大學用書選譯

工程力學

S. Timoshenko
D. H. Young 著
陳亞通
王御華 譯

教育部出版
正中書局印行

大學用書選譯

工程力學

陳亞通
王御華 譯

S. Timoshenko
D. H. Young 著

正中書局印行
教育部出版

中華民國五十二年九月臺初版
中華民國六十六年九月臺六版

大學用書選譯　工程力學

全一册　基本定價 平裝四元 精裝五元一角
（外埠酌加運費滙費）

著者　S. Timoshenko　D. H. Young
譯者　陳亞通　王御華
發行人　黎元譽
發行印刷　正中書局
（臺灣臺北市衡陽路二十號）
海外總經銷　集成圖書公司
（香港九龍油蔴地北海街七號）
海風書店
（日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地）
東海書店
（日本京都市左京區田中門前町九八番地）

新聞局出版事業登記證　局版臺業字第〇一九九號（4535）同
（1000）

本書係教育部從積存譯稿中選印，列爲大學用書之一。除教育部印製規定册數免費供應僑生閱讀外，由正中書局訂約加印發行。

目　　錄

第一部　靜力學

第二部　動力學

第一章　同平面內之同點力

1.1.　靜力學原理　討論物體受力作用後，仍欲保持平衡狀態之種種條件之學問，是謂靜力學。此學問爲科學中若干最古老之支系之一。遠自埃及與巴比倫等古國，人類即知悉應用靜力學基本原理，以解決建造金字塔及古廟宇所發生之技術問題。公元前三世紀，阿基米德首創槓桿及靜水壓原理，是爲靜力學之始祖。直至十七世紀經牛頓等科學家之相繼努力，力之平行四邊形原理問世之後，靜力學之基本原理乃臻完善，進而逐漸發展成爲今日靜力學之面目。

剛體　本書討論範圍，大部份涉及剛體之平衡。所謂「剛體」，乃指受力之後，仍保持原來形狀之物體。然而吾人日常所見工程結構物如樑、柱等之材料，均非絕對剛體，而實乃此等材料於受設計載重情況之下，其變形甚微而已耳。譬如圖1所示之槓桿，其兩端各掛以同等重量鐵球之後，而分別向下彎曲，如(a)之情形。此時兩球距支點之距略見縮短，惟其量甚微。吾人於討論此槓桿之平衡時，乃將其實際變形因素略而不計，假定該槓桿受力之後，仍保持原來形狀，即如(b)之情形。槓桿距支點兩端等距之處，受等量之力作用，槓桿仍保持平衡。由上例學者可窺見剛體之假定之意義及重要性。

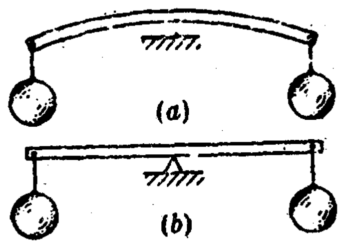

圖　1

若吾人必欲研究圖1中槓桿之強度，或其彎曲量，則該槓桿由彎曲而發生之變形，不能不加以考慮。但研究由物體之變形所引起之影響之學問，乃屬於材料力學或彈性力學之範圍內，本書中不擬作進一步之探討。

至於研究非剛體如液體，氣體等之種種平衡條件之學問，則屬於流體力學之範圍內。本書中凡觸及非剛體之問題時，除其作用於剛體上之壓力或載重外，餘者一概不加以考慮。

力　討論靜力學各種問題之前，首先必需介紹力之觀念。力者，

乃欲改變物體原來平衡狀態時，所需加予該物體之作用之謂也。力之種類甚多。吾人最熟悉者爲重力。又如以手加諸物體上之推力或拉力，尚有太空中各行星彼此間之引力，火車機車之曳力，汽缸中之蒸汽壓力，磁力、風壓力、大氣壓力、兩物體接觸面間之摩擦力等。

各種力中，以重力爲最習見，例如圖2，(a)表示繩 AB 受球 W 之重力，(b)表示繩 AB 受一大小爲 W 之拉力，作用點在 B 點，方向向下。(a)與(b)各表示繩 AB 受一完全相同之力之作用。換言之，球 W 之重力，即球 W 作用於繩 AB 之重力，亦即爲一大小爲 W，方向向下，作用點於 B 點之拉力。

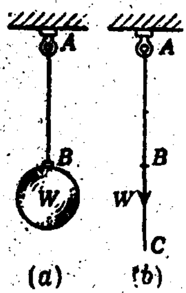

圖 2

由上例可知，吾人每言及力，必須同時顧及下列三種特性：(1)大小，(2)作用點，(3)方向。此謂力之三要素。

表示力之大小，可將該力與一任定之標準單位力相互比較。本書中之習題均係襲用英制單位，以磅爲力之單位。所謂一磅，即指收藏於倫敦古堡中之一精製鉑圓柱體之重量。決定力之大小，通常利用測力計，其構造主要部份爲一精密彈簧，以已知之不同重量掛之，即得不同之伸長量，一經刻定於外殼之後，即可用以測定其他力之大小。

所謂力之作用點，乃假定在物體內之某一點，爲作用於該物體之力之集中點。就實際而言，任何力作用於一物體上，絕不可能集中一點，必分佈於若干面積或體積上。玆復就圖2說明之，球 W 作用於繩 AB 之力，並非作用於繩之 B 點，實際上乃分佈於 B 處之橫斷面上。同理作用於球之重力，並非集中於球體某一點，乃係分佈於整個球體上。然而爲便利起見，吾人往往將分佈於物體上之力，視爲集中於物體之某一點，其效果於討論物體平衡條件之時，並無任何殊異。因是，分佈於整個物體之重力，可視爲集中作用物體體內之某一點，該點即所謂物體之「重心」

通過力之作用點，劃一直線，是爲力之作用線，該直線即爲力之方向線，爲物體受力作用後，沿此線上發生移動傾勢之方向，是爲力

之方向。例如物體受重力作用後，即向地面落下，該落下之方向是爲重力之方向。又如以繩繫物體，則伸張之繩，即作用於物體之力之作用線。故圖1中之AB繩即可表示作用於鈎A處之向下拉力之方向。

凡同時具有方向及大小之數量，稱爲矢量。力即矢量之一種。矢量可以由圖解法以直線線段表之，該線段謂之矢。例如圖2(b)中，球W作用於繩AB之力，即可以直線線段BC表示之。BC線段之長度，依作圖所用之比例尺，量出之數量，即爲該力之大小，向下之箭頭，則表示該力之方向。B點是爲矢之起點；C點是爲矢之終點。無論矢之起點或終點，均可表示力之作用點。矢之起點字母與終點字母連寫之後，上加「—」符號，即可表示該矢。例如圖2(b)中，$\overline{BC}$表示由B向C作用之矢BC。

力之平行四邊形　若干大小不同及方向不同之力同時作用於一物體上之時，則該物體構成一力系。一般靜力學之問題，在求物體受一力系作用後，仍欲保持平衡時所須要之條件。解決此類問題各種之方法，均需依據若干靜力學原理。茲就其中之力之平行四邊形原理加以簡述如下。此原理爲公元1586年史蒂文納斯首先間接應用，事後於公元1687年始經牛頓及瓦利爾兩氏以數學式表示之。

平行四邊形定律　設有兩力，各以矢$\overline{AB}$及矢$\overline{AC}$表之，同作用於一物體之A點（如圖3），其間之夾角爲α，則其作用結果，與由另一單獨力以矢$\overline{AD}$表之作用於A點者完全相同。矢$\overline{AD}$則爲以$\overline{AC}$及$\overline{AB}$爲兩邊所構成之平行四邊形之對角線。

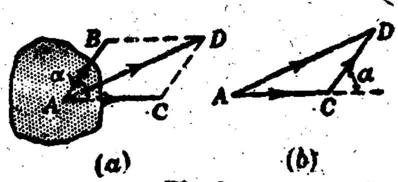

圖　3

以$\overline{AD}$表示之力，謂之$\overline{AB}$與$\overline{AC}$之合力，但相對而言，$\overline{AB}$與$\overline{AC}$兩力亦稱爲$\overline{AD}$之分力。由是觀之，任何一力可分解爲兩分力；任何兩力亦可合成一合力。

上述$\overline{AB}$與$\overline{AC}$之合力$\overline{AD}$不一定視爲平行四邊形之對角線，亦可視爲三角形之一邊[如圖3(b)中之AD邊即是]。至於△ACD之作法，乃先繪矢$\overline{AC}$，自其終點C畫另一矢$\overline{CD}$，與(a)中之AB平行，且大小相等。至此，則第三邊AD即爲$\overline{AB}$及$\overline{AC}$之合力$\overline{AD}$，

其方向爲自矢$\overline{AC}$之始點A至矢$\overline{CD}$之終點D。以此種方法所求得之矢$\overline{AD}$，謂之矢AB及矢$\overline{AC}$之矢量和。換言之，作用於一物體上A點之任何兩力之合力，其大小及方向即爲代表該兩力之兩矢之矢量和，其作用點則爲A點。圖3(b)中之矢，僅表示大小及方向，而不表示作用點，稱爲自由矢。△ACD則稱爲力之三角形。

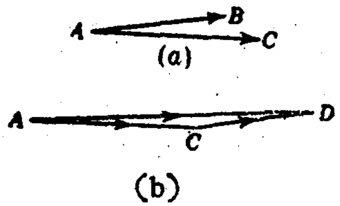

圖 4

若兩力間之夾角甚小（如圖4a之情形）則力之三角形之形狀細狹而長（如圖4b）。若夾角繼續減小，至其極限程度，即兩力沿同一直線方向上作用於一物體，若其方向相同者，則其合成矢之大小爲原來兩矢之和，方向與原來兩矢之方向一致；若其方向相反者，則其合成矢之大小爲原來兩矢之差，方向與其中之較大者之方向一致。吾人可在一直線上任意假定一方向爲正，與其相反者爲負，則上述沿同一直線上作用之兩力，其合力恒等於原來兩力之代數和。

同線力之平衡　由平行四邊形定律，吾人可知凡作用於物體同一點上之兩力，均可由其合力代表。故任何同點之力系，若其合力爲零，該力系必能平衡。至於同一直線上之二力，其大小相等，方向相反時，則可得平衡狀態。茲將上述結論加以普遍化，作爲靜力學第二定律。

平衡定律　任何二力，欲保持平衡之條件，必需大小相等，方向相反，且作用在同一直線上。

通常工程上之靜力學問題，最簡單者爲決定一桿體，兩端受力後之平衡條件。如圖5之桿體，若不計其本身重量，則兩端受力後而欲保持平衡之條件，必須兩力大小相等，方向相反，且作用在同一直線上，（即在其兩作用點之聯線上）。就大多數實際情形而言，其作用點

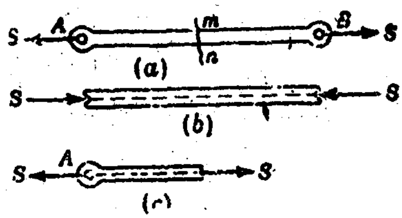

圖 5

之位置恒在桿體之中心軸上，故吾人可假定圖5中所加於桿體兩端之力，必須沿桿體之中心軸上作用。此時，若兩力方向相背，則桿體所

受之力謂之張力（如圖5a）；若兩力方向相同，則桿體所受之力謂之壓力（如圖5b）

今試就圖5a中之桿體，取其自 mn 斷面起之左半部，而討論其平衡條件。若取出之左半部（如 c）欲保持平衡，則必須在斷面上發生一力 S，其大小必須與原來作用於 A 點之 S 力之大小相等，方向則相反，且兩力在同一直線上。此 S 力實乃桿體受張力之後，其右半部對其左半部所發生之內張力，或簡稱桿體之內力。蓋因內力可能為張力，亦可能為壓力，視桿體所受外力之情形而異。實際上此內力乃平均分佈於橫斷面上，其每單位面積上所受力之多寡，稱為應力。

茲復就圖3a之情形而論，若作用於一物體之兩力，其夾角為 α，則自上述之平衡律，吾人可知於其作用點 A 處，施加一力，大小與該兩力之合力相等，方向相反，則可保持該物體之平衡。此加於物體上使之平衡之力，稱為平衡力。

疊加定律及可移性 若兩力於平衡狀態（即其大小相等，方向相反，且作用在同一直線上）時，其合力為零。剛體受此兩力作用之結果，與未受任何力之作用無異。若將此種情形推廣，吾人便得一較普遍之定律如下，亦稱為靜力學之第三定律。

疊加定律 剛體受一已知力系作用之下，若加上或減去任何相互平衡之力系，則其結果不發生絲毫差異。

圖6中所示為一剛體 AB，P 力沿 BA 方向作用於 A 點，如(a)。茲引用疊加定律，在 B 點加上同線之兩力 P' 與 P''，其大小相等，方

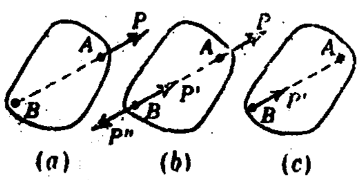

圖 6

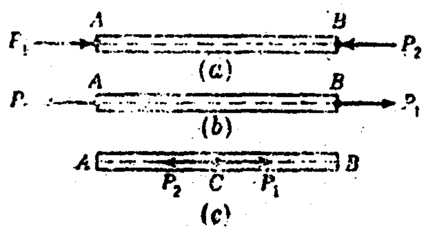

圖 7

向相反，則 P 力對於該剛體之效果不受影響；換言之，即(b)圖與(a)圖之情形完全一致。茲復引用疊加定律，將圖6(b)中之另一互相平衡

之力系（卽P與P''，因該兩力大小相等，方向相反，且同線作用）移去，則僅剩作用於B點之力P'，卽(c)之情形。由上面證法，吾人得一結論，卽任何一力之作用點，可沿該力作用線上前後任意移動，而不影響該力對原來受作用之之剛體之效果。此謂之力之可移性定理。

上述力之可移性定理，其應用範圍當受相當限制，玆舉例以明之。圖7(a)之AB爲一桿體，今在其兩端端點A及B處各加一大小相等，方向相反之力P_1及P_2，桿體AB受P_1及P_2之作用之下保持平衡，但在此情形之下，AB所受之力爲壓力。若引用力之可移性定理，將P_1及P_2各沿其作用線（兩力同線作用）移動至新位置，變成7(b)之情形，卽P_1作用於B點，P_2作用於A點，此時桿AB仍保持平衡，但所受之力則爲張力；若再將P_1及P_2重新移動至另一新位置，變成7(c)之情形，卽P_1及P_2均作用於C點，此時桿AB仍保持平衡，但已無任何內部應力。由此吾人可知作用點之移動，對於一物體之平衡條件而言，並無發生變化，但對於物體內部應力則可引起變化。因是，上述力之可移性定理，僅限於討論剛體之平衡條件時始可應用，於討論剛體內力之問題時，絕對不可隨意應用。

圖8(a)所示爲一物體受P及Q兩力分別作用於A及B兩點。今依力之可移性定理，將P及Q分別沿其作用線方向移至兩作用線之交點C，此時兩力同時作用於C點，當可由其合力R［如圖8(b)所示］代表

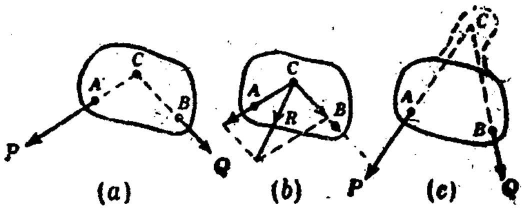

圖 8

之。但若兩力之作用線須延長至物體以外始能相交，則可假定該物體可任意擴張至包括該交點部份［如圖8(c)之虛線部分］，然後依上述方法求出其合力以代表原來兩力。

作用及反作用　靜力學之問題中，若干爲討論物體不能完全自由運動時之平衡條件。物體於任何一方向不能自由運動所受之限制，謂

之約束。圖9(a)所示爲水平面A上置一球，該球可在A面上任意運動，但不能向下移動。圖2(a)所示之球亦然，雖可在空中前後左右擺動，但因受繩AB之約束而不能向下運動。圖10(a)所示則爲一球爲BC所繫而靠於垂直牆上，球之重量W爲繩BC所支持，因而不能發生向下運動。物體受約束之方式甚多，上舉之例爲最富代表性者。

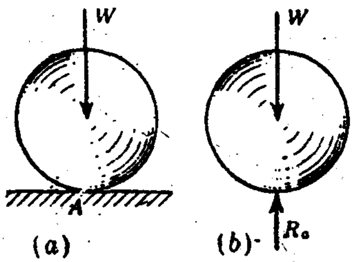

圖　9

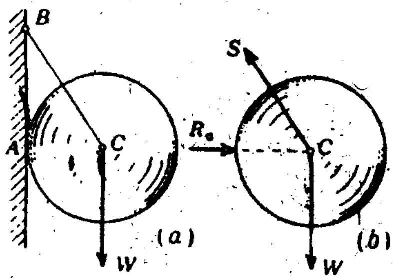

圖　10

一般而言，不能完全自由運動之物體，當其受一力或數力作用後，對於其支持物亦將發生作用力。例如圖2(a)之球，本身受重力作用後，對於繩AB即發生一向下之拉力。同理，圖9(a)中之球，亦於A點處對其水平支持面發生一向下之鉛直推力。至於圖10(a)中之球，，除於繩BC發生一向下之拉力外，同時亦對於其左面之牆於A點處發生一推力。由上述各例中，凡受約束之物體，對其支持物發生一作用力，則亦可引起支持物對該物體發生相反之作用，此現象是爲靜力學之第四定律。

作用及反作用定律　施作用力於任何支持物之上，必自該支持物引起一等量而反向之反作用力，換言之，作用力與反作用力，大小相等，方向相反。此定律實際乃借引牛頓第三運動定律之內容，將其敍述方式稍加改變，以便於討論靜力學之問題而已耳。

自由體圖　分析受約束物體之平衡時，吾人往往可假想將其支持物移去，而代以該支持物對物體發生之反作用。就圖9(a)而言，若將水平支持面移去，而代以水平支持面對球體之反作用 R_a，則其效果不變。至於 R_a 之作用點，必爲原來球體與水平面之接觸點A。又由兩力之平衡定律，吾人可得該反作用 R_a 之方向必鉛直向上，其大小

則與球之重量W相等。圖 9 (b) 所示之球體，乃支持物已除去之後，代以反作用力，且各力均以矢量表之，此種圖形稱爲自由體圖解。

圖10(b)爲將(a)中之支持物移去，代以反作用後，所得之球之自由體。此時作用於球體上有三力，即牆對球體之反作用力R_a，繩BC對球體之拉力S，及球受之重力W。因繩對於球體C之拉力，必沿其本身方向作用，故S之方向乃通過C點而與(a)之BC方向平行，其大小仍爲未知數。R_a之作用點爲牆與球之接觸點A點，其作用線通過C點之水平線（因吾人假定牆之表面爲一完全光滑表面，故僅能發生與該表面垂直方向上之反作用），其大小亦爲一未知數。至於S及R_a之大小如何決定，將以後論及之。

由前文可知凡受約束之物體，必同時受有兩種力之作用，即已知力，或稱主動力，及反主動力。就圖10(b)而言，球所受之重力W爲主動力，代替支持物之力S及R_a等爲被動力。若物體欲保持平衡，則主動力與被動力所構成之力系必須平衡。因於研究任何受約束物體之平衡條件之際，吾人必先有作用於物體之力系，而表明該力系之方式，則須借用自由體圖解。故於分析每一靜力學問題之前，首先必能繪出正確無誤之自由體圖，自由體圖解一旦發生差誤或遺漏，則而後之演算均將徒勞無功。

玆將靜力學之基本問題扼要重述如下：吾人先有一部份或完全受約束之物體，受力作用之後仍保持靜止（亦即平衡）狀態，然後將物體之支持物移去，將所有作用於物體上之主動力及被動力均以矢量表示（即繪出該物體之自由體圖）然後研究若欲該物體保持平衡，則此力系必須具備之條件如何（當然其合力必需爲零）。

1.2. 力之合成與分解 **力之合成** 將一已知複雜力系減縮爲另一最簡單之力系，而與原複雜力系之作用相等，此步驟稱爲力之合成。設有同面數力爲F_1, F_2, F_3……等，同作用於物體之一點，則此數構成之力系，可依平行四邊形定律，逐漸將諸力合成爲一個合力，譬如圖11(a)所示之物體，受F_1，F_2，F_3及F_4四力同作用於A點。欲將此力系合成一個合力，可依次先求出F_1及F_2之合力$\overline{AC}$，再求出$\overline{AC}$與F_3之合力$\overline{AD}$ 此時$\overline{AD}$當代表F_1，F_2及F_3三力之合力，

最後再求出$\overline{AD}$與F_4之合力R。此R卽爲$F_1, \cdots\cdots, F_4$構成力系之合力，依此步驟類推，一已知力系中無論包括任何個數之力，若係同面力，且作用在物體之同一點，均可求得其單一合力。

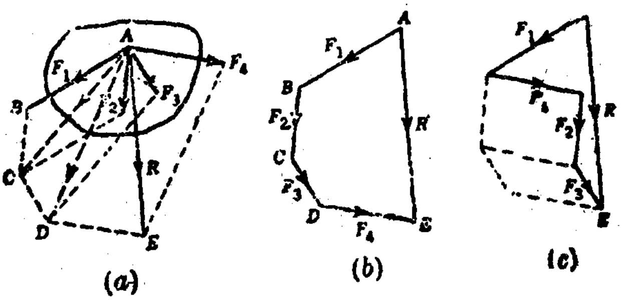

圖 11

圖11(b)乃爲由幾何作圖法以求最終力R，惟此法中每一已知力均由一矢量代表。今試由代表F_1之AB矢量開始，由任意點A作AB與圖11(a)之F_1平行。再由B點作代表F_2之BC矢量與圖11(a)之F平行。如是以往，至E點爲止，則所成之力系多邊形$ABCDE$與(a)中之多邊形$ABCDE$完全相同，且由AB矢量之起點A與DE矢量之終點E所聯成之$\overline{AE}$矢量，卽爲所欲求之合力R，其作用點當然必在圖11(a)之A點處。圖11(b)中之多邊形$ABCDE$稱爲力之多邊形，其合力則爲該多邊形之閉合邊。此多邊形之作法，往往由第一矢量之起點開始，至最末矢量之終點止。由是，吾人知任何同面上同點之力系，其合力可由作圖證法繪出一力之多邊形，而求其矢量和。一力系中包含力之個數較多之時，用此法求其合力，當較由逐次使用平行四邊形法求其合力者爲便當。

由上法求得之合力R乃一矢量和，與表示各已知力之自由矢之次序無關。譬如圖11(c)所示者，先作F_1，次加上F_4，再次爲F_2及F_3，然其所得之多邊形之閉合邊，仍與(b)圖中之R相同。

若所有已知力均沿同線作用，則此特殊情形之力之多邊形實爲一直線，此時，其矢量和亦卽其代數和，換言之，其合力卽爲所有分力之代數和。

若最末矢量之終點與第一矢量之起點重合，則表示合力R等於零

，亦卽該力系互相平衡之意。

力之分解　由若干分力代替單一力，而使與原來之單一力之作用相同，此步驟稱爲力之分解。最習見者爲由兩個分力代替單一力之問題。由平行四邊形定律，吾人可將一已知力R分解成相交於一點之任意兩分力P及Q，但有下列兩種可能情形

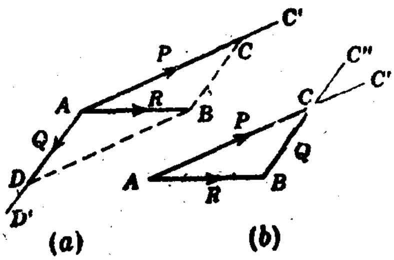

圖 12

1. 已知兩分力之方向，欲求各分力之大小。試設$\overline{AB}$矢量代表已知力R[如圖12(a)所示]，其分力P及Q之方向爲已知AC'線及AD'線之方向。欲求P及Q之大小時，可自B點作BC與BD兩線分別與AD'及AC'平行，而與AC'及AD'分別相交各得交點C及D。則$\overline{AC}$矢量與$\overline{AD}$矢量卽代表所欲求之分力P及Q。

但吾人亦可由力之三角形ABC[如圖12(b)所示]以求R之分力P及Q，其法乃自A點引AC'線，自B點引BC''線，各與P及Q之已知方向平行，得一交點C。則$\overline{AC}$矢量與$\overline{BC}$矢量卽代表所欲求之分力P及Q。分力P及Q之作用點，可向R線上任定一點，而其作用效果與原R力一致。若兩分力彼此相互垂直，則此兩分力稱爲直角分力。

2. 已知兩分力中其一之大小及方向，欲求另一分力之大小及方向。試設圖12(a)中之R及P爲已知，換言之，卽$\overline{AB}$矢量及$\overline{AC}$矢量爲已知，則可先作力之三角形之R及P兩邊，卽圖12(b)之$\overline{AB}$矢量及$\overline{AC}$矢量，然後將兩矢量之終點C點及B點聯結，便得表示另一分力Q之$\overline{CB}$矢量。

至於如何將一已知力分解成同平面三分力之問題，卽令欲求之三分力之方向均爲已知，因在此情形之下，其中一力可任意定其大小，仍可定出其他兩分力，故此問題屬不定解問題，一般言之，欲將一力分解成同平面同點之兩個以上之分力，除非其中任何兩分力之大小及方向固定，否則必屬不定解問題。