新三角學講義精解

朱鳳豪編著

香港 三育圖書文具公司 出版

新三角學講義精解

朱鳳豪編著

香港 三育圖書文具公司 出版

新三角學講義精解
朱鳳豪編著

出版 發行：三育圖書文具公司
香港九龍柯士甸道33號二樓
San Yu Stationery & Publishing Co.
33, Austin Road 1/F., Kowloon, Hong Kong

印刷：永生印刷公司
九龍馬頭圍道二三二號

1978年10月版

習 題 一 (6—8 頁)

1,2,3. 從略。

4. $v=10$ 周/秒 $=20\pi$ 本位弧/秒, $t=2/v=2/20\pi=7/220$ 秒.

5. 高(弧長) $=R\times\theta=1760\times\dfrac{\pi}{180}=30.73$ 碼.

(5,6,8 題均假定目的物爲圓弧,觀測點爲圓心.)

6. $R=6\Big/\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{1080}{\pi}=344$ 呎.

7. 弧長 $=R\theta=3950\times\dfrac{\pi}{180\times 60}=1.149$ 哩.

8. 月之直徑(弧長) $=238793\times 1868\times\dfrac{\pi}{180\times 60\times}$

$=2162$ 哩.

9. $\because$ 10 秒間轉過之弧長爲 $20\left(\dfrac{10}{3600}\right)=\dfrac{1}{18}$ 哩.

$$\therefore\quad \theta=\left(\frac{1}{18}\Big/\frac{1}{2}\right)\text{rad}=\frac{1}{9}\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)=6.37^\circ$$

10. 今分針移過 30 格時,時針在第 $15+\dfrac{30}{12}=17.5$ 格.

$\therefore$ 兩針相差爲 12.5 格.

又因每格爲 6°, 故兩針相差 $12.5\times 6=75^\circ=\dfrac{5}{12}\pi$ rad.

11. 設五段弧長依次爲

$$x-2y,\ x-y,\ x,\ x+y,\ x+2y$$

則由題意知

$$\begin{cases} x-2y+x-y+x+x+y+x+2y=2\pi & (1)\\ 6(x-2y)=x+2y & (2)\end{cases}$$

由(1)得 $5x=2\pi$ $\therefore$ $x=\frac{2}{5}\pi$

代入(2) $y=\frac{5}{14}x=\frac{1}{7}\pi$

故最小弧所對中心角爲

$$x-2y=\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{7}\right)\pi=\frac{4}{35}\pi\ \text{rad}.$$

12. 從幾何學知 n 邊正多邊形之一內角爲

$$\frac{(n-2)\cdot180^\circ}{n}=\frac{(n-2)\pi}{n}\text{rad}$$

故五邊形之內角爲 $\frac{3}{5}\pi$ rad, …………

13. $\because$ x 本位弧$=\frac{180x}{\pi}$度, x 百分度$=\frac{180x}{200}$度

$$\therefore\ x+\frac{180x}{\pi}+\frac{180x}{200}=180^\circ$$

$$\therefore\ x=180\Big/\left(1+\frac{180}{\pi}+\frac{9}{10}\right)$$

故最小角爲 $\frac{9}{10}x=\frac{9}{10}\cdot\frac{180}{1+\frac{180}{\pi}+\frac{9}{10}}=2^\circ44'12''$

14. 灣曲之長度爲 $\left(2100\times\frac{37^\circ}{2}+2800\times21^\circ\right)\frac{\pi}{180^\circ}$

$$=9765\times\frac{\pi}{18}=1705\text{ 尺}.$$

習 題 二 (12頁)

1. 令 $a=\frac{2}{3}c$, 又 $a^2+b^2=c^2$, $\therefore$ $b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}c$

從此可求矣。

2. 令 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{p^2+q^2-q^2}=p$ 下從略。

3. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{4x^2y^2}{(x-y)^2}+(x+y)^2}=\sqrt{\dfrac{4x^2y^2+(x^2-y^2)^2}{(x-y)^2}}$

$$=\frac{x^2+y^2}{x-y}\text{ 下從略。}$$

4. $a-b=\dfrac{1}{4}c\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$　　$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(1)^2-(2)$,　　$-2ab=-\dfrac{15}{16}c^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$\sqrt{(2)-(3)}$,　　$a+b=\dfrac{\sqrt{31}}{4}c\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

從(1)(4)得　$a=\dfrac{1}{8}(\sqrt{31}+1)c$,　$b=\dfrac{1}{8}(\sqrt{31}-1)c$

故　$\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{8}(\sqrt{31}+1)$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{8}(\sqrt{31}-1)$$

$$\tan A=\frac{\sqrt{31}+1}{\sqrt{31}-1}=\frac{16+\sqrt{31}}{15}$$

$$\cot A=\frac{\sqrt{31}-1}{\sqrt{31}+1}=\frac{16-\sqrt{31}}{15}$$

$$\sec A=\frac{4}{15}(\sqrt{31}+1)\qquad \csc A=\frac{4}{15}(\sqrt{31}-1)$$

5. ∵　$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-8+2\sqrt{12}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

故 $\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

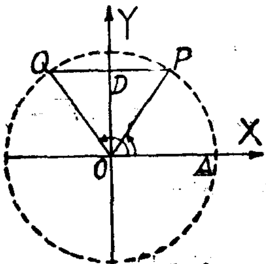
$$\therefore\ \cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}$$

$$=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$$

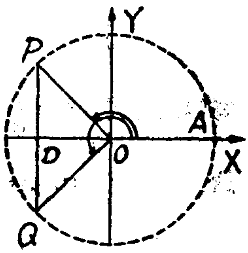
習題三 (17—18 頁)

1. a.



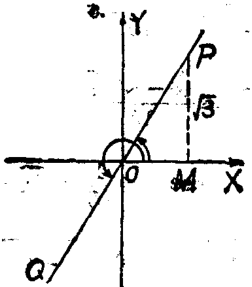
$OA=1,\ OD=\frac{4}{5}$

b.



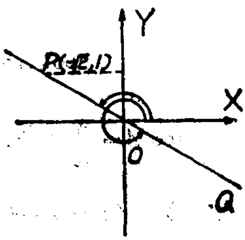
$OA=1,\ OD=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c.



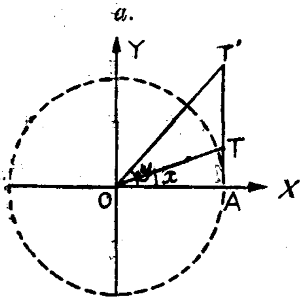
兩角 $\angle XOP,\ \angle XOQ$

d.

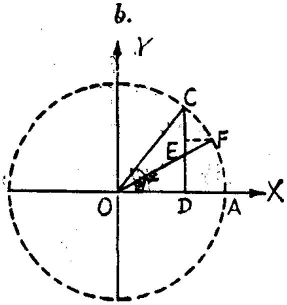


$\angle XOP$ 及 $\angle XOQ$

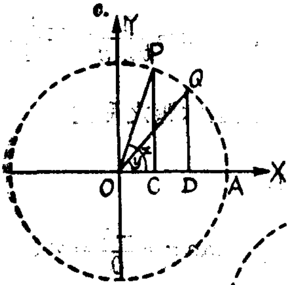
2.



$AT'=3AT$, y 爲 $\angle AOT'$



$DE=\frac{1}{m}DC$, y 爲 $\angle AOF$

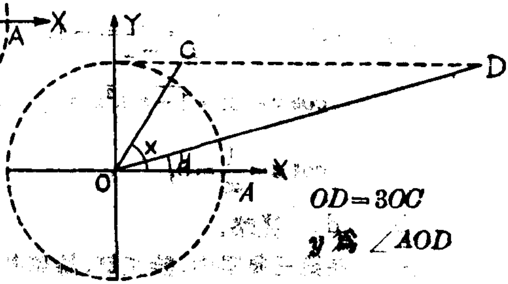


$OD=2OC$

(設 $45°<x<90°$)

y 爲 $\angle AOQ$

d.



$OD=3OC$

y 爲 $\angle AOD$

3. 令 $\sin\theta=x+\frac{1}{x}$, 卽 $x^2-x\sin\theta+1=0$

若 x 爲實數, 則 $\Delta\geqq 0$,

卽 $\sin^2\theta-4\geqq 0$, 卽 $|\sin\theta|\geqq 2$

但此不合理, 故 x 必不能爲實數.

或從證 $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}>1$, 因而得 $\sin\theta>1$ 爲不可能.

4. $\because\ x^2+y^2\geqq 2xy$ $\therefore\ (x+y)^2\geqq 4xy$

$\therefore\ \dfrac{4xy}{(x+y)^2}\leqq 1,$ 卽 $\sec^2\theta\leqq 1$

但 $\sec\theta$ 必大於1，卽 $\sec^2\theta$ 不能小於1，至少等於 1.

此時 $4xy=(x+y)^2$，卽 $(x-y)^2=0$，$\therefore\ x=y$.

習 題 四 (22—23 頁)

1. (a) $\cos x=\dfrac{1}{\sec x}=-\dfrac{3}{5}$，$\sin x=\pm\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\pm\dfrac{4}{5}$，

$\tan x=\left(\pm\dfrac{4}{5}\right)\Big/\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\mp\dfrac{4}{3}$，$\cot x=\dfrac{1}{\tan x}=\mp\dfrac{3}{4}$，

$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}=\pm\dfrac{5}{4}$. (注意本題之符號)

(c) $\sin x=\dfrac{1}{\csc x}=\dfrac{1}{-1}=-1,$

$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=0,$ $\tan x=\dfrac{-1}{0}=\infty,$

$\cot x=\dfrac{1}{\infty}=0,$ $\sec x=\dfrac{1}{0}=\infty.$

(b) (d) 從略.

(e) 在第三象限中，除正切，餘切外均爲負值解從略.

2. $\because\ \text{vers}\, x=1-\cos x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

故 x 在第一或第四象限內．若 x 在第一象限內，則可求其餘各函數之值，代入右端後卽得所求之答案；若 x 在第四象限內，則所得之答案爲 -2.

3. 左邊 $=(\sin\theta+\cos^2\theta/\sin\theta)+(\cos\theta+\sin^2\theta/\cos\theta)-\sec\theta$

$$=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}-\sec\theta=\csc\theta=\sqrt{1+\cot^2\theta}$$

$$=\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}.$$

4. $$\sec^2\phi=1+\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2=1+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}},$$

$$\therefore\quad \sec\phi=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

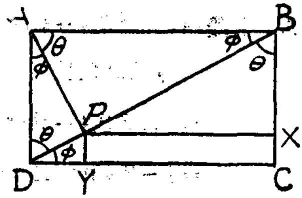
同理 $$\csc\phi=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

故 $$a\csc\phi+b\sec\phi=a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

5. 如圖在 $\triangle PBX$, $\triangle PAB$, $\triangle ADB$ 中, $\sin\theta=\frac{PX}{PB}$, $\sin\theta=\frac{PB}{BA}$, $\sin\theta=\frac{BA}{BD}$,



故 $\sin^3\theta=\frac{PX}{BD}$, $\therefore\ \sin\theta=\left(\frac{PX}{BD}\right)^{\frac{1}{3}}$.

又在 $\triangle PDY$, $\triangle PAD$, $\triangle ADB$ 中,

$$\sin\phi=\frac{PY}{PD},\qquad \sin\phi=\frac{PD}{AD},\qquad \sin\phi=\frac{AD}{BD}.$$

故 $\sin^3\phi=\frac{PY}{BD}$, $\therefore\ \sin\phi=\left(\frac{PY}{BD}\right)^{\frac{1}{3}}$

但在 $\triangle ADB$ 中, $\sin\theta=\frac{AB}{BD}$, $\sin\phi=\frac{AD}{BD}$

$$\sin^2\theta+\sin^2\phi=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2}+\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BD}^2}=1$$

故 $$\left(\frac{PX}{BD}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{PY}{BD}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

即 $\overline{PX}^{\frac{2}{3}}+\overline{PY}^{\frac{2}{3}}=\overline{BD}^{\frac{2}{3}}=\overline{AC}^{\frac{2}{3}}$. $(\because\ AC=BC)$

習題五 (34—36 頁)

1. 左邊 $=1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=\sec^2x$

2. 右邊 $=\frac{1}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x}=1+\cot^2x$

3. 左邊 $=(\cos^2 3A+\sin^2 3A)(\cos^4 3A-\cos^2 3A\sin^2 3A$

$+\sin^4 3A)$

$=(\cos^2 3A+\sin^2 3A)^2-3\cos^2 3A\sin^2 3A$

$=1-3\sin^2 3A\cos^2 3A=$ 右邊

4. $\because\ \sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)=\sin^2(x-y)$

$+\cos^2(x-y)\ (=1)$

移項得 $\cos^2(x+y)-\sin^2(x-y)$

$=\cos^2(x-y)-\sin^2(x+y)$

5. 左邊 $=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}\cdot\dfrac{\cot A}{\cot A}=\dfrac{\cot A-1}{\cot A+1}$

6. 左邊 $=\dfrac{2\csc^2 A}{\csc^2 A-1}=\dfrac{2\csc^2 A}{\cot^2 A}=\dfrac{2}{\cos^2 A}=2\sec^2 A$

7. 左邊 $=\dfrac{(\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)}{\sec A-\tan A}$

$=\dfrac{\sec^2 A-\tan^2 A}{\sec A-\tan A}=\dfrac{1}{\sec A-\tan A}$

或從　$\sec^2 A-\tan^2 A=(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)=1$

兩邊以 $\sec A-\tan A$ 除之卽得。

8. 左邊 $=\sin^2 x+2+\csc^2 x+\cos^2 x+2+\sec^2 x$

$=5+(1+\cot^2 x)+(1+\tan^2 x)=$ 右邊

9. 左邊 $=[\sec\beta(\sec x+\tan x)+\tan\beta(\sec x+\tan x)]$

$\times[\sec\beta(\sec x-\tan x)+\tan\beta(\tan x-\sec x)]$

$=(\sec\beta+\tan\beta)(\sec x+\tan x)(\sec\beta-\tan\beta)$

$\times(\sec x-\tan x)$

$=(\sec^2 x-\tan^2 x)(\sec^2\beta-\tan^2\beta)=1\cdot 1=1$

10. 左邊 $=\dfrac{(\csc x+\cot x)(\sec x-\tan x)}{\sec^2 x-\tan^2 x}$

$=\dfrac{(\csc^2 x-\cot^2 x)(\sec x-\tan x)}{\csc x-\cot x}=\dfrac{\sec x-\tan x}{\csc x-\cot x}$

或從　$\csc^2 x-\cot^2 x=\sec^2 x-\tan^2 x$　$(=1)$　做.

(用例一,證五法)

11. 左邊 $=\dfrac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$ (以 $\sin^2 x+\cos^2 x$ 代 1)

$$=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$ （以 $\cos x$ 除分子，分母）

12. 左邊 $=\frac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos x+\sin x)^2}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+2\sin x\cos x}$$

13. 左邊 $=(2+\sin A)(\sec A-2\tan A)$

$$=2\sec A+\tan A-4\tan A-\frac{2\sin^2 A}{\cos A}$$

$$=2(1-\sin^2 A)\sec A-3\tan A$$

$$=2\cos A-3\tan A$$

14. 今 $\sec\theta=\frac{\sqrt{2}}{\cos x+\sin x}$ $\therefore$ $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)}{2}$

$$\therefore\quad \sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{2}$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\sin\theta=\sin x-\cos x$$

15. 從已知式移項得 $(\sqrt{2}+1)\sin\theta=\cos\theta$

兩邊以 $\sqrt{2}-1$ 乘之 $\sin\theta=(\sqrt{2}-1)\cos\theta$

移項得 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

16. 今 $2\tan x=m+n,$ $2\sin x=m-n$

前式除後式得 $\cos x=(m-n)/(m+n)$

17. $\because$ $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

移項 $\frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin\alpha}$ (1)

又因 $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$$\therefore \quad \frac{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \quad \frac{\cos^3\theta-\cos^3\alpha}{\cos^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)}=\frac{\sin^3\alpha-\sin^3\theta}{\sin^2\theta(\sin\alpha-\sin\theta)}$$

即
$$\frac{\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$

即
$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}+\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=0$$

即
$$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0$$

18. 左邊
$$=\begin{vmatrix}1 & \cos^4\theta & 0\\ 1 & (1+\sin^2\theta)^2 & 0\\ 1 & \cos^4\theta & (1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta\end{vmatrix}$$
$$=[(1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta][(1+\sin^2\theta)^2-\cos^4\theta]$$
$$=(1+\cos^2\theta+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$\times(1+\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta-\cos^2\theta)$$
$$=2\cdot 2\cos^2\theta\cdot 2\cdot 2\sin^2\theta=16\sin^2\theta\cos^2\theta$$

習　題　六 (37—38 頁)

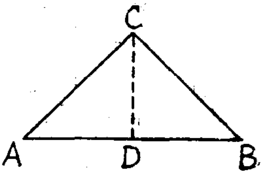
1. 2. 3. 4. 從略。

習　題　七 (42—43 頁)

1. a, b, c 從略。 (a 之答數 $c=3.1194$, $b=2.2223$)

2\. 今 $\overline{AC}=30\sqrt{2}$ 尺，$AB=60$ 尺，

$AD=30$ 尺。



$\cos A=\dfrac{30}{30\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

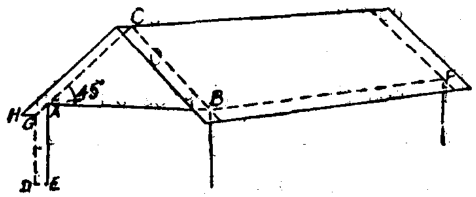
$\therefore\quad A=45^\circ$（屋頂之傾斜）

$\therefore\quad CD=30\tan 45^\circ=30$ 尺（屋脊距屋簷之高）

3\. $\because\quad AB=40$ 尺，　$BF=80$尺，　$\angle A=45^\circ$

$DE=1$ 尺，　$\angle H=\angle A=45^\circ$

$AC=20\sqrt{2}$ 尺，　$GA=\sqrt{2}$尺。

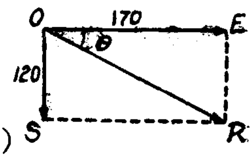


$\therefore$ 椽子 CG 長 $20\sqrt{2}+\sqrt{2}=21\sqrt{2}=29.694$ 尺。

全屋面之面積爲　$21\sqrt{2}\times 82\times 2=3444\sqrt{2}$

$=4870.5$ 平方尺。

4\. 合力 $OR=\sqrt{170^2+120^2}=208$ 磅



$\because\quad \tan\theta=\dfrac{120}{170}=\dfrac{12}{17}=.7059$

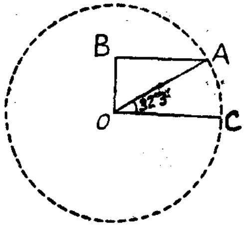
$\therefore\quad \theta=35^\circ 13'$（東 $35^\circ 13'$ 南）

5\. $\because\quad \angle AOC=32^\circ 3'$，　$\therefore\quad \angle AOB=57^\circ 57'$

∴ $\overline{AB}=\overline{AO}\sin 57°57'$

$=4000\times.8476$

$=3390.4$ 英里

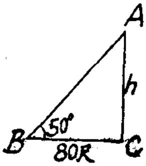


∴ 緯度圈爲以 BA 爲半徑之一圓周長爲

$2\pi\times3390.4=21310$ 英里

6. 桿高 $=80\tan50°=80\times1.1918$

$=95.34$ 尺.



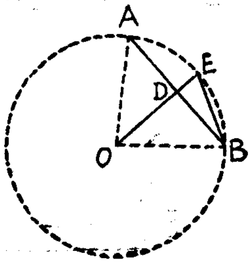
7. 設 $\overline{AB}=c,\quad \overline{BE}=b,\quad \overline{BD}=\frac{c}{2}$

則 $\angle BOE=\angle AOE=\frac{180°}{n}$

令 $\angle AOE$ 以 $\widehat{AE}$ 度之

即 $\angle EBA$ 以 $\frac{1}{2}\widehat{AE}$ 度之

故 $\angle EBA=\frac{1}{2}\cdot\frac{180°}{n}=\frac{90°}{n}$



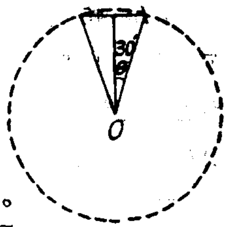
∴ $\frac{c/2}{b}=\cos\frac{90°}{n}$　　∴ $b=c\Big/2\cos\frac{1}{n}90°$

8. 設 p 爲周界，則

$\frac{p}{720}\div1=\sin30'$

(∵ 中心角爲一度)

∴ $p=720\times0.00873=6.283$



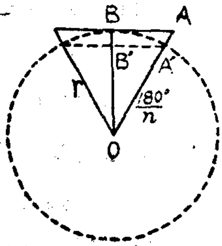
9. ∵ $\overline{AB}=\overline{BO}\tan\frac{180°}{n}=r\tan\frac{180°}{n}$

$\therefore \quad S = nr \cdot r \tan\dfrac{180^\circ}{n} = nr^2 \tan\dfrac{180^\circ}{n}$

$\because \quad A'B' = r\sin\dfrac{180^\circ}{n}$

$B'O' = r\cos\dfrac{180^\circ}{n}$

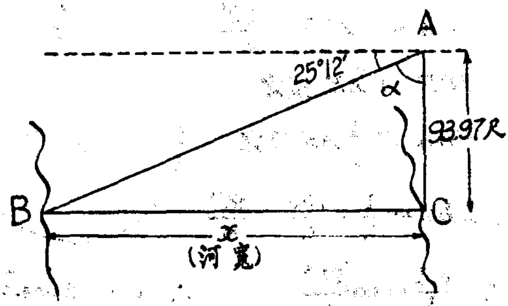
$\therefore \quad S' = nr^2 \sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\dfrac{180^\circ}{n}$



習 題 八 (53—57 頁)

1. $x = BC = $ 河寬 $= AC\tan\alpha = 93.97\tan(90^\circ - 25^\circ12')$

$= 93.97\tan 64^\circ48' = 93.97 \times 2.1251 = 200$ 尺



2. 今 $\angle A$ 爲直角

$\angle L = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$

又 $LA = 4$ 浬

故二舟距離爲

$AB = LA\tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$

$= 6.928$

故 A, B 之距離爲 6.928 浬.