

837002

315

4636

T·8

一九八七年

高等代数研究生题解

第八册

杨守昌 李正龙 胡舒合编



安徽

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

一九八七年
高等代数研究生题解
第八册（函授教材）

杨守昌 李正龙 胡舒合编

安徽大学数学系函授组

一九八七年五月

前 言

经过半年多的努力,1987年《数学分析研究生题解》(即函授教材第七册)与《高等代数研究生题解》(即函授教材第八册)终于与读者见面了。在收集试题和题解的过程中,得到了各兄弟院校研究生招生办公室及各校数学系同志的热情支持,有的试题甚至是请考生在考场上抄录下来的。在收集和编写试题解答时,还得到了我系部分同志的支持。在此,对他们一并表示衷心感谢。由于某些原因,一些学校的试题或解答未能收入本书,特请这些学校予以谅解。

我们在编写解答时,对少数简单计算题写法编简,考生在正式考试时,应多写一些中间步骤才能使答案完整。

由于编写时间仓促,书中一定存在不少缺点和错误,恳请广大读者批评指正。

这套函授教材各册书均保证供应。各册定价是:第一册,《一元微积分》,551题解,1.50元;第二册,《级数与多元微积分》,370题解,1.50元;第三册,《微分方程》,390题解,1.10元;第四册,《线性代数》,447题解,1.10元;第五、六册,1985年和1986年非数学专业用110套《高等数学研究生题解》,3.00元;第七册,1987年高等院校《数学分析研究生题解》,3.00元;第八册,1987年高等院校《高等代数研究生题解》,3.00元;还有为复旦大学编教本《概率论》习题编写的《概率论题解》,1.80元。以上定价中均含挂号寄书邮费。购书来款请寄“安徽大学数学系函授组(合肥市)”,并请 在汇款单附言栏注明购各册书的册数,不要另来函说明,以免核对之繁。

目 录

1	中国科学院数学研究所.....	(1)
2	北京大学.....	(7)
3	中国科学技术大学.....	(11)
4	清华大学.....	(15)
5	浙江大学.....	(21)
6	北京范师大学.....	(25)
7	南开大学.....	(30)
8	厦门大学.....	(36)
9	四川大学.....	(43)
10	武汉大学.....	(48)
11	复旦大学(一).....	(52)
12	吉林大学.....	(58)
13	山东大学.....	(64)
14	安徽大学.....	(68)
15	杭州大学.....	(74)
16	江西大学.....	(78)
17	广西大学.....	(82)
18	黑龙江大学.....	(86)
19	辽宁大学.....	(90)
20	河北大学.....	(95)
21	郑州大学.....	(98)

22	湘潭大学.....	(102)
23	贵州大学.....	(107)
24	内蒙古大学.....	(112)
25	新疆大学.....	(115)
26	暨南大学.....	(118)
27	云南大学.....	(124)
28	天津大学.....	(129)
29	西安交通大学.....	(133)
30	南京工学院.....	(139)
31	同济大学.....	(143)
32	哈尔滨工业大学.....	(147)
33	大连工学院.....	(150)
34	西南交通大学.....	(154)
35	上海科学技术大学.....	(157)
36	成都电讯工程学院.....	(161)
37	湖南大学.....	(165)
38	华南工学院.....	(169)
39	华东化工学院.....	(171)
40	东北工学院.....	(177)
41	重庆大学.....	(180)
42	上海交通大学.....	(185)
43	成都科学技术大学.....	(189)
44	山东海洋学院.....	(193)
45	华东师范大学.....	(200)
46	四川师范大学.....	(205)
47	华中师范大学.....	(210)

I

48	西南师范大学	(214)
49	上海师范大学	(218)
50	曲阜师范大学	(222)
51	华南师范大学	(226)
52	江西师范大学	(231)
53	山东师范大学	(236)
54	辽宁师范大学	(243)
55	复旦大学(二)	(247)
56	中山大学	(248)
57	合肥工业大学	(249)
58	北京师范学院	(251)
59	华侨大学	(252)
60	中国纺织大学	(254)
61	哈尔滨师范大学	(256)
62	北京钢铁学院	(257)
63	兰州大学	(259)
64	河北师范大学	(260)

以下是各校数学分析试题

65	哈尔滨师范大学(262)	66	上海科学技术大学(263)
67	四川师范大学(265)	68	中国纺织大学(267)
69	华中师范大学(268)	70	内蒙古大学(270)
71	兰州大学(272)	72	西北大学(275)
73	云南大学(277)	74	北京钢铁学院(279)
75	河北师范大学(281)		

1 中国科学院数学研究所

一、(16分)试求出所有适合下式的非零复多项式 $f(x)$:

$$f(f(x)) = [f(x)]^n, n \text{ 是正整数.}$$

解、(1)若 $\partial(f(x))=0$, 则 $f(x)=C$, 其中 $C \neq 0$ 为常数. 则由 $f(f(x)) = [f(x)]^n$ 得 $f(f(x)) = C^n = C$. 于是 $C^n = C$, 即 $C^{n-1} = 1$. 其解为 $n-1$ 次单位根:

$$C_k = \cos \frac{2k}{n-1}\pi + i \sin \frac{2k}{n-1}\pi, k=0, 1, \dots, n-2.$$

(2)若 $\partial(f(x)) \geq 1$, 设 $f(x)$ 为 m 次多项式. 比较题设方程两端首项次数得 $mn = n^2$, $m = n$, 即 $f(x)$ 为 n 次多项式. 设

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

把 $f(x)$ 代入题设方程两端, 得

$$(a_0 - 1) [f(x)]^n + a_1 [f(x)]^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

逐一从高到低比较各项系数得 $a_0 = 1$, $a_1 = \dots = a_n = 0$, 所以 $f(x) = x^n$.

二、(16分) 设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵, 则 AB 与 BA 有相同的特征根.

证: 设

$$f(\lambda) = |\lambda E - AB| = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_k \lambda^{n-k}, C_0 = 1$$

$$g(\lambda) = |\lambda E - BA| = \sum_{k=0}^n (-1)^k C'_k \lambda^{n-k}, C'_1 = 1.$$

则由特征多项式的系数与矩阵主子式之间的关系可得:

$C_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为 AB 的 k 阶主子式之和,

$C_k' (k=1, 2, \dots, n)$ 为 BA 的 k 阶主子式之和.

但由于 AB 与 BA 的 k 阶主子式之和 C_k 与 C_k' 相等, 即

$C_k = C_k' (k=1, 2, \dots, n)$, 即有 $f(\lambda) = g(\lambda)$, 所以 AB 与 BA

有相同的特征多项式.

三、(17分) 设 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 矩阵, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1} \binom{j-1}{i-1}, & i < j, \\ (-1)^{j-1}, & i = j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \quad \binom{j-1}{i-1} \text{ 为组合数.}$$

求证: $A^2 = I$ (单位矩阵).

证. 令 $A^2 = B = (b_{ij})$. 当 $i > j$ 时 $b_{ij} = 0$ 显然.

当 $i = j$ 时 $b_{ii} = 1$ 亦显然. 当 $i+1 < j+1$ 时,

$$\begin{aligned} b_{i+1, j+1} &= \sum_{k=i}^j (-1)^k \binom{k}{i} (-1)^j \binom{j}{k} \\ &= \sum_{k=i}^j (-1)^{k-j} \binom{j}{k} \binom{k}{i}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \binom{j}{k} \binom{k}{i} &= \frac{j!}{k!(j-k)!} \cdot \frac{k!}{i!(k-i)!} \\ &= \frac{j!}{i!(j-i)!} \cdot \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!} = \binom{j}{i} \binom{j-i}{k-i} \end{aligned}$$

以此值代入 (1) 式得

$$\begin{aligned}
b_{i+1, j+1} &= \sum_{k=i}^j (-1)^{k+i} \binom{j}{i} \binom{j-i}{k-i} \quad (\text{令 } k-i=s) \\
&= (-1)^{j+i} \binom{j}{i} \sum_{s=0}^{j-i} (-1)^s \binom{j-i}{s} \\
&= (-1)^{j+i} (1-1)^{j-i} = 0
\end{aligned}$$

四、(17分) 设 A, B 为 $m \times n$ 阶有理系数矩阵, 若存在复可逆矩阵 P , 使 $PAP^{-1} = B$, 则存在有理系数可逆矩阵 Q , 使得 $QAQ^{-1} = B$.

证. 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), P = (p_{ij}), X = (x_{ij})$, 且 $P^{-1}AP = B$. 考虑方程, $AX = XB$, 即

$$\sum_k a_{ik} x_{kj} = \sum_k x_{ik} b_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

令 $\lambda_k = x_{i, (i-1)n+j}$, 其中 $k = (i-1)n+j$, 则 (1) 式化成下面一般形式:

$$\sum_{k=1}^{n^2} C_{ik} \lambda_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n^2), \quad (2)$$

其中 C_{ik} 是用 λ_k 代换 (1) 式中的 x_{ij} 以后对应第 j 个方程 λ_k 的系数. 因此 (1) 与 (2) 是等价的, 且由 $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Q}$ 可得 $C_{ij} \in \mathbb{Q}$.

因为 (1) 式中当 $x_{ij} = p_{ij}$ 时方程成立, 亦即齐线性方程组 (2) 有非零解, 所以 $C = (C_{ij})_{n^2 \times n^2}$ 奇异. 不妨设其秩为 $n^2 - r$, 此时方程 (2) 有且仅有 $n^2 - r$ 个独立方程和 r 个独立变量. 不妨设前 $n^2 - r$ 个方程独立, 而 $\lambda_{n^2-r+1}, \dots, \lambda_{n^2}$ 为 r 个独立变量. 令

$$x_i = \lambda_{n^2-r+i} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

$$d_{ij} = -C_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, n^2-r; \\ j=1, 2, \dots, r).$$

于是方程(2), 从而方程(1)等价于

$$\sum_{k=1}^{n^2-r} C_{ik} \lambda_k = \sum_{j=1}^r d_{ij} x_j. \quad (3)$$

按Gramer法则, 方程(3)对任一组 $(x_1, \dots, x_r)$ 有唯一解。将此解代入 X , 得 $\det X = \psi(x_1, \dots, x_r)$ 。

由 $C_{ij} \in Q$ 得 ψ 是 $x_1, \dots, x_r$ 的有理系数多项式。而当 $x_{ij} = p_{ij}$ 时 $\det X = \det P \neq 0$, 所以 ψ 不是零多项式。因此存在 $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0}) \in Q^r$, 使

$$\det X_0 = \psi(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{r0}) \neq 0.$$

取 $Q = X_0$, 则 $|Q| \neq 0$ 且 $Q \in Q^{n \times n}$, 使 $Q^{-1}AQ = B$ 。

五、(17分) 设 S_1, S_2 为 $n \times n$ 实半正定对称矩阵。

证明: $(\det S_1)^{1/n} + (\det S_2)^{1/n} \leq (\det(S_1 + S_2))^{1/n}$ 。

证。先证明一个不等式: 设 $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \right)^{1/n} \quad (4)$$

此等价于 $\left[1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \right] \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$ 。

把左右两端分别变形, 即欲证

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{k/n} \\ \leq \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \right) \quad (5)$$

$g_1(x), g_2(x)$, 使

$$g_1(x)a_{11}(x) + g_2(x)a_{12}(x) = d(x).$$

令 $Q_{21}(x) = -g_2(x)$, $Q_{22}(x) = g_1(x)$ 即得证.

设 $n=k$ 时结论成立. 即 $(a_{11}(x), \dots, a_{1k}(x)) = d_1(x)$, 存在 Q_{ij} , $2 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$, 使

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1k}(x) \\ Q_{21}(x) & Q_{22}(x) & \dots & Q_{2k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1}(x) & Q_{k2}(x) & \dots & Q_{kk}(x) \end{pmatrix} = d_1(x). \quad (7)$$

设对应于 a_{1j} 的代数余子式为 $g_{1j}(x)$, 于是 (7) 式等价于

$$\sum_{j=1}^k g_{1j}(x)a_{1j}(x) = d_1(x).$$

或者
$$\sum_{j=1}^k g_{1j}(x) \frac{a_{1j}(x)}{d_1(x)} = 1,$$

$$\text{即 } (g_{11}(x), \dots, g_{1k}(x)) = 1. \quad (8)$$

当 $n=k+1$ 时, 由于

$$(a_{11}(x), \dots, a_{1k}(x), a_{1,k+1}(x)) = d(x),$$

于是 $(d_1(x), a_{1,k+1}(x)) = d(x)$. 由 (8) 得

$$(d_1(x), g_{11}(x)a_{1,k+1}(x), g_{12}(x)a_{1,k+1}(x), \dots, g_{1k}(x)a_{1,k+1}(x)) = d(x).$$

则存在 $f_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, k+1$), 使

$$\sum_{j=1}^k f_j(x)g_{1j}(x)a_{1,k+1}(x) + f_{k+1}(x)d_1(x) = d(x).$$

令 $Q_{k+1,j}(x) = -f_j(x)$ ($j=1, 2, \dots, k$),

$Q_{k+1,k+1}(x) = f_{k+1}(x)$, 则可得证 (6) 式.

2 北 京 大 学

(含解析几何)

一、(10分)求经过三条直线

$$x=y=\frac{z}{4}, \quad x=\frac{y}{4}=z, \quad \frac{x}{4-\sqrt{2}}=\frac{y}{1+2\sqrt{2}}=\frac{z}{1+2\sqrt{2}}$$

的一个圆锥面的方程

$$\text{解. 令 } e_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 1, 4), \quad e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 4, 1),$$

$$e_3 = \frac{1}{6}(4 - \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2})$$

又设 $e = (l, m, n)$ 是与圆锥面的轴平行的单位向量, 则

$$e_1 \cdot e = e_2 \cdot e = e_3 \cdot e.$$

由此得 $m = n, \quad 2l + m = 0$

$$\text{解得 } e = \frac{1}{3}(-1, 2, 2).$$

设锥面半顶角为 θ , 则 $\cos \theta = e_1 \cdot e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

以直线 $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ 为轴、半顶角为 $\frac{\pi}{4}$ 的圆锥面方程为:

$$2(-x + 2y + 2z)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2),$$

此即 $7x^2 + y^2 + z^2 + 8xy - 16yz + 8xz = 0$

二、(20分)设仿射变换 σ 在直角坐标系中的表示式为

$$\begin{cases} x' = \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}y + \frac{2}{3}z \\ y' = \frac{2}{15}x + \frac{14}{15}y - \frac{1}{3}z \\ z' = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

试证 σ 是一绕轴的旋转，并求出旋转轴和转角。

解。因为

$$A = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 11 & 2 & 10 \\ 2 & 14 & -5 \\ -10 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

是一个正交阵，且 σ 保持 O 点不动，又 $|A|=1$ ，由此推得 σ 必为绕经过 O 点的直线的旋转。

求 σ 的不动点，即求满足 $\sigma(x, y, z) = (x, y, z)$ 的点，解方程组

$$(A - E)(x, y, z)' = (0, 0, 0)'$$

得，在直线 $y = 2x, z = 0$ 上的点都是不动点，该直线就是旋转轴。

$$\text{令 } e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0),$$

$$e_3 = (0, 0, 1).$$

以 $oe_1e_2e_3$ 建立新的坐标系，则 oe_1 即为旋转轴。在新的坐标系下， σ 对应的矩阵为

$$T'AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -\sqrt{5}/3 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

其中 $T = (e_1', e_2', e_3')$ 此时 $\cos \theta = \frac{2}{3}$,

$$\theta = \arccos \frac{2}{3}.$$

三、(15分) 计算下列行列式的值:

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & b_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$$

解. 把原行列式拆成两个行列式相加可得

$$D_n = 1 - b, \quad D_{n-1} = 1 - b_1(1 - b_2 D_{n-2}) = \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k b_1 b_2 \cdots b_k$$

$$= 1 - b_1 + b_1 b_2 - b_1 b_2 b_3 + \cdots + (-1)^n b_1 b_2 \cdots b_n$$

其中 $D_{n-k} = (b_{k+1}, b_{k+2}, \cdots, b_n)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$

四、(20分) 设 $f(x)$ 是一个复系数三次多项式, α 和 β 是两个虚数, $\alpha \neq \bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$. 已知 $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$, $f(\bar{\beta}) = \overline{f(\beta)}$. 试证明 $f(x)$ 是实系数多项式.

证. 设 $f(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$, $a_i \in \mathbb{C}$.

由题设: $f(\alpha) = a_1 \alpha^3 + a_2 \alpha^2 + a_3 \alpha + a_4 = C_1$,

$$f(\bar{\alpha}) = a_1 \bar{\alpha}^3 + a_2 \bar{\alpha}^2 + a_3 \bar{\alpha} + a_4 = C_2,$$

$$f(\beta) = a_1 \beta^3 + a_2 \beta^2 + a_3 \beta + a_4 = C_3,$$

$$f(\bar{\beta}) = a_1 \bar{\beta}^3 + a_2 \bar{\beta}^2 + a_3 \bar{\beta} + a_4 = C_4.$$

把以上四式看作 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性方程组, 其系数行列式为一范德蒙行列式 $D \neq 0$, 所以方程组有唯一解. 但由于 $f(\alpha) = \overline{f(\alpha)} = \overline{f(\overline{\alpha})}$, $f(\beta) = \overline{f(\beta)}$, 所以 $a_1, a_2, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ 也是方程组的一个解. 由此应有 $\overline{a_i} = a_i (i=1, 2, \dots, 4)$, 即得 $f(x)$ 为实系数多项式.

五、(20分) 设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) (n \geq 2)$, $B = A' A$.

(1) 求 B 的全部特征值;

(2) 求 B 相似于对角矩阵的条件, 并说明理由.

解. (1) $\text{rank } B = \text{rank } A' A = \text{rank } A = \begin{cases} 1, & A \neq 0 \\ 0, & A = 0. \end{cases}$

所以 $|\lambda E - B| = \lambda^n - (\text{tr } A' A) \lambda^{n-1}$

$$= (\lambda - \sum_{i=1}^n a_i^2) \lambda^{n-1}, \text{ 从而 } B \text{ 的全部特}$$

征值为: $\sum_{i=1}^n a_i^2, 0, 0, \dots, 0$, 其中是 $n-1$ 个 0.

(2) 若 $\sum a_i^2 \neq 0$, 则 B 有 $n-1$ 个线性无关的属于特征值 0 的特征向量, 有 1 个属于 $\sum a_i^2$ 的特征向量, 此时 B 可对角化. 若 $\sum a_i^2 = 0$, 则 B 可对角化的充要条件是 $B = 0$, 即 $A = 0$. 因此除 $\sum a_i^2 = 0$ 但 $A \neq 0$ 的情形外 (此时 B 不能对角化, 反证即可), B 均可对角化. 特别地, 当 A 为实矩阵, B 均可对角化.

注: 读者可参看浙江大学第四题.

六★(15分) 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 且

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1.$$

试证:
$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V_1 \\ V_1 \cap V_2 = V_2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} V_1 + V_2 = V_2 \\ V_1 \cap V_2 = V_1. \end{cases}$$

证. 显然有 $\dim V_1$ 及 $\dim V_2 \geq \dim(V_1 \cap V_2)$, 且 $\dim V_1$ 及 $\dim V_2 \leq \dim(V_1 + V_2)$. 由此得

$$|\dim V_1 - \dim V_2| \leq \dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 1.$$

若 $\dim V_1 = \dim V_2$, 则

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = 2\dim V_1$$

为偶数, 但这与题设矛盾. 所以

$$|\dim V_1 - \dim V_2| = 1.$$

若 $\dim V_1 > \dim V_2$, 则有

$$2\dim V_2 + 1 = 2\dim(V_1 \cap V_2) + 1$$

即有 $\dim(V_2) = \dim(V_1 \cap V_2)$, 由此得

$$V_2 = V_1 + V_2, \quad V_2 = V_1 \cap V_2.$$

同理, 当 $\dim V_2 > \dim V_1$ 时有

$$V_1 = V_1 \cap V_2, \quad V_1 = V_1 + V_2.$$

3 中国科学技术大学

一、(20分) 设动直线 L 平行于平面 $Ax + By + Cz + D = 0$, 并沿着直线 $x = 0, z = a$ 与直线 $y = 0, z = -a$ 滑动, 这里数 $a > 0$. 求动直线 L 所确定的曲面方程.

解、分别在直线 $x = 0, z = a$ 与 $y = 0, z = -a$ 上取点