

因次分析原理

孙振东 编

YINCI FENXI YUANLI

人民铁道出版社

因次分析原理

孙振东 编

人 民 铁 道 出 版 社

1979年·北京

内 容 简 介

本书由浅入深地介绍因次分析的一般原理。为了帮助读者对因次分析的理解，附加了一些代数知识和基本定理(如 π -定理)的证明。并联系水力学和输沙力学中的问题，说明因次分析的应用。

本书可供水力工程技术人员、科研工作者及大专院校流体力学专业师生参考。

因次分析原理

孙振东 编

人民铁道出版社出版

责任编辑 王能远

封面设计 翟 达

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民铁道出版社印刷厂印

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 4.25 字数: 94千

1979年9月第1版 1979年9月第1次印刷

印数: 0001—11,000册

统一书号: 15043·6185 定价: 0.46元

序

因次分析和相似原理是经常在一起的。虽然因次分析发展的结果并不都应用于相似原理，相似原理的基础也不都是出自因次分析，但是当研究的物理现象愈来愈复杂，流体力学的纯理论已经不足以解决这些复杂现象问题时，解决问题的主要手段不得不借助于模型试验，而模型试验就有相似问题，模型和原型的完全相似意味着模型的无因次变量之值必须等于原型上对应的无因次变量之值。上边已经说过对于复杂的天然现象问题，流体力学的纯理论还解决不了，这也就是说从流体力学方程取得无因次变量的范围是很有限的；很幸运，现在有了因次分析，只要人们能够确定控制物理现象的参量，就可以借助于因次分析把控制该复杂现象的无因次变量推导出来，从而也就得到了模型设计的根据。这是为什么因次分析和相似原理常常在一起出现的原因。举例说，常见的空气动力学中的飞机模型试验和输沙力学中的模型试验等等都是这种情况。

在水力学的范围内，目前国内和国际出现的有关专著或杂志论文上，因次分析应用得已经很普遍了。不管这些著作是对流体力学或水力学问题的探讨研究，还是进一步涉及模型试验，因次分析已经是一个重要的研究工具。正因为它是一个工具，是一种基础性质的知识，所以在文献上一般都只给出因次分析的结果，而很少详及因次分析的过程。为了了解和进一步深入探讨这些课题，对水力学工程师和科学工作者说，作为一种基础理论，掌握因次分析是很必要的。现

时我们的科学研究和模型试验任务是很多的，有的还是非常重大的。这就要求我们从基础出发，掌握因次分析原理。这样我们就可以多快好省地把有关科研专题向前推进一大步。例如各种复杂的模型试验，借助于因次分析的结果，就可以使试验工作有系统地、经济地和迅速地进行，使之更符合于社会主义总路线的要求。

因次分析和相似理论并不是新东西，但过去国际上的文献大多仅限于原理阐述，至于怎样和实际问题相结合，则读到的甚少。解决这个问题须要有一个发展过程，从目前情况看因次分析和相似理论已经出现不少可喜的成果，这些东西正好是我们攀登新的科学高峰的踏板。应该说，和实际问题结合的成果是内容更加丰富、更具有生命力的东西，也是更加有用的东西，它是因次分析和相似原理这门学科的继续和发展，而且自身就是科学的一部分。本文就是根据这种观点，综合一些最新文献加以编写的。例如本文的第五章——因次分析在水力学中的应用和第六章——因次分析在输沙力学中的应用，就是水力水文工作者进攻实际问题的踏脚石，在这些牢固的基础上攻关，可以迅速而经济地使某些问题得到解决。

因次分析和相似原理这个课题涉及的科目很广泛，从已取得一定进展这一条件说，它已进入流体力学、弹性力学、热力学、电磁现象特别是磁流体力学、燃烧过程和火焰传播等领域。本书的目的是给水力工程人员提供一份参考资料，因此它属于流体力学，主要地还是水力学的范畴。更确切些说，在和实际问题相结合的部分，主要涉及的是河渠水力学和输沙力学；为了便于学习，同时也为了增加一些重要的常识，部分地涉及一般流体力学或水力学的问题。

本书力求通俗易懂、便于实用，因此不采用那些带有浓

厚哲学气味的陈述方式和过于抽象的数学论证方法，而同时却附加了一些代数知识，以便于对因次分析的理解。另一方面也不能不注意科学的严紧性和完整性，所以一些内容不一定对实际应用有什么直接联系，例如 π -定理的证明等等，还是放了进去。

限于编者的学术水平，不完整或错误的地方在所难免，希望读者批评指正。

编者

1978年11月

目 录

序

第一章 绪论	1
1.1 因次一词的确定	1
1.2 质量和力的单位	2
1.3 物理量的因次和单位	5
第二章 力学中的因次和单位	6
2.1 按物理量的性质和定义写出来的因次表达式	6
2.2 根据定律导出的因次表达式	6
2.3 因次表达式的简单应用	8
2.4 力学中的因次和单位表	12
第三章 因次分析方法	14
3.1 因次公式的一般形式	14
3.2 物理量之间的函数关系的结构和 π -定理	19
3.3 因次的齐次性 (和谐性)	23
3.4 因次分析的一般说明	24
3.5 无因次乘积的完整集合	28
3.6 瑞利的因次分析方法	30
第四章 无因次乘积的系统计算	39
4.1 一些有关的代数原理	39
4.2 参量的因次独立问题	43
4.3 完整集合中无因次乘积的数目	46
4.4 线性相关	47
4.5 无因次乘积的计算例题	48
4.6 齐次线性代数方程组的原理	51
4.7 无因次乘积的一个完整集合的计算	52

4.8 奇异的因次矩阵	55
4.9 参量的安排	57
4.10 无因次乘积的转换	58
第五章 因次分析在水力学中的应用	66
5.1 因次分析的要点	66
5.2 因次分析的用途和限制	69
5.3 因次分析在模型试验中应用的意义	72
5.4 因次原理在水力学中具体应用的实例	73
第六章 因次分析在输沙力学中的应用	91
6.1 特征参量	91
6.2 两相现象的特征参量	93
6.3 无因次变量和函数	100
6.4 两相现象的无因次变量和函数	102
6.5 无因次表达式中的“灵活性”	108
6.6 收尾速度	112
6.7 特征参量选择的说明	121
附 录	
附录一 力学中物理量的因次表达式及单位符号表 (常用表)	123
附录二 公制和英美制单位换算因子表	125
附录三 力学中的因次和单位表 (以 $F=ma$ 为基础) (扩大表)	126
参考文献	128

第一章 绪 论

1.1 因次一词的确定

“因次”一词，在英、德、法语中都是“dimension”，它的原意是“尺寸”，“大小”，和“元”，“度”，“维”等等。用在因次分析中，它指的是一个特定的物理量，例如长度、质量、时间和加速度等等，用符号表示，分别是 $[L]$ 、 $[M]$ 、 $[T]$ 和 $[LT^{-2}]$ 。这里涉及的只是物理性质，例如 $[L]$ 指的是长度而不是时间。在因次分析的变换过程中，这些符号自身已经够用了。但是任何的物理量是要用单位去度量的，由因次分析得到的无因次量不过是若干物理量的组合，所以在因次分析成果的运用中，也离不开单位。但不管是那一种单位，它除去指明物理性质外，还有一个“尺寸”或“大小”的问题。所以单位和因次虽然是密切关联的，而却是两种不同的概念。“dimension”一词是多词义的，除其它的以外，它同时兼有上述这两种概念。

中译文献中，在因次分析这个范围内说，有的译成“因次”，有的译成“量纲”、“维”或“尺度”。除“维”一般用于几何空间的说明外，“尺度”、“量纲”和“因次”三者都有用的，而以后者较为普遍。按编者想法，以用“因次”为宜，因为“量纲”一词词义不甚确切，倒不如新创造的名词“因次”为佳。

1.2 质量和力的单位^{〔1〕}

如牛顿定律 $F = ma$ 应用于自由落体, 力 F 就是重量 W , 加速度 a 就是重力加速度 g 。从而 $W = mg$, 或 $m = W/g$ 。设在此式中 $m = 1$, 我们看出这样一条通则:

为了符合定律 $F = ma$, 单位质量的重量必须恰好是力的 a 个单位。

惯用的度量制符合于这一通则。下边讨论五种普通的度量制。

1.2.1 c.g.s.制 字母c.g.s.分别代表“厘米”(centimeter)、“克”(gram)和“秒”(second)。克一般认为是质量单位。它是千克(公斤)(kilogram)的千分之一。这个质量标准以白金圆柱的形式保存于国际计量和衡量局。

c.g.s.制中力的单位为“达因”(dyne), 1个达因之力使1克的质量产生一个1厘米/秒²(cm/sec²)的加速度。因为在地球上 g 的标准值规定为980.665cm/sec², 按方程 $W = mg$, 可以说1克质量的重量约为981达因。

在c.g.s.制中, 功的单位为“尔格”(erg)即一个“达因·厘米”(dyne-centimeter)。

c.g.s.制广泛应用于纯科学领域。

1.2.2 m.k.s.质量制 字母m.k.s.分别指“米”(meter)、“公斤”(kilogram)和“秒”(second)。在m.k.s.质量制中公斤是看作质量的一个单位。根据定律 $F = ma$, 一个单位的力它能够使1公斤的质量产生1米/秒²的加速度就叫做一个“牛顿”(newton)。显然, 1牛顿等于100,000达因。1牛顿近似地等于0.225磅(pound), 符号

〔1〕 表示参考文献号码, 数字加方括号, 下同。

为lb)。

在m.k.s. 质量制中功的单位是“牛顿·米”(newton-meter)，这个单位叫做“焦耳”(joule, 符号为J)。1焦耳等于 10^7 (一千万)尔格。功率的单位是“瓦特”(watt, 符号为W)。瓦特定义为每秒1焦耳。

m.k.s. 质量制广泛应用于电气工程中。被1960年第十一届国际计量大会通过的国际单位采用代号为SI。我国国务院于1977年5月27日颁发的“中华人民共和国计量管理条例(试行)”第三条规定我国的基本计量制度逐步采用国际单位制”。

1.2.3 m.k.s. 力制。在m.k.s. 力制中, 公斤(kilogram)是看做力的单位, 而不是质量单位。1公斤力定义为1公斤质量在标准地心引力条件下的重量。从而1公斤力是980.665达因。

为了符合方程 $F=ma$, 在m.k.s. 力制中质量的单位是“公斤·秒平方·每米”(kg sec²/m)。这个质量单位没有特定的名称。根据方程 $W=mg$, 1公斤·秒平方·每米的质量在地球上重约9.81公斤之力。

m.k.s. 力制广泛应用于欧洲大陆工程实践中。为了和质量制分开, m.k.s. 力制亦常写为m.kgf.s制, (即meter, kilogram-force, second)。

1.2.4 英国质量制(British mass system)。在英国质量制中“磅”(pound)是看作一个质量单位。1磅质量法定为0.4536公斤(kg)的质量。为了符合方程 $F=ma$, 规定一个单位的力能够使1磅的质量产生1英尺每秒平方(one foot per second squared, 符号ft/sec²)的加速度。这个力单位叫做“磅达”(poundal)。因为标准引力加速度为32.174英尺每秒平方, 方程 $W=mg$ 指出地球上1磅质

量大约重32.2磅达。从而1磅达之力接近等于半盎司 (half an ounce)。

英国质量制常常用于英国技术著作中。

1.2.5 美国工程制。美国工程师通常认为磅 (pound) 是力的单位。亦即 0.4536 公斤 (kg) 之力。为了符合方程 $F=ma$ ，于是乎质量单位就变为“磅秒平方每英尺” (pound second squared per foot, 符号为 $\text{lb}\cdot\text{sec}^2/\text{ft}$)。这个质量单位定名为“斯”(或译为斯勒格, 即英语 “slug”)。方程 $W=mg$ 指出 1 斯勒格的质量在地球上重约32.2磅。

为了和质量制分开, 美国工程制亦常写为 $\text{ft}\cdot\text{lbf}\cdot\text{s}$ 制 (即 foot, pound-force, second)。

美国工程界同时使用 1 磅质量 (pound of matter) 这一概念。1 磅质量定义为弹簧秤上重 1 磅之质量。因为地球重力加速度是随地理位置的不同而变的, 所以这不是一个不变的质量。可是由引力变化引起的弹簧秤和天平秤之间的差别一般是可以忽略不计的。

例如在水力学中 (水) “头” (head) 是作为能量解释的: 流体每磅 (质量) 的能量的英尺磅数。这一解释是和 (水) 头的单位是英尺这一说法不一致的, 除非一致地认为磅也是力的单位。从而不言而喻, 磅是力的单位, 即使 1 磅 (质量) 的流体 (pound of fluid) 一词是常用的。

可是必须承认, 用力单位表达质量数量是会引入歧途的。不仅词义有欺骗性, 方程的形式也受到影响。在解释某些工程公式时, 瑞利 (Lord Rayleigh) 指出: “当考察的问题主要取决于引力时, 符号 g 并不出现, 而当引力和问题没有一点关系时, g 却明显地闯进来。”瑞利的观点可以借伯努里方程的形式来说明。对于一个水平管道说, 方程形式之一是

$$\frac{p}{w} + \frac{v^2}{2g} = \text{constant (常数)}$$

在这里 p/w 和 $v^2/2g$ 都是（水）头。在这种情况下水流的变化是由于管道横断面的改变而与引力无关，但是比重（specific weight, w ）和重力加速度（ g ）却都出现在方程之中。如把方程写成

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant}, \quad \text{式中 } \rho = w/g$$

的形式，它可以比较好地表示现象的真实性质，注意， ρ 不取决于引力。这个形式也可以用能的概念去解释。方程中各项可以解释为单位容积流体的能。如以 ρ 去除方程各项，则除后各项所代表的是流体单位质量的能。

1.3 物理量的因次和单位

物理量长度、质量、时间以及温度和电荷，在某种意义上是彼此独立的，因为度量它们的单位是由国际标准所规定的。而且这些规定的单位决定其他物理量的单位。选择五个独立物理量的可能性是很多的，上边选定的长度等等五个独立的物理量仅仅是科学研究发展的结果，这里没有什么基础的东西可以作为选择的标准。的确，举例说，不用质量而用力，当力的单位规定了，质量的单位可以通过牛顿定律 $F=ma$ 决定下来。有质量制也有力制就是这种情况，等等。

这种规定的单位叫做基本单位，由基本单位决定的单位叫做导出单位。因为因次和单位是相对应的，对应于基本单位的叫做基本因次，对应于导出单位的叫做导出因次。这是按大家熟悉的由单位到因次的过程说的。事实上今后我们要先决定物理量的因次表达式，再按不同的单位制决定物理量的单位。

第二章 力学中的因次和单位

2.1 按物理量的性质和定义写出来的因次表达式

这里所说的力学是古典的或非相对论性的力学。力学中包含的概念是很多的,例如能、力、速度、质量、密度等等。随着科学的发展,概念的数目愈来愈多。另一方面,在力学范围内,任何一个概念也可以为长度、质量和时间这三个基本概念(在气体动力学中尚涉及温度 $[\theta]$ 这一概念)所决定。代表这些基本概念的因次称为基本因次。也就是第一章末所说的和规定了的各单位相应的因次。

根据其性质和定义,可以直接写出某些物理量的因次表达式。例如,基本物理量(即所谓基本实体,“entity”)按性质说,长度为 $[L]$,质量为 $[M]$ 和时间为 $[T]$ 。这些就是基本因次。其他物理量(实体)按定义说,面积为 $[L^2]$,体积为 $[L^3]$,速度为 $[LT^{-1}]$,加速度为 $[LT^{-2}]$,密度为 $[ML^{-3}]$ 等等。

2.2 根据定律导出的因次表达式⁽²⁾

2.2.1 从长度、质量、时间导出的因次表达式

根据定律 $F=ma$,已知加速度之因次为 $[LT^{-2}]$ 可得力的因次 $[F]=[MLT^{-2}]$ 。如基本实体采用力,不用质量,则质量的因次为 $[M]=[FL^{-1}T^2]$ 。

根据定律

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}, \text{ 式中 } \mu \text{ 为动力粘滞性系数}$$

已知：根据定义 $\tau = \frac{F}{A}$, $[\tau] = \left[\frac{F}{A} \right] = [ML^{-1}T^{-2}]$, 而 $[\tau]$

$= [\mu] \left[\frac{dv}{dy} \right]$, 代入已知量, 则有

$$[ML^{-1}T^{-2}] = [\mu][LT^{-1} \cdot L^{-1}] = [\mu][T^{-1}],$$

解之, 即得

$$[\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

运动粘滞性系数 ν , 按定义 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{[ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}]} = [L^2T^{-1}].$$

类似地可以导出动量、能量、应力等等的因次表达式, 详见附录一。如第一章所述这种由基本因次决定的因次叫做导出因次。

从附录一可以看出, 当物理量的因次表达式写出后, 其相应的单位就可以写出来。但是因为 在 c.g.s.、m k.s. 和英美制中, 长度和质量的单位各不相同, 所以对每一个因次 (物理量) 就有三种不同的单位。

以质量为基础的单位制叫做绝对单位制。

2.2.2 从长度、力和时间导出的因次表达式

以力为基础的单位制叫做引力单位制。因为引力随当地的重力加速度 g 的变化而变化, 所以以力为基础的单位, 包括力自身, 也是变化的。为了克服这一困难, 就把 g 定义为 $9.80665 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ (或者近似地 $32.1740 \text{ ft} \cdot \text{sec}^{-2}$), 这种 g 称为标准重力加速度。以标准 g 导出的力为基础而导出的单位称为工程单位。

在公制工程制中, 力之单位为 kgf (kilogram-force), 在英美制工程制中力之单位为 lbf (pound-force), 亦即所谓磅达 (poundal)。

在以力为基础的单位制中, 质量单位变为导出单位, 它是由定律 $F=ma$ 导出的。在公制工程制中, 质量的单位为 $\text{kgf} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$; 在英美制中为 $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$, 这一单位定名为斯勒格 (slug)。

公制的基本单位为: kgf 、 m 、 sec ; 英美制为 lbf 、 ft 、 sec 。

在工程制中以力为基础导出的单位如下表1.1所示。

其他不包含力或质量之单位, 如面积、体积、速度、加速度和运动粘滞性系数等, 其工程单位 (即引力单位) 和绝对单位相同。

本书在以后的课文中一般不采用引力单位制。但为了读者阅读文献的方便, 引力单位制的内容也附在这里。引力单位制的物理量的因次表达式可由绝对单位制 (以质量为基础的) 的表达式推导出来。设绝对单位制的表达式为 $[M^x L^y T^z]$, 则 x 、 y 和 z 是已知的, 从定律 $F=ma$ 推出 m 的因次 $[M] = [F][a^{-1}]$, 亦即 $[M] = [F][L^{-1}T^2]$, 从而

$$\begin{aligned} [M^x] &= [F^x L^{-x} T^{2x}], \text{ 故} \\ [M^x L^y T^z] &= [F^x L^{-x} T^{2x}][L^y][T^z] \\ &= [F^x L^{y-x} T^{2x+z}] \\ &\equiv [F^p L^q T^r] \end{aligned}$$

p 、 q 和 r 的值等于 $p=x$, $q=y-x$ 和 $r=2x+z$ 。

2.3 因次表达式的简单应用

2.3.1 方程因次和谐的检验

物理方程重要的特征是它的因次和谐性。借助于物理量的因次表达式就可以进行和谐性的检验。

例如, 通过毛细管的流量 Q 和流体动力粘滞性系数 μ 、管径 d 、管长 l 和压力差 p 之间关系式已经通过因次分析得

表 1.1

量 名	引力单位制	单 位 符 号	因次表达式
密 度	公 制 英 美 制	$\text{kgf} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sec}^2 / \text{m}^3$ 或 $\text{kgf} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{sec}^2$ $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-3} \cdot \text{sec}^2 / \text{ft}^3$ 或 $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-4} \cdot \text{sec}^2$ 或 $\text{slug} \cdot \text{ft}^{-3}$	$[ML^{-3}]$
动 量	公 制 英 美 制	$\text{kgf} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2 \times \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$ 或 $\text{kgf} \cdot \text{sec}$ $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-1} \cdot \text{sec}^2 \times \text{ft} \cdot \text{sec}^{-1}$ 或 $\text{lbf} \cdot \text{sec}$	$[MLT^{-1}]$
能 量	公 制 英 美 制	$\text{kgf} \cdot \text{m}$ $\text{lbf} \cdot \text{ft}$	$[FL]$
功 率	公 制 英 美 制	$\text{kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$ $\text{lbf} \cdot \text{ft} \cdot \text{sec}^{-1}$	$[FLT^{-1}]$
应力或 压 力	公 制 英 美 制	$\text{kgf} \cdot \text{m}^{-2}$ $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-2}$	$[FL^{-2}]$
动力粘滞 性系数 μ	公 制 英 美 制	$(\text{kgf} \cdot \text{m}^{-2}) / (\text{m} \cdot \text{sec}^{-1} / \text{m})$ 或 $\text{kgf} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}$ $(\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-2}) / (\text{ft} \cdot \text{sec}^{-1} / \text{ft})$ 或 $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-2} \cdot \text{sec}$	$[FL^{-2}T]$
运动粘滞 性系数 ν	公 制 英 美 制	$(\text{kgf} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sec}) / (\text{kgf} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{sec}^2)$ 或 $\text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$ $(\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-2} \cdot \text{sec}) / (\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-4} \cdot \text{sec}^2)$ 或 $\text{ft}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$	$[L^2T^{-1}]$

注：在上表中，质量是 $\text{kgf} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{sec}^2$ 或 $\text{lbf} \cdot \text{ft}^{-1} \cdot \text{sec}$ (或 slug)，力是 kgf 或 lbf 。

出：

$$Q = \frac{d^3 p}{\mu} f\left(\frac{l}{d}\right), \text{ 或 } \frac{Q\mu}{d^3 p} = f\left(\frac{l}{d}\right)$$

检查这一方程的因次是否和谐一致，也就是检查方程的两边的因次是不是相同。至于 f 的具体形式只有通过 $\left(\frac{Q\mu}{d^3 p}\right)$ 对 $\left(\frac{l}{d}\right)$ 的试验才能确定。把各个物理量的因次代入，