JP Olympic

金牌之路

竞赛辅导

主编 刘诗雄

高中数学

陕西师范大学出版社

读金牌之路 圆金牌之梦

金牌之路

竞赛辅导

高中数学

主　编：刘诗雄
编　写：边红平　郭希连
　　　　岑爱国　姚华鹏
　　　　刘诗雄

陕西师范大学出版社

图书代号:JF3N0190

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛辅导/刘诗雄主编. - 西安:陕西师范大学出版社,2000.6(金牌之路丛书)

ISBN 7-5613-1765-4

Ⅰ.高… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学-竞赛-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09675 号

责任编辑	张小燕
责任校对	李亚莉
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　制	陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	17.375
插　　页	2
字　　数	410 千
版　　次	2003 年 7 月第 2 版
印　　次	2003 年 7 月第 1 次
定　　价	19.00 元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070-00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)5307864　5233753　5251046(传真)

E-mail:　if-centre@snuph.com

前 言

金牌教练 倾心铸造

《金牌之路》丛书由培养国际金牌获得者的全国一流专家联袂编写,涉及到10个省市20个中学的26位作者。他们培养的学生获得国际及国内奖牌数均在全国名列前茅。

著名金牌教练、特级教师张大同自1991年以来培养的学生获国际物理竞赛金牌8枚、银牌1枚,这在全国是独一无二的;

武钢三中特级教师刘诗雄培养的学生获国际数学竞赛金牌7枚;

湖南师大附中特级教师李安等人培养的学生获国际化学竞赛金牌5枚、银牌2枚;

特级教师高建军培养的学生获国际生物竞赛金牌2枚、银牌3枚;

特级教师江文哉培养的学生获国际计算机竞赛金牌5枚、银牌1枚、铜牌1枚。

他们在长期的教学和竞赛辅导中,积累了丰富的参赛经验,丛书汇集了他们培养金牌得主的良方妙计。

竞赛辅导 引路夺冠

新版的特点:融入了最新的教改理念,沉淀了专家的高超智慧,展示了奥赛的国际水平,记载了中国的竞赛历程。

新版的体例:以我国现行的竞赛大纲为依据,将竞赛大纲涉及的内容按专题讲座的形式编写,每个专题作为一讲,每讲分四个部分进行辅导。

第一部分:竞赛导入。全面介绍竞赛中涉及的问题。精析重点,分解难点。

第二部分:解法点拨。提出问题,介绍解决问题的策略。运用方法,点拨解题思路,以达到激活思维、灵活运用知识的目的.

第三部分:点面突破。通过例题,展示知识的综合利用和解题方法的灵活运用,达到点面突破。

第四部分:实战冲刺。有针对性地选择和设计一些对竞赛有指导意义的名题、佳题、新题,为读者提供一个强化知识、开阔视野、提高能力的机会。

书后附有参考答案,对较难的题目,给出了解答提示。

竞赛辅导将伴随您走向金牌之路,上名牌学校,圆金牌梦。

目录

第一讲 集 合

竞赛导入

集合是一个基本的、原始的概念,它已渗透到了数学的各个分支,高中代数教材一开始描述性地给出了这一概念.

(一) 元素与集合

设 A 是一个集合,a 是集合 A 的元素,将这一事实记为 $a\in A$,读作 a 属于 A;如果 a 不是 A 的元素,记作 $a\notin A$,读作 a 不属于 A.

给出集合 A 及一个对象 x,“$x\in A$”与“$x\notin A$”两者必居其一.

设集合 $A=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$,判断一个对象 a 是否属于 A,等价于判断 a 是否具有性质 P.

集合中的元素是确定的.例如“比 1 大得多的数的全体”就不能形成集合,这是因为“比 1 大得多”这一标准具有不确定性.

集合中的元素是互异的.例如方程“$x^2-2x+1=0$”的解集为 $\{1\}$,而非 $\{1,1\}$.

集合中的元素是无序的.例如 $\{1,2\}=\{2,1\}$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$;含有限个元素的集合称为有限集,如 A 是有限集,则用 $|A|$ 表示 A 的元素个数;含无限个元素的集合,叫无限集.

(二) 集合与集合

(1)若 A 中的元素都是 B 中的元素,则称 A 为 B 的子集,记为 $A\subseteq B$.若 $A\subseteq B$,且 B 中至少有一个元素 $b\notin A$,则 A 叫做 B 的一个真子集.若 B 的元素有 n 个,则 B 的子集有 2^n 个,B 的真子集有 2^n-1 个.

空集是任意集合的子集,是任意非空集合的真子集.

对于任意集合 A、B、C，有

1°. $A\subseteq A$（自反性）

2°. $A\subseteq B, B\subseteq A\Rightarrow A=B$（反对称性）；

3°. $A\subseteq B, B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$（传递性）；

(2) $A\cap B=\{x\mid x\in A$, 且 $x\in B\}$.

(3) $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(4) $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(5)给出全集 I，则 $\overline{A}=\{x\mid x\in I$, 但 $x\notin A\}$.

$\overline{A}\cup B=I\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(6) $A\cap A=A, A\cup A=A$（幂等律）.

(7) $A\cap I=A, A\cup I=I, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$（同一律）.

(8) $A\cap\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=I, \overline{\overline{A}}=A, \overline{I}=\varnothing, \overline{\varnothing}=I$（互补律）.

(9) $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$（交换律）.

(10) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$（结合律）.

(11) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$（分配律）.

(12) $A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$（吸收律）.

(13) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$（反演律）.

解法点拨 JIEFA DIANBO

在解与集合有关的题时，要明确集合中的元素是什么. 如"集合 $M=\{$抛物线$\}$, $N=\{$直线$\}$，那么 $M\cap N$ 中的元素个数是多少?"此题中 M 中的元素是抛物线，N 中的元素为直线，M 与 N 显然无公共元素. 又如集合 $\{3,4\}$ 与 $\{(3,4)\}$，$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 均是不同的，需明确区分. 集合中元素的互异性也是要注意的.

由于 $\varnothing$ 的特殊性，解题时常被忽略而造成答案的不严密甚至错误，因此要特别注意 $\varnothing$.

在计算有限集元素数目时常会用到容斥原理，还可结合文氏图.

【点面突破】

例 1 已知集合 $A=\{y\mid 2<y<3\}$，$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$，判断 x 与 A 的关系.（1983 年全国高中数学竞赛题）

分析 判断 x 与 A 的关系，就是判断 x 是否满足 $2<x<3$. 这里涉及对数运算：$\log_a b=(\log_b a)^{-1}(b\neq 1)$，$\log_{a^{-1}}b^{-1}=\log_a b$.

解 $x=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{10}=\log_3 10$，

又 $2=\log_3 3^2<\log_3 10<\log_3 27=3$，

故 $x\in A$.

思维迁移 设 A 是两个整数平方和的集合，即 $A=\{x\mid x=m^2+n^2, m, n\in\mathbf{Z}\}$.

(1) 证明：若 $s, t\in A$，则 $st\in A$.

(2) 证明：若 $s, t\in A$，$t\neq 0$，则 $\frac{s}{t}=p^2+q^2$，其中 p, q 是有理数.

证 (1) 由 $s, t\in A$，可设

$$s=m_1^2+n_1^2, t=m_2^2+n_2^2$$

其中 m_1, m_2, n_1, n_2 均为整数. 于是

$$\begin{aligned} st &= (m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2) \\ &= m_1^2m_2^2+2m_1m_2n_1n_2+n_1n_2^2+m_1^2n_2^2-2m_1m_2n_1n_2+m_2n_1^2 \\ &= (m_1m_2+n_1n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2 \end{aligned}$$

即 st 是两个整数的平方和，故 $st\in A$.

(2) 由于 $s,t\in A$，由(1)可知，$st\in A$. 于是可令 $st=m^2+n^2$，$m,n\in\mathbf{Z}$，又 $t\neq0$. 因此：

$$\frac{s}{t}=\frac{st}{t^2}=\left(\frac{m}{t}\right)^2+\left(\frac{n}{t}\right)^2.$$

而 $\frac{m}{t}$，$\frac{n}{t}$ 均为有理数，故命题得证.

例 2 求集合 $\left\{x\middle|-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},1<x\in\mathbf{N}\right\}$ 的真子集的个数.（1996 年全国高中数学竞赛题）

分析 先求出所给集合的元素的个数 n，那么真子集的个数即为 2^n-1 个.

解 $\left\{x\middle|-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},1<x\in\mathbf{N}\right\}$

$=\left\{x\middle|-1\leqslant\dfrac{1}{\lg\frac{1}{x}}<-\frac{1}{2},1<x\in\mathbf{N}\right\}$

$=\{x\mid 1\leqslant\lg x<2,1<x\in\mathbf{N}\}$

$=\{x\mid 10\leqslant x<100,1<x\in\mathbf{N}\}$

此集合中元素个数为 90. 故其真子集个数为 $(2^{90}-1)$ 个.

例 3 设 S 为集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的具有下列性质的子集：S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除. 那么 S 中元素最多可能有多少个？（第四十三届美国中学数学竞赛题）

分析 对于两个不同的自然数 a 与 b，如果要求 $7\nmid(a+b)$，就是要求它们的和被 7 除所得的余数不为 0. 我们把集合 $\{1,2,\cdots,50\}$ 按照其中元素被 7 除所得的余数相同与否进行归类，余数相同的组成一个集合，这样得到 7 个子集，然后从这 7 个子集中适当抽取满足题意的元素组成集合 S.

解 将集合 $A=\{1,2,\cdots,50\}$ 划分为 7 个子集：A_0,A_1,A_2

$\cdots,A_6$,其中 A_i 中的每个元素除以 7 后余数为 $i(i=0,1,2,\cdots,6)$,即

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$,

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$,

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$,

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$,

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$,

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$,

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$.

S 最多包含 A_0 的一个元素.但是,若 S 包含其他任何一个子集的一个元素时,则它必可以包含这个子集的全部元素.因为 A_1 包含 8 个元素,其他每个子集包含 7 个元素,且 S 不能同时包含 A_1 与 A_6 的元素,或者 A_2 与 A_5 的元素,或者 A_3 与 A_4 的元素.故最大子集 S 包含 $1+8+7+7=23$ 个元素.

知识互动 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质:① P 中的元素,有正数,有负数;② P 中的元素有奇数,有偶数;③ $-1\notin P$;④ 若 $x,y\in P$,则 $x+y\in P$,试判断实数 0 与 2 和集合 P 的关系.

解 由④知若 $x\in P$,则 $kx\in P(k\in\mathbf{N})$.

(1) 由①可知存在 $x,y\in P$,且 $x>0,y<0$,从而 $xy\in P$ (因 $x\in\mathbf{N}_+$).另一方面,

$-yx=|y|x \qquad (|y|\in\mathbf{N}_+)$

故 $-yx\in P$,由④ $0=xy+(-xy)\in P$.

(2) 反证法.假若 $2\in P$,则 P 中的负数全为偶数,不然的话,当 $-2k-1\in P(k\in\mathbf{N}_+)$时,有:

$(-1)=(-2k-1)+k\cdot 2 \quad \in\mathbf{P}$,与③矛盾,

于是由②知 P 中必有正奇数.

设 $-2m,2n-1\in P\ (m,n\in\mathbf{N}_+)$,

我们总可以取适当的正整数 q,
使 $q\cdot|-2m|>2n-1$,
则负奇数 $-2qm+(2n-1)\in P$.
前后矛盾.故 $2\notin P$.

例 4 对任意非空实数集 S,令 $\sigma(S)$为 S 的全部元素之和.已知由 n 个正整数组成的集A,考虑 S 跑遍A 的非空子集时,所有不同的和 $\sigma(S)$组成的集.求证这些和可以分为 n 类,每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2.(1996 年美国数学奥林匹克竞赛题)

分析 如果找出了一种分类方法,就得到了本题的解.

证 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$a_1<a_2<\cdots<a_n$.令 $f_j=a_1+a_2+\cdots+a_j$,$e_j=\max\{a_j,f_{j-1}\}$,则 $f_j=f_{j-1}+a_j\leqslant 2e_j$($1\leqslant j\leqslant n$,定义$f_0=0$).

显然和 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}$($i_1<i_2<\cdots<i_t$)必在某个区间$(f_{j-1},f_j]$中.因为

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}>f_{j-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{j-1}$$

所以 $i_t\geqslant j$,从而

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}>a_j$$

于是 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}\in[e_j,f_j]$.

这样 $\sigma(S)$被分为 n 类,在 e_j 与 f_j 之间的和组成第 j 类($1\leqslant j\leqslant n$).f_j 本身在第 j 类,而 $e_j=f_{j-1}$时,e_j 不在第 j 类;$e_j>f_{j-1}$时,e_j 在第 j 类.每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2.

例 5 设 $S=\{1,2,3,4\}$,n 个数依次排成一列:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 且具有下列性质,对于 S 的任一非空子集 B,在该数列中有相邻的$|B|$项恰好组成集合 B.求 n 的最小值.(1997 年上海高中数学竞赛题)

分析 因为含 S 中的一个固定元素的二元子集有 3 个,

所以 S 中的任一元素在数列中至少出现两次,由此估算 n 的最小值为 8.

解 S 中的每个数在数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中至少出现 2 次. 这是因为,若 S 中某个数在这个数列中只出现 1 次,则由于含此数的 S 的二元子集共有 3 个,但在数列中含此数的相邻两项至多只有两种取法,因而 3 个含这个数的二元子集不可能都在数列相邻两项中出现.

由此 $n\geqslant 8$.

另一方面,8 项数列:3,1,2,3,4,1,2,4 满足条件. 故 n 的最小值为 8.

知识互动 只证明 $n\geqslant 8$ 时,还不能说明 n 的最小值为 8. 接下来的构造说明 n 能取 8.

例 6 设 $A=(0,1)\cap Q$,其中 Q 是有理数集,且任给 $\frac{p}{q}\in A$,p 与 q 是互质的正整数,定义 $I\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{4q^2},\frac{p}{q}+\frac{1}{4q^2}\right)$. 求证:集合 $\bigcup\limits_{\frac{p}{q}\in A} I\left(\frac{p}{q}\right)$ 不覆盖开区间 $(0,1)$.

分析 因为 A 不含无理数,那么本题的思路就只能从无理数着手. 在区间 $(0,1)$ 中取一无理数 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,只需证明对任意 $\frac{p}{q}\in A$,$\frac{\sqrt{2}}{2}\notin I\left(\frac{p}{q}\right)$,那么 $\frac{\sqrt{2}}{2}\notin\bigcup\limits_{\frac{p}{q}\in A} I\left(\frac{p}{q}\right)$. 由此 $(0,1)\not\subseteq\bigcup\limits_{\frac{p}{q}\in A} I\left(\frac{p}{q}\right)$.

证 任取 $\frac{p}{q}\in A$.

(1) 若 $\frac{p}{q}>\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $2p^2-q^2\geqslant 1$,且 $q>p$.

故有
$$\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{4q^2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{8q^2(2p^2-q^2)-8pq+1}{16q^4}$$
$$\geqslant\frac{8q^2-8pq+1}{16q^4}>\frac{1}{16q^4}>0,$$

又 $\because \frac{p}{q}-\frac{1}{4q^2}>0$,

故 $\frac{p}{q}-\frac{1}{4q^2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}\notin I\left(\frac{p}{q}\right)$.

(2)若$\frac{p}{q}<\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $2p^2-q^2\leqslant-1$ 且 $q-p\geqslant1$,故有

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{1}{4q^2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{8q^2(2p^2-q^2)+8pq+1}{16q^4}$$

$$\leqslant\frac{-8q^2+8pq+1}{16q^4}\leqslant\frac{-8q+1}{16q^4}<0.$$

故 $\frac{p}{q}+\frac{1}{4q^2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}\notin I\left(\frac{p}{q}\right)$.

综合(1)与(2)得$\frac{\sqrt{2}}{2}\notin I\left(\frac{p}{q}\right)$,所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\notin\bigcup\limits_{\frac{p}{q}\in A}I\left(\frac{p}{q}\right)$. 而$\frac{\sqrt{2}}{2}\in$ $(0,1)$. 故$(0,1)\not\subseteq\bigcup\limits_{\frac{p}{q}\in A}I\left(\frac{p}{q}\right)$.

知识互动 当 $a\notin A_i$, $i=1,2,\cdots$时,则有 $a\notin\bigcup\limits_i A_i$.

例7 $\mathbf{Z}$表示整数集,$M_1=\{x^2+Ax+B\mid x\in\mathbf{Z}\}$,$M_2=\{2x^2+2x+c\mid x\in\mathbf{Z}\}$.

求证:对于任意整数 A 与 B,总能找到整数 C,使 $M_1\cap M_2=\varnothing$.(第三十六届 IMO 预选题)

证 $2x^2+2x+c\equiv C(\mathrm{mod}4)$.

若 A 为奇数,则

$y^2+Ay\equiv y^2+y\equiv0(\mathrm{mod}2)$.

即 $y^2+Ay+B(\mathrm{mod}4)$仅有两类:一类为 2,一类为 0.

若 A 为偶数,则 y 为偶数时,

$$y^2+Ay\equiv0(\mathrm{mod}4).$$

y 为奇数时,则

$$y^2+Ay\equiv1+A(\mathrm{mod}4).$$

即 $y^2+Ay+B(\mathrm{mod}4)$仍仅有两类.

因此,可取 C 不属于以上两类(mod4),此时 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

知识互动 所有整数被 4 除的余数有四种情形,按余数将所有整数归为四类.本题证明中,模 4 的选取是关键,整数 C 存在且有无限多个.

例 8 设 S 是数集 $\{1,2,3,\cdots,1989\}$ 的一个子集,且 S 中任意两个数的差不等于 4,也不等于 7.问集合 S 中最多可以包含多少个数?

分析 注意到 4 与 7 之和是 11,我们先观察前 11 个自然数 1,2,3,…,11,发现其中 1,4,6,7,9 满足题设条件,而这 5 个数分别加上 $11k$(k 为非负整数)后的 5 个数仍满足题设条件,由此解题思路已十分清楚了.

解 数集 $\{1,4,6,7,9\}$ 中任意两元素之差都不等于 4 或 7,而数集 $A_k = \{1+11k, 4+11k, 6+11k, 7+11k, 9+11k\}$($k \geqslant 0, k \in \mathbf{Z}, 11k+9 \leqslant 1989$)也具有同样的性质.另一方面所有 A_k 的并集中任意两数之差也都不等于 4 或 7.把所有 A_k 的并集记为 S.注意到 $1989 = 11 \times 180 + 9$,此时 S 中含有 $5 \times 180 + 5 = 905$ 个元素.

下面 S 中不可能含有更多的元素.若不然,则数组(1,2,…,11),(12,13,…,22),…,(1970,1971,…,1980),(1981,1982,…,1989)中至少有一组中要取出六个数,使得两两之差不是 4 也不是 7.不妨考虑(1,2,…,11)这一组数,将其划分为 5 组(4,7,11),(3,10),(2,6),(5,9),(1,8)其中至少有一组必须取两个数.显然后四对数的每一对都不能同时取出,只能在第一组中取 4,7,于是(3,10)中只能取 10,(2,6)中只能取 2,(5,9)中只能取 5,(1,8)中两数均不能取,也就是说取不到 6 个数.故 S 最多只能含 905 个数.

知识互动 设数组$(a_1, a_2, \cdots, a_k)$具有性质 P,如果数组$(a_{1+nT}, a_{2+nT}, \cdots, a_{k+nT})$仍具有性质 P,其中 T 为正常数,$n \in \mathbf{N}$,那么我们在研究与性质 P 有关的问题时,可以只考虑局部(只研究一个数组),从而推知整体(所有的数组).

例 9 设 $a,b\in\mathbf{R}$，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 xOy 内的点集. 讨论是否存在 a 与 b，使 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a,b)\in C$.

分析 讨论存在性问题可以先假设存在实数 a 与 b 使结论成立，找出结论成立的必要条件. 如果存在，再证明它的充分性.

解

解法一 如果存在实数 a 和 b，使 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，那么就一定存在整数 m 煌 n 使$(n,na+b)=(m,3m^2+15)$，即

$$n=m \text{ 且 } na+b=3m^2+15,$$

也就是存在整数 n，使得 $na+b-(3n^2+15)=0$.

如果存在实数 a 和 b，使$(a,b)\in C$，那么必有 $a^2+b^2\leqslant 144$.

因此，实数 a,b 满足

$$\begin{cases} na+b-(3n^2+15)=0 \quad (n\in\mathbf{Z}), & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144. & ② \end{cases}$$

①式表明点 $P(a,b)$在直线 $l:nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，设原点到 l 的距离为 d，于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 12,$$等号只在 $n^2=3$ 时成立，而 $n\in\mathbf{Z}$，故等号不能成立，因此 $d>12$.

因为点 P 在直线 l 上，点 P 到原点的距离$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，这使 $a^2+b^2\leqslant 144$ 不可能成立.

所以不存在实数 a 与 b，使①与②同时成立. 由此不存在 a 与 b，使 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a,b)\in C$.

解法二 由解法一中①式得，$b=3n^2+15-an$，代入②整理得到关于 a 的不等式

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0. \qquad ③$$

它的判别式