廠  
 臺中市福龍街六六號

發行所 中 央 書 局

臺中市中正路一二五號  
 郵匯：中字二〇〇六六號  
 內版登業字第〇〇〇三號

中華民國五十四年十一月七版

G:1:20

# 推廣「中華文化復興運動」

## 從事文化事業工作者的使命

人類社會的進步，端賴於從事文化工作者的努力；而知識的傳播，則有賴於作家和出版界的合力推動；但，如果缺乏讀者的支持，結果亦是徒然。

在別的國家，一種圖書，銷售十萬八萬是等閒事，但在我國（尤其是今日的海外），銷個二三千已經是可喜的現象了。正因銷量有限，作者所抽取的版費，和出版商的利潤，都是極其微薄的；是以一般出版商都抱「三年不發，一發三年」的宗旨，定價高昂。另一方面，我們的顧客，都是知識份子，他們的求知慾極強，讀書、買書、藏書差不多已成爲他們不可或缺的一種生活情趣，然而，遺憾的是，我國知識份子的生活條件，一般都比不上先進國家那麼優異；他們逛書店，看到一本心愛的書，再看售價，却又每每礙於經濟條件，而大感躊躇。

本社全人，都是一羣年青的書業從業員，任書店售貨員多年；在求學時期，也曾同樣地愛好讀書、買書、藏書、所以，有時看到一些顧客拿着書、望着定價、躊躇久久、終而依依放下情形，心裡覺得很難過，而對一般出版物售價之高昂，亦深感遺憾。然而，這亦止於「遺憾」而已，明乎出版界的苦衷，我們又那能苛求？多年來，當我們聚

在一起的時候，總會討論到這個問題，而試圖探求一種對作者、出版者、經銷者和讀者都有利的方法。最後，我們認定一點：讀物銷售的推廣，知識傳播的普遍化，雖有賴於各方面的配合，但廉價銷售以刺激讀者的購買能力，更佔重要的一環。於是，我們就依據此一觀點，而定下「薄利多銷」的政策。出版物不求其「厚利」，而求其「多銷」，把讀者的利益放在最前提。（當然，任何事業都不能不賺錢而能生存下去）

這次我們的計劃，承蒙許多作者和出版界同業相贊助，其中大部份且提供免費轉讓發行海外版的版權。對他們的盛意，全人等實深銘感；他們的慷慨，固使我們有機會一償出版廉價圖書的宿願，而間接，還是廣大的愛好讀書人士。倘若我們這種做法，對當今讀書風氣並不怎樣盛的讀書界果真能起一點刺激作用的話，首先要歸功於這些有心人士的贊助。

我們出版物所採的開本是袖珍本，一方面利其攜帶方便，另一方面成本亦可減低。當然，距精美的地步尚遠，今後我們當力求改進。

我們深知道，從事文化出版工作，是一項艱巨的使命；工作既繁瑣艱辛，而所得的利潤報酬又極其微薄。但這是我們的興趣，我們將會孜孜不倦地，勇於負起這個重担，為推廣文化和服務讀者，而獻出我們的精神，體力和時間。希望今後在書店裡，顧客們拿起心愛的書籍，一看售價，即毫不猶疑地購下，這現象正是我們期望已久的。

現代文化拓展社謹啓

中華民國五十六年九月

## 編 輯 大 意

- 一、本書根據教育部最近頒佈之中學課程標準編輯，專供升學、復習、會考及課外補充之用。
- 二、本書分章收羅現行教科書之重要題及歷年各大學之入學試題，以使讀者明瞭其命題之中心與趨向。
- 三、本書對於定理、公式等證明力求簡明扼要，俾使讀者易於瞭解。
- 四、本書取材，力求充實，於軌跡問題及參數方程式尤多所陳述，並注意高中數學之綜合運用，使讀者能收融會通之功。
- 五、本書中演出之例題特多，盡選代表性之題材，詳加解答，俾使讀後即可明瞭各種解題之方法。而習題中，較易者，則僅列其答，稍難者，加以提示或略解，更難者，則付完整解答以便自修。
- 六、編著本書為時倉卒，疏忽之處，自所難免，尚希各位賢達，不吝指教，俾能隨時改善，是所至盼。

民國四十七年元月十二日

編 者 識

## 本版高中參考書簡目

|            |                     |                                   |                |                      |
|------------|---------------------|-----------------------------------|----------------|----------------------|
| 新教材        | 新 數 學               | I. Adler<br>吳千甲<br>楊 獻 猷<br>林 繁 猷 | 原著<br>甲編<br>合編 | 特價 10.00             |
|            | 高中數學演習(一)           | 楊 獻 猷<br>林 繁 猷                    | 合編             | 定價 12.00             |
|            | 標準高等代數學             | 陳 明 哲                             | 編著             | 上册 14.00<br>下册 13.00 |
|            | 標準高中三角學             | 陳 明 哲                             | 編著             | 定價 21.00             |
|            | 標準高中平面幾何            | 蔡 哲 夫                             | 編著             | 上册 17.00<br>下册 17.00 |
|            | 標準解析幾何              | 陳 明 哲                             | 編著             | 定價 24.00             |
|            | 標準綜合數學研究            | 陳 明 哲                             | 編著             | 定價 16.00             |
|            | 高中代數學複習             | 程 象 溶                             | 編著             | 定價 8.00              |
|            | 高中代數總複習             | 游 源 清                             | 編著             | 定價 18.00             |
|            | 高中平面三角複習            | 游 源 清                             | 編著             | 定價 10.00             |
|            | 數學科出題趨向之研究          | 游 源 清                             | 編著             | 特價 5.00              |
| 大學先修<br>課程 | 三角學題解               | 楊 肖 震                             | 編著             | 定價 6.00              |
|            | 標準 物 理              | 傅 士 材                             | 編著             | 定價 24.00             |
|            | 高中化學要訣              | 許 瑞 麟                             | 編著             | 定價 24.00             |
|            | 中外地理要題分析            | 洪 敏 麟                             | 編著             | 定價 20.00             |
|            | 高級現代英文法 (教育廳<br>審定) | 李 白 濱                             | 編著             | 定價 20.00             |
|            | 英文法綜合複習             | 李 白 濱                             | 編著             | 定價 18.00             |
|            | 英文語詞的研究             | 李 篤 恭                             | 編著             | 定價 9.00              |
|            | 英文單字簡易研究            | 康 國 瑞                             | 編著             | 定價 4.00              |
|            | 自修英文十二課             | 汪 希                               | 編註             | 定價 6.00              |
|            | 英文語彙舉要              | 陳 紹 鵬                             | 編著             | 定價 7.00              |
|            | 學生英文成語              | 城 燕 然                             | 編著             | 特價 8.00              |
|            | 農藥英語手冊 (增訂版)        | 蔡 海 塗                             | 編著             | 精裝 11.00<br>平裝 8.00  |

外埠函購，手續簡便，包裝平寄，一律免費；郵件如有遺失，本局祇負代查之責。如需掛號，請另付費。

# 標準解析幾何

## 目次

### 第一章 坐標

|                      |    |
|----------------------|----|
| 1. 有向線段.....         | 1  |
| 2. 沙爾定理.....         | 1  |
| 3. 在一定線上之二點間的距離..... | 2  |
| 4. 角.....            | 5  |
| 5. 正射影.....          | 5  |
| 6. 笛卡爾直坐標.....       | 6  |
| 7. 二點間的距離.....       | 8  |
| 8. 分一線段成定比之點.....    | 12 |
| 9. 定比分點定理.....       | 12 |
| 10. 直線之斜角與斜率.....    | 15 |
| 11. 極坐標.....         | 18 |
| 12. 極坐標與直角坐標之關係..... | 23 |
| 13. 三角形面積正負的規定.....  | 26 |
| 14. 三角形面積公式.....     | 27 |

### 第二章 軌跡與方程式

|                    |    |
|--------------------|----|
| 1. 軌跡與方程式.....     | 36 |
| 2. 解析幾何學中基本問題..... | 36 |
| 3. 第一基本問題.....     | 36 |
| 4. 第二基本問題.....     | 38 |
| 5. 方程式的討論.....     | 41 |
| 6. 水平與垂直漸近線求法..... | 44 |
| 7. 代數方程式之一般討論..... | 46 |
| 8. 曲線的極坐標方程式.....  | 50 |
| 9. 坐標軸之移轉(變換)..... | 54 |



|                 |    |
|-----------------|----|
| 10. 坐標軸之旋轉..... | 57 |
|-----------------|----|

### 第三章 直 線

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 1. 直線之方程式.....           | 63  |
| 2. 直線方程式之各種形式.....       | 65  |
| 3. 一次方程式與直線.....         | 70  |
| 4. 二直線所成之角.....          | 72  |
| 5. 二直線爲平行之條件.....        | 76  |
| 6. 二直線爲垂直之條件.....        | 76  |
| 7. 法線式.....              | 80  |
| 8. 化普通式爲法線式法.....        | 81  |
| 9. 自直線至一點之距離.....        | 84  |
| 10. 直線之極坐標方程式.....       | 91  |
| 11. 直線之參數方程式.....        | 95  |
| 12. 直線系.....             | 99  |
| 13. 過兩直線交點之直線系.....      | 101 |
| 14. 三直線共點之條件.....        | 105 |
| 15. 一般二次方程式代表兩直線之條件..... | 111 |
| 16. 軌跡問題.....            | 114 |
| 17. 雜 題.....             | 116 |

### 第四章 圓

|                  |     |
|------------------|-----|
| 1. 圓之方程式.....    | 126 |
| 2. 圓之普通方程式.....  | 126 |
| 3. 圓之方程式的討論..... | 127 |
| 4. 圓之切線與法線.....  | 138 |
| 5. 圓之法線方程式.....  | 141 |
| 6. 直線切於圓之條件..... | 143 |
| 7. 切線之長.....     | 150 |

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 8. 圓 幕.....           | 151 |
| 9. 兩圓之交角.....         | 154 |
| 10. 圓 系.....          | 159 |
| 11. 通過二圓之交點的圓與直線..... | 160 |
| 12. 圓之極方程式.....       | 167 |
| 13. 圓之參數方程式.....      | 174 |
| 14. 關於軌跡之問題.....      | 177 |
| 15. 雜 題.....          | 184 |

### 第五章 拋物線

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 1. 拋物線之定義與方程式.....  | 195 |
| 2. 拋物線之性質.....      | 196 |
| 3. 拋物線之其他範式.....    | 197 |
| 4. 拋物線之切線與法線.....   | 202 |
| 5. 拋物線之次切距與次法距..... | 210 |
| 6. 拋物線之徑.....       | 213 |
| 7. 拋物線之參數方程式.....   | 216 |
| 8. 軌跡的問題.....       | 223 |
| 9. 雜 題.....         | 230 |

### 第六章 橢圓

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 1. 橢圓之定義及方程式.....  | 239 |
| 2. 橢圓之性質.....      | 240 |
| 3. 橢圓之畫法.....      | 241 |
| 4. 橢圓之其他範式.....    | 242 |
| 5. 橢圓之離心率.....     | 249 |
| 6. 橢圓之切線與法線.....   | 253 |
| 7. 橢圓之次切距及次法距..... | 254 |
| 8. 橢圓之參數方程式.....   | 262 |

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 9. 橢圓之徑.....    | 268 |
| 10. 橢圓之共軛徑..... | 269 |
| 11. 軌跡問題.....   | 274 |

### 第七章 雙曲線

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 1. 雙曲線之定義及方程式..... | 286 |
| 2. 雙曲線之性質.....     | 287 |
| 3. 雙曲線之其他範式.....   | 288 |
| 4. 雙曲線之漸近線.....    | 288 |
| 5. 共軛雙曲線.....      | 289 |
| 6. 等軸雙曲線.....      | 290 |
| 7. 雙曲線之離心率.....    | 297 |
| 8. 雙曲線之切線與法線.....  | 300 |
| 9. 雙曲線之參數方程式.....  | 310 |
| 10. 雙曲線之徑.....     | 314 |
| 11. 雙曲線之共軛徑.....   | 314 |
| 12. 圓錐曲線之極方程式..... | 319 |
| 13. 關於焦點半徑的性質..... | 325 |
| 14. 軌跡問題.....      | 327 |
| 15. 雜題.....        | 332 |

### 第八章 普通二次方程式

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 1. 二次曲線之中心.....     | 340 |
| 2. 二次曲線之分類.....     | 344 |
| 3. 降級二次曲線.....      | 349 |
| 4. 二次曲線概形之直接畫法..... | 357 |
| 5. 五條件定一錐線.....     | 360 |
| 6. 軌跡問題.....        | 364 |
| 7. 雜題.....          | 368 |

標準解析幾何一書

---

**第九章 高次曲線**

1. 擺 線.....376
2. 蚌 線.....381
3. 麥 葉 線.....384
4. 弓 形 線.....385

# 第一章 坐 標

## 1. 有向線段

一直線可視為一點之運動而成的。其運動方向有二種。其中一方向叫做直線的正向，則另一方向叫做負向。如此有方向的直線叫做有向線段或叫做向量。

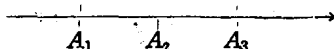
常以箭頭表明正向。

設  $A, B$  為直線上二點，若從  $A$  向  $B$  為正，則從  $B$  向  $A$  為負，在有向線段  $AB$  上任取一點  $O$ ，使  $O$  分線段  $AB$  為  $OA$  與  $OB$  二部份，則  $OA$  叫做正線段， $OB$  叫做負線段。

【註】有時為區別有向線段與普通不計方向的線段起見，可記有向線段為  $\overrightarrow{AB}$  或  $\overrightarrow{AB}$ ，而不計方向的絕對值，則記為  $|AB|$ 。

## 2. 沙爾定理 (Chales theorem)

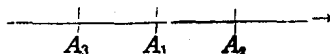
今若在一有向直線上順次有三點， $A_1, A_2, A_3$ ，則  
 $A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3$ ，然  $A_3A_1 = -A_1A_3$



$$\therefore A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0$$

若三點之順序為  $A_3, A_1, A_2$ ，則

$$A_3A_1 + A_1A_2 = A_3A_2, \text{ 然 } A_3A_1 = -A_1A_3, A_2A_3 = -A_3A_2$$



$$\therefore A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0$$

即不論其間距離與次序如何，恆有

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 = 0 \quad \text{之關係。}$$

這式叫做沙爾定理。

如照此推廣，可知  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

為一直線上任意點，則

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0 \dots (1)$$

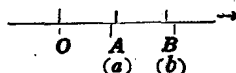
### 3. 在一直線上之二點間的距離

設  $A, B$  為一軸上二點，其坐標各為  $a, b$ ，而  $O$  為坐標原點，則按沙爾定理知

$$OA + AB = OB$$

$$\text{即 } a + AB = b$$

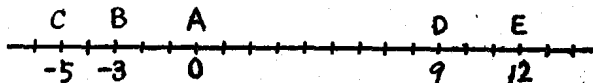
$$\therefore AB = b - a$$



即一直線上之二點間的距離等於終點坐標減去始點坐標。

【例1】設  $A(0), B(-3), C(-5), D(9), E(12)$  為同軸上之五點，試證其適合於沙爾定理。

(證)



$$AB + BC + CD + DE + EA$$

$$= (-3) + (-5 + 3) + (9 + 5) + (12 - 9) + (-12)$$

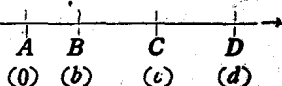
$$= -3 - 2 + 14 + 3 - 12 = 0$$

【例2】設  $A, B, C, D$  為直線上任意四點，試證

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$

(證) 設  $A$  為原點， $B, C, D$  之坐標

各為  $(b), (c), (d)$ ，則



$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}$$

$$= d^2(c-b) + (b-d)^2(-c) + (c-d)^2b + (c-b)(-c)(+b)$$

$$= cd^2 - bd^2 - b^2c + 2bcd - cd^2 + bc^2 - 2bcd + bd^2(-)bc^2(+)+b^2c = 0$$

(註) 欲證在一直線上幾點間距離之問題時，用坐標證明較為簡單。

(例證) 因  $\overline{DA} = \overline{BC} + \overline{CA}$ ，則  $\overline{DA}^2 = \overline{DC}^2 + 2\overline{DC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA}^2$

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} = \overline{DC} \cdot \overline{BC} + 2\overline{DC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA}^2 \cdot \overline{BC} \dots (1)$$

同理得

$$DB^2 \cdot CA = DC^2 \cdot CA + 2DC \cdot CB \cdot CA + CB^2 \cdot CA \dots\dots\dots(2)$$

由(1)+(2), 得

$$\overline{DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA} = \overline{DC^2 \cdot (BC + CA) + CA^2 \cdot BC + CB^2 \cdot CA}$$

$$\text{即 } \overline{DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA} - \overline{DC^2 \cdot BA - BC \cdot CA \cdot BA} = 0$$

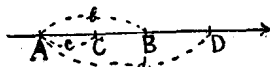
$$\text{故 } \overline{DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + CD^2 \cdot AB + BC \cdot CA \cdot AB} = 0$$

【例 3】設  $A, B, C, D$  為有向直線上之相異四點,

若  $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ , 則  $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ , 試證之。

【證】設  $A$  為坐標之原點,  $B,$

$C, D$  之坐標為  $b, c, d$



$$\text{則 } \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

$$\text{去分母, 得 } 2cd = b(c+d)$$

$$\text{變形為 } c(d-b) = d(b-c)$$

然  $CB = b-c, DB = b-d$  [按沙爾定理]

$$\therefore AC(-DB) = AD \cdot CB$$

$$\therefore \boxed{\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}} \dots\dots\dots(1)$$

【註】若相異四點  $A, B, C, D$  在一直線上, 且滿足(1)之關係時, 則  $A, B, C, D$  成調和列點。

習 題 一

(1) 設  $A(2), B(-3), C(4), D(-2)$  為圓軸上之四點, 試證其適合於沙爾定理。

(2) 求下列各組二點間之距離:

①  $A(-8), B(-12)$

②  $A(-36), B(18)$

③  $A(a+b), B(2a-c)$

④  $A(a+b+c), B(a-b-c)$

(3) 設  $A, B, C, D$  為有向直線上之任意四點,  $M$  為  $AC$  之中點, 且

$$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AD}$$

試證  $BM \cdot MD = MA^2$

- (4) 設  $A, B, C, D$  為一直線上任意四點，試證  
 $AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$
- (5) 設  $A, B, C, D$  成調和列點，而  $A, B$  的坐標為二次方程式  
 $ax^2 + 2bx + c = 0$  之二根，又  $C, D$  的坐標為二次方程式  
 $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$  之二根。試證  $ac' + a'c = 2bb'$

解 答 一

(1) 仿 [例1]， (2) ①  $AB = (-12) - (-8) = -4$ ， ② 54；

③  $a - b - c$ ， ④  $-2b - 2c$

(3) 設  $A$  為原點， $B, C, D$  的坐標各為  $x_1, x_2, x_3$ ，將此代入假設式後，  
 去分母得  $2x_1x_3 = x_2x_3 + x_2x_1$ ，變形為

$$4x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2, (2x_1 - x_2)(2x_3 - x_2) = x_2^2$$

$$\therefore (x_1 - \frac{x_2}{2})(x_3 - \frac{x_2}{2}) = \frac{x_2^2}{4} \quad \therefore MD \cdot MD = MA^2$$

(4) 設  $A$  為原點  $B, C, D$  的各坐標為  $b, c, d$ ，代入證式即得證。

(5) 設  $A, B, C, D$  的坐標各為  $(x_1), (x_2), (x_3), (x_4)$ ，因  $A, B, C, D$

為調和列點，故  $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$

$$\therefore \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = -\frac{x_4 - x_1}{x_1 - x_4}, \text{ 去分母,}$$

$$(x_3 - x_1)(x_2 - x_4) + (x_2 - x_3)(x_4 - x_1) = 0$$

$\therefore (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 2(x_1x_2 + x_3x_4) \dots \dots \dots (1)$ ，由假設將

$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$  及  $x_3 + x_4 = -\frac{2b'}{a'}$ ， $x_3x_4 = \frac{c'}{a'}$  代入 (1)，

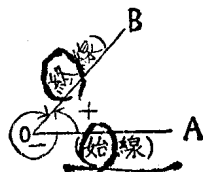
$$\text{得 } \frac{4bb'}{aa'} = 2(\frac{c}{a} + \frac{c'}{a'}) \quad \therefore as' + a'e = 2bb'$$



4. 角

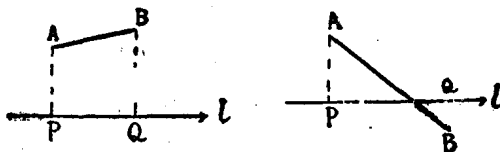
普通幾何學所論二直線的交角，也為絕對量，不計方向。在解析幾何中所論的角，常指有向直線的交角，其定義如下：

平面上之角  $AOB$ ，設想係由一動直線繞其一端點  $O$ ，自  $OA$  位置旋轉至  $OB$  位置所構成。 $OA$  叫做角之始邊， $OB$  叫做終邊， $O$  為頂點，且規定旋轉方向與時針旋轉相反時為正角，相同時為負角。



5. 正射影

自線段  $AB$  至有向直線  $l$  作垂線，如下圖，其垂足各為  $P, Q$ ，則線段  $PQ$  叫做線段  $AB$  在  $l$  上的正射影。



定理一：若線段  $AB$  與  $l$  的交角為  $\theta$ ， $AB$  在  $l$  的正射影為  $A'B'$ ，則不問  $AB$  為正或負，常可以下式表之。  $A'B' = AB \cos \theta$

(證) (i) 若  $AB > 0$ ，過  $A$  引一直線  $l'$  與  $l$  平行且同交直線  $BB'$  於

$M$ ，則按三角函數之定義得  $\cos \theta = \frac{AM}{AB}$

$\therefore AM = AB \cos \theta$

$\therefore AM = A'B'$

$\therefore A'B' = AB \cos \theta$

(ii) 若  $AB < 0$ ，則  $BA > 0$

$B'A' = BA \cos \theta$

$\therefore -A'B' = -BA \cos \theta$

$\therefore A'B' = AB \cos \theta$

