

716077 高等学校试用教材

微分与积分学

上册

(苏) N. PISKUNOV 著



吉林人民出版社

高等学校试用教材

微分与积分学

上 册

〔苏〕 N. Piskunov 著

邓本让 王 蕙 等译

景毅 ~~李沐荪~~ 校

吉林人民出版社

内 容 提 要

原书分 I、II 两卷,共廿一章,中文译本分上、下两册出版。上册包括的内容有:数·变量·函数、极限·函数的连续性、导数与微分、可微分函数的一些定理、函数性态的研究、曲线的曲率、复数·多项式、多元函数、微分在立体几何中的应用、不定积分、定积分、定积分在几何与力学中的应用等十二章。

本书具有系统完整、内容广泛、论述清楚和简明易懂等特点。可作为高等工科院校电子、电信、电机、仪器、光学、机械和工程等专业的试用教材。也可作为在高等工科院校担任基础数学课的教师、研究生的教学参考书和工矿企业有关工程技术人员自学参考书。

高等学校试用教材

微 分 与 积 分 学

上 册

〔苏〕 N·PISKUNOV 著

邓本让 王 蕙 等译

景 毅 李沐荪 校

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春市和顺印刷纸箱厂印刷

*

787×1092毫米32开本 20.125印张 4 插页 445,000字

1983年9月第1版 1983年9月第1次印刷

印数: 1—8,924 册

统一书号: 13091·142 定价: 2.10元

译者说明

为了向外国学习先进的科学技术，改进和充实我们的教学内容，提高教学质量，为我国“四化”建设事业培养出更多的优秀人材，经我院基础部主任景毅教授，仪器系副主任李沐荪副教授和数学教研室杨天行副教授的推荐，我们翻译出N. Piskunov著《微分与积分学》一书。

原书在苏联从1964—1981年曾两次再版，七次印刷，后又译成英文版本在印度作为最佳教材推荐使用。我们认为在我国现行高等工科院校《高等数学》教材中，尚缺这类系统完整、内容广泛、论述清楚、简明易懂的书籍。

从本书内容来看，对电机、电子、电信、仪器、光学、机械和工程等类专业比较适合。

全书分上、下两册，共计廿一章。上册包括十二章，其中主要内容有：数·变量·函数、极限·函数的连续性、导数和微分、可微分函数的一些定理、函数性态的研究、曲线的曲率、复数·多项式、多元函数、微分在立体几何中的应用、不定积分、定积分、定积分在几何与力学中的应用。下册包括九章，其中主要内容有：常微分方程、重积分、曲线积分和曲面积分、级数、付里叶级数、数学物理方程，运算微积及其应用、概率论与数理统计初步、矩阵等。并在各章后面均配有相应的习题及答案。

这部书经过我院仪器等专业一年来的试用结果，我们认为它具有以下优点：

这部书不仅考虑到高等数学应具有的基本理论和方法，

8037104 - 1 -

而且考虑到了高等工科院校对高等数学教学要求的特点，取材精练，章节之间衔接紧密，理论与实例配合恰当，基本概念与直观图表结合较多，因此使读者容易接受和掌握。它不仅是一部工科院校较好的高等数学教材，而且也是一部较好的高等数学入门的自学参考书。

这部书的翻译工作是在景毅教授和李沐荪副教授直接参加校对和指导下进行的。参加本书翻译工作的同志有：

邓本让（上册第一、二、三、四章；下册第四、五、六、八章），陈俊文（下册第一、二章），王蕙（上册第七、八章），赫长城（上册第十一、十二章），张琪（上册第五、六章），胡锡全（下册第七、九章），范传瑞（上册第十章），周静娥（下册第三章），王秀春（上册第九章）。

邓本让和李国相同志最后整理和统一了全书译稿。

在翻译过程中，我们对原书的个别不妥之处，作了必要的更正。

译者

一九八二年五月

于长春地质学院。

目 录

第一章 数·变量·函数	(1)
1.1 实数·实数表示为数轴上的点	(1)
1.2 实数的绝对值	(3)
1.3 变量和常量	(4)
1.4 变量的范围	(5)
1.5 有序变量·递增和递减的变量·有界变量	(7)
1.6 函数	(8)
1.7 表示函数的方法	(9)
1.8 基本初等函数·初等函数	(12)
1.9 代数函数	(17)
1.10 极坐标系	(19)
第一章 习 题	(21)
第二章 极限·函数的连续性	(23)
2.1 变量的极限·无穷大量	(23)
2.2 函数的极限	(26)
2.3 趋向无穷大的函数·有界函数	(30)
2.4 无穷小量及其基本性质	(34)
2.5 关于极限的基本定理	(38)
2.6 当 $x \rightarrow 0$ 时函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限	(44)
2.7 数 e	(46)
2.8 自然对数	(52)
2.9 函数的连续性	(53)
2.10 连续函数的一些性质	(59)
2.11 无穷小量的比较	(61)
第二章 习 题	(65)

第三章 导数和微分	(71)
3.1 运动的速度	(71)
3.2 导数的定义	(73)
3.3 导数的几何意义	(76)
3.4 函数的可微性	(77)
3.5 函数 $y = x^n$ 的导数, n 是一个正整数	(80)
3.6 函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 的导数	(82)
3.7 常量的导数 · 常量与函数积的导数 · 和、积以及商的导数	(84)
3.8 对数函数的导数	(91)
3.9 复合函数的导数	(92)
3.10 函数 $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \ln x $ 的导数	(95)
3.11 隐函数及其微分法	(97)
3.12 关于任意实指数的幂函数, 一般指数函数和复合指数函数的导数	(99)
3.13 反函数及其微分法	(102)
3.14 反三角函数及其微分法	(106)
3.15 微分法的基本公式	(112)
3.16 函数的参数表示	(113)
3.17 用参数形式表示曲线方程	(116)
3.18 参变量函数的导数	(119)
3.19 双曲函数	(121)
3.20 微分	(125)
3.21 微分的几何意义	(130)
3.22 高阶导数	(132)
3.23 高阶微分	(134)
3.24 隐函数和参变量函数的高阶导数	(136)
3.25 二阶导数的力学意义	(140)
3.26 切线和法线方程 · 次切距和次法距的长度	(141)
3.27 向径对极角导数的几何意义	(145)

第三章 习 题	(147)
第四章 可微分函数的一些定理	(165)
4.1 导数根的定理(罗尔定理)	(165)
4.2 中值定理(拉格朗日定理)	(167)
4.3 广义中值定理(柯西定理)	(169)
4.4 两个无穷小量之比的极限(计算 $\frac{0}{0}$ 型的不定式)	(171)
4.5 两个无穷大量之比的极限(计算 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式)	(173)
4.6 泰勒公式	(181)
4.7 用泰勒公式求函数 e^x , $\sin x$ 和 $\cos x$ 的展开式	(186)
第四章 习 题	(191)
第五章 函数性态的研究	(197)
5.1 问题的引出	(197)
5.2 函数的增减性	(198)
5.3 函数的极大值和极小值	(200)
5.4 用一阶导数求可微分函数的极大值和极小值	(208)
5.5 用二阶导数判断函数的极大值和极小值	(211)
5.6 函数在闭区间上的最大值和最小值	(216)
5.7 利用函数极大值和极小值的理论解应用问题	(218)
5.8 利用泰勒公式求函数的极大值和极小值	(221)
5.9 曲线的凸凹性·拐点	(224)
5.10 渐近线	(232)
5.11 研究函数和绘制图形的一般方法	(239)
5.12 研究由参数方程表示的曲线	(245)
第五章 习 题	(251)
第六章 曲线的曲率	(260)
6.1 弧长及其导数	(260)
6.2 曲率	(263)
6.3 曲率的计算	(265)

6.4	计算由参数表示的曲线的曲率	(268)
6.5	计算由极坐标方程给出曲线的曲率	(269)
6.6	曲率半径和曲率圆·曲率中心·渐屈线和渐伸线 ..	(271)
6.7	渐屈线的性质	(278)
6.8	方程的近似实根	(282)
第六章 习 题		(288)
第七章 复数·多项式		(292)
7.1	复数·基本定义	(292)
7.2	复数的基本运算	(294)
7.3	复数的乘方与开方	(298)
7.4	复指数的指数函数及其性质	(302)
7.5	欧拉公式·复数的指数式	(305)
7.6	多项式的因式分解	(307)
7.7	多项式的重根	(311)
7.8	含复数根的多项式的分解	(313)
7.9	插值法·拉格朗日插值公式	(315)
7.10	牛顿插值公式	(318)
7.11	数值微分法	(320)
7.12	用多项式最佳逼近函数·切比雪夫的理论	(322)
第七章 习 题		(323)
第八章 多元函数		(326)
8.1	多元函数的定义	(326)
8.2	二元函数的几何表示	(330)
8.3	函数的偏增量和全增量	(330)
8.4	多元函数的连续性	(332)
8.5	多元函数的偏导数	(337)
8.6	二元函数偏导数的几何解释	(339)
8.7	全增量与全微分	(340)
8.8	利用全微分作近似计算	(344)
8.9	利用全微分估计计算中的误差	(346)

8.10	复合函数的偏导数·全导数·复合函数的全微分	(351)
8.11	隐函数的导数	(357)
8.12	高阶偏导数	(361)
8.13	等值面	(367)
8.14	方向导数	(369)
8.15	梯度	(372)
8.16	二元函数的泰勒公式	(376)
8.17	多元函数的极大值和极小值	(379)
8.18	用已知方程联系的多元函数的极大值与极小值(条件极大值和极小值)	(390)
8.19	根据实验数据用最小二乘法求函数	(397)
8.20	曲线的奇点	(402)
第八章 习 题		(409)
第九章 微分在立体几何中的应用		(417)
9.1	空间曲线的方程	(417)
9.2	标量自变量的向量函数的极限和导数·曲线的切线方程·法平面方程	(420)
9.3	向量(向量函数)的微分法则	(429)
9.4	向量对弧长的一阶和二阶导数·曲线的曲率·主法线·作曲线运动的点的速度和加速度	(433)
9.5	密切面·次法线·挠率	(444)
9.6	曲面的切平面与法线	(450)
第九章 习 题		(455)
第十章 不定积分		(458)
10.1	原函数和不定积分	(458)
10.2	积分表	(461)
10.3	不定积分的某些性质	(464)
10.4	置换积分法(变量代换)	(467)
10.5	包含二次三项式的某些函数的积分	(470)
10.6	分部积分法	(474)

10·7	有理分式·部分有理分式和它们的积分	(479)
10·8	有理分式分解成部分分式	(485)
10·9	有理分式的积分	(491)
10·10	无理函数的积分	(495)
10·11	$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ 型的积分	(497)
10·12	某些三角函数类的积分	(502)
10·13	用三角代换求某些无理函数的积分	(508)
10·14	关于不能用初等函数表示其积分的函数	(511)
第十章 习 题		(513)
第十一章 定 积 分		(534)
11·1	问题的提出·下和及上和	(534)
11·2	定积分·定积分存在的证明	(536)
11·3	定积分的基本性质	(550)
11·4	计算定积分·牛顿——莱布尼兹公式	(554)
11·5	定积分的变量代换法	(559)
11·6	分部积分法	(561)
11·7	广义积分	(564)
11·8	定积分的近似计算	(573)
11·9	切比雪夫公式	(580)
11·10	含参数积分· Γ 函数	(586)
11·11	实变量的复函数的积分	(590)
第十一章 习 题		(591)
第十二章 定积分在几何与力学中的应用		(597)
12·1	在直角坐标系中计算面积	(597)
12·2	极坐标系中曲线扇形的面积	(601)
12·3	曲线的弧长	(602)
12·4	由已知平行截面面积计算立体的体积	(610)
12·5	旋转体的体积	(612)
12·6	旋转体的侧面积	(614)

12•7 用定积分计算功.....	(616)
12•8 重心的坐标.....	(618)
12•9 用定积分计算线、圆和圆柱的转动惯量.....	(622)
第十二章 习 题.....	(625)

第一章 数·变量·函数

1.1 实数·实数表示为数轴上的点

实数是数学的基本概念之一。它起源于古代，并且已经经历过多少世纪的发展和推广。

正负整数和分数以及数零统称为有理数。每个有理数可以表示为两个整数 P 和 q 的比，即 $\frac{P}{q}$ 的形式，例如，

$$\frac{5}{7}, 1.25 = \frac{5}{4}.$$

特殊情况，整数 P 可以看成两个整数的比 $\frac{P}{1}$ ，例如，

$$6 = \frac{6}{1}, 0 = \frac{0}{1}.$$

有理数可以表示为有限或无限循环小数的形式。数表示为无限的，但不循环的小数，称为无理数，这样的数有 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$, 等等。

有理数和无理数的全体构成实数集合。实数有大小顺序，就是说，每个实数对 x 和 y 有一个而且只有一个下面的关系式成立：

$$x < y, x = y, x > y.$$

实数可以表示为数轴上的点。数轴是一条无限长的直线，在它上面选定：(1) 一个确定的点 0 ，称为原点；(2) 由箭头表示正方向；(3) 一个适当的长度单位。我们通常构

成的数轴是水平的，并且取正方向是从左到右。

若数 x_1 是正的，则它表示在原点右边的一点 M_1 ，距离为 $OM_1 = x_1$ 。若数 x_2 是负的，则它表示在原点左边的一点 M_2 ，距离为 $OM_2 = -x_2$ （图1）。点0表示数零。显然每个实数可以表示为数轴上的一个确定的点。两个不同的实数，表示数轴上两个不同的点。

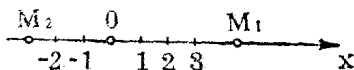


图1

下面的论断也是正确的：数轴上的每个点表示唯一一个实数（有理数或无理数）。

简要地讲，一切实数和数轴上的一切点都一一对应；每个数仅对应一个点；反之，每个点仅对应一个数。这样就可以使得我们将“数 x ”和“点 x ”在一定的意义下看成是等价的表示。在本门课程中我们将广泛使用这种表示法。

我们只叙述而不证明下面实数集合的重要性质：在任意两个实数之间都可以找到有理数和无理数。用几何学的语言来表示，这个命题可以写作：在数轴上任意两个点之间都可以找到有理点和无理点。

最后，我们给出下面定理，这个定理，就某种意义上讲表示了在理论和实践之间的一个桥梁。

定理。每个无理数 α 可以用有理数表示到任何精确的程度。

实际上，设无理数 $\alpha > 0$ 并且要求计算 α 达到 $\frac{1}{n}$ 的精确度（例如， $\frac{1}{10}$ ， $\frac{1}{100}$ ，等等）。

不论 α 如何，它总位于两个整数 N 和 $N+1$ 之间。如果我们在 N 和 $N+1$ 之间划分区间为 n 个部分，那么 α 将位于

有理数 $N + \frac{m}{n}$ 和 $N + \frac{m+1}{n}$ 之间的某处。由于它们的差等

于 $\frac{1}{n}$ ，它们的每个都以指定的精确度表示了 α ，前者略小，而后者略大。

例如，把无理数 $\sqrt{2}$ 表示为有理数：

1.4和1.5，取一位小数，

1.41和1.42，取二位小数，

1.414和1.415，取三位小数，等等。

1.2 实数的绝对值

我们引进一个以后需要的概念：实数的绝对值。

定义。实数 x 的绝对值（或模）（写为 $|x|$ ）是一个非负实数并且满足条件：

$$|x| = x, \quad \text{如果 } x \geq 0.$$

$$|x| = -x, \quad \text{如果 } x < 0.$$

例如， $|2| = 2$ ， $|-5| = 5$ ， $|0| = 0$ 。

从定义可知关系式 $x \leq |x|$ 对任何 x 都成立。

我们考察绝对值的一些性质。

性质 1. 几个实数代数和的绝对值不大于各项绝对值的和。

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

证。设 $x + y \geq 0$ ，则

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y| \quad (\text{因为 } x \leq |x| \text{ 和 } y \leq |y|);$$

设 $x + y < 0$ ，则

$$|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|, \text{ 证毕。}$$

上面的证明容易推广到任意有限个项。

例如，

$$|-2+3| < |-2| + |3| = 2+3=5 \text{ 或 } 1 < 5.$$

$$|-3-5| = |-3| + |-5| = 3+5=8 \text{ 或 } 8=8.$$

2. 差的绝对值不小于被减数和减数的绝对值的差：

$$|x-y| \geq |x|-|y|, \quad |x| > |y|.$$

证。设 $x-y=z$ ，则 $x=y+z$ ，由性质 1 可知

$$|x| = |y+z| \leq |y| + |z| = |y| + |x-y|,$$

从而得到

$$|x-y| \geq |x|-|y|,$$

证毕。

3. 乘积的绝对值等于每个因子绝对值的乘积：

$$|xyz| = |x||y||z|$$

4. 商的绝对值等于被除数和除数绝对值的商：

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

后面两个性质可直接由绝对值的定义推出。

1.3 变量与常量

各种物理量的数值像时间，长度，面积，体积，质量，速度，压力，温度，等等，都可以由测量来确定，数学上涉及的各种量应去掉任何特殊的含意。今后，当讲到量的时候，我们应该注意它们的数值。在各种现象中，某些量的数值是变化的，而其它一些量的数值则保持不变。例如，在点的匀速运动中，时间和距离改变，而速度则保持恒定。

变量是一个量，它可以取不同数值。常量是一个量，它的数值保持不变，我们利用字母 $x, y, z, u, \dots$ ，等等

表示变量，并且用字母 $a, b, c, \dots$ ，等等表示常量。

注。在数学里，一个常量通常看成变量的特殊情况，它的数值都是相同的。

应该注意，在考虑特殊物理现象时，同样一个量，在这个现象里它是一个常量，但在另外的现象里它又是一个变量。例如，匀速运动的速度是一个常量，但是匀加速运动的速度就是一个变量。某个量在任何情况下都取相同的值，称为绝对常数。例如，圆周长对它的直径的比是一个绝对常数：

$$\pi = 3.14159\dots$$

在本课程中，我们将处处看到，变量的概念是微分学和积分学中的基本概念。在“自然辩证法”里，恩格斯曾指出：“笛卡儿的变量是数学的转折点，就是由于有了变量，才在数学中引进了运动和辩证法，同时也是微积分学的必然。”

1.4 变量的范围

变量取一系列的数值，这些值的全体，随问题的特征可以不同，例如，热水的温度在一般条件下从室内温度（15—18℃）变化到沸点 100℃，变量 $x = \cos\alpha$ 从 -1 取到 +1 的一切数值。

变量的值在几何上表示数轴上的点，例如，变量 $x = \cos\alpha$ 的值，对 α 一切可能取的值表示为从 -1 到 +1 上点的集合，包含端点 -1 和 +1（图 2）。

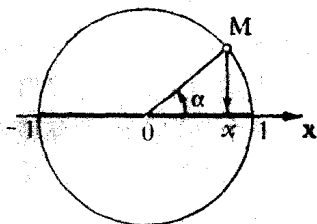


图 2

定义。变量的一切可取数值的集合称为变量的范围。

我们现在定义下面变量的范围，它们在以后是经常用到