高等学校教学用書

# 高等数学

GAODENG SHUXUE

（化工类型专业适用）

上 册

天津大学数学教研室編

人民教育出版社

高等学校教学用書

# 高 等 数 学

## GAODENG SHUXUE

（化工类型专业适用）

上 册

天津大学数学教研室編

（内部發行）

人民教育出版社

本书是供高等工业学校化工类型专业使用的教材，但因編写时間是在教学改革之前，内容已不能完全符合目下的要求。为了广泛吸收意见以便改进，先作内部发行。希望讀者特别是有关教师多提宝貴意见。

本书計划分上、中、下三册出版。上册内容是单元函数的微积分学和无穷級数理論。

解析几何部分已以《解析几何讲义》名义单独出版。

# 高 等 数 学

（化工类型专业适用）

上 册

天津大学数学教研室編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市書刊出版业营业許可証出字第2号）

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号13010·819 开本850×1168 1/32 印张13 5/16

字数319,000 印数0001—7,000 定价(6)￥1.30

1960年8月第1版 1960年8月北京第1次印刷

# 目 录

緒論……1
預篇 实数……11
§0.1. 实数 数軸……11
§0.2. 实数的絕对值及有关运算……15
§0.3. 量(数)的近似值 近似計算法……17
第一章 函数……35
§1.1. 变量及其变动区域……35
§1.2. 变量間的依从关系 单变量函数的定义……38
§1.3. 函数的几个簡单性質……48
§1.4. 綫性函数 綫性分式函数……55
§1.5. 反函数概念……59
§1.6. 复合函数 初等函数……62
§1.7. 函数的分类……69
第二章 函数的极限与連續……75
§2.1. 数列的极限……75
§2.2. 函数的极限……87
§2.3. 无穷大与无穷小……96
§2.4. 极限运算法則……102
§2.5. 极限存在准則 两个重要极限……111
§2.6. 无穷小的比較……118
§2.7. 函数的連續性……122
§2.8. 連續函数的基本性質……127
§2.9. 初等函数的連續性……129
第三章 导数及其应用……135
§3.1. 导数概念……135
§3.2. 微分法……148
§3.3. 中值定理……173
§3.4. 函数的增减性……177
§3.5. 函数的极值……180
§3.6. 累次微分法……192

§3.7. 曲綫的凹凸性及拐点 ……197
§3.8. 柯西定理与罗彼塔法則 ……204
§3.9. 函数的漸近变化情形及曲綫的漸近綫 ……213
§3.10 研究函数的一般程序，曲綫的描繪 ……217
§3.11. 方程的近似根 ……220
第四章 微分及其应用 ……229
§4.1. 微分概念 ……229
§4.2. 微分法 微分形式的不变性 ……234
§4.3. 高阶微分 ……237
§4.4. 微分在近似計算上的应用 ……240
§4.5. 曲率 ……245
第五章 不定积分 积分法 ……255
§5.1. 不定积分概念及不定积分法 ……255
§5.2. 基本积分法 ……263
§5.3. 几种函数类型的积分 ……280
§5.4. 积分表的使用法 不可积分的举例 ……288
第六章 定积分及其应用 ……293
§6.1. 实际問題及定积分的概念 ……293
§6.2. 定积分的簡单性質 中値定理 ……299
§6.3. 定积分与原函数之間的关系 ……306
§6.4. 定积分的計算方法 ……312
§6.5. 定积分的近似积分法 ……320
§6.6. 定积分在几何学上的应用 ……329
§6.7. 定积分在物理学上的应用 ……346
§6.8. 广义积分 ……359
§6.9. 广义积分的斂散性 $\Gamma$ 函数 ……366
第七章 級数 ……373
§7.1. 无穷級数的基本概念 ……373
§7.2. 級数的基本性质 ……377
§7.3. 正項級数 判定正項級数收斂、发散的充分准則 ……381
§7.4. 任意項級数 絕对收斂 条件收斂 ……388
§7.5. 冪級数 收斂半徑 收斂区間 ……392
§7.6. 台劳公式 台劳級数 ……401
§7.7. 台劳級数在近似計算上的应用 ……415
§7.8. 欧拉公式 ……419

# 緒　論

高等数学是研究現代科学技术必不可少的工具，一般說来，它包括了自解析几何、微积分一直到現代数学的众多分支。高等工业学校的高等数学課的內容仅是其中几个部分的基本知識。作为一門基础理論課，高等数学在教学計划中的地位与任务是以毛澤东思想为指导，培养工人阶級的世界观，为学习专业課准备必要的数学知識，为掌握最新科学成就奠定較坚实的数学理論基础，培养解决实际問題的能力与科学思維能力。为了能正确地学习，以达到这个要求，就必須对高等数学、并且一般地对数学的实質、它与現实世界的关系有一个基本的了解。

## 一、数学研究的对象及其特点

数学，正如其他自然科学一样，它的发生发展归根到底决定于人类生产实踐的需要。自然数与一些几何概念就是人們在生活实踐中观察自然、改造自然而逐渐形成的。实踐的需要促使人們去注意要暂时舍弃各种具体現象中的特殊性，而单单从数量方面去发現这种共同的抽象数量关系。这种抽象的数量关系一經被証实、被掌握，便可以大大节省劳动力。

在現实世界里我們遇到各种各样的量。各門自然科学所研究的量都与一定的質有关，例如重量、温度、电位、速度…等等，这些具体問題中的量本質上是不同的。但是数学中的量是一般的量，是舍弃了一切具体意义的量，实际上它代表这些各种各样的量的共同性。在各門科学中研究的各种規律，都表現为各种有着質的差别的量之間的关系。例如速度为 $v_0$ 的等速直綫运动方程是

$s=v_0t+s_0$，这个方程表明了速度 $v_0$、时間 $t$、距离 $s$ 这三个量之間的关系。彈性系数为 $k$ 的彈簧所受的力 $F$ 与伸长量 $l$ 的关系为 $F=kl$ 等等。但是从数学的观点看，这些都是綫性函数关系：$y=kx+b$，这里的 $x$ 不必表示"时間"，不必表示"伸长量"；$y$ 也不必表示"距离"，不必表示"力"。数学所研究的就是这种抽象的量的各种关系。

以上事实完全可以相当好地表明数学的特点，使我們了解数学所研究的对象、所用的方法和它的意义。恩格斯在对数学作了精辟的分析之后給数学下了一个經典的定义：数学是以现实世界的空間形式和数量关系为研究对象的科学。为了能正确地、透彻地領会这个定义的深刻含义，我們須要从数学与生产实踐的关系、从数学与其他科学的关系与区别中对数学的特点作进一步的研究。

数学的抽象性是它的一个特征，虽然抽象性并不是数学独有的属性，因为每一門科学都必須通过抽象以达到理性的認識。然而数学与其他科学在这方面还有所不同。其他科学所研究的对象是物质的各种特定运动形式，它們主要研究事物的质的某一方面特点；而数学则只研究这些物质形态的各种运动形式之中量的这一側面。因此数学的特点还在于在数学的抽象中只保留量的关系和空間形式，而暂时抛开了其他一切。所以数学常常被看作是一門抽象的科学。当然现实世界中各种事物的质与量是不可分的，各門科学在研究的过程中必須进行对于量的考察并且最后还必須找出准确的数量关系。比如仅仅知道自由落体越落越快是不够的，只有得出了 $v=gt$ 这个数学公式才算掌握了自由落体的运动規律。仅仅知道物体之間有吸引力是不够的，只有得出了 $F=-k\frac{m_1m_2}{r^2}$ 这个公式才算掌握了万有引力的規律。沒有这种准确的数量关系式，人們就无法有效地改造自然。由此可見，正是要对于客观規律进行具体的研究，所以才有必要对量进行抽象的研究；由这方面講，数学的抽象性只能是它的表面的特点，它的实质却是极为深刻的现实性。

数学所研究的对象的这种抽象性也决定了数学研究方法的抽象性。自然科学家为了証明自己的論断总要用实验，数学家証明定理就不能仅凭某种实驗或具体的例証，而常常須要結合基本概念，用推理和計算导出这个定理①。因此，数学有邏輯严密的特点。这样講絲毫不能动摇具体的实踐对于形成数学概念的决定意义。事实上，数学定理以及証明的方法完全是在实踐中形成的。数学論証方法的这种特点常被資产阶級唯心論者用来宣揚形而上学唯心主义，把数学歪曲为純粹形式主义的符号游戏；他們認为数学的理論只有依靠从理論到理論的邏輯推証才能发展，認为一切直观的印象都是与数学的严密性不相容的，否認感性認識是理性認識的基础，这是完全錯誤的。

数学的抽象性和推理的邏輯严密性，要求数学不但以一些已知的量的关系作为研究的对象，还必須以一般可能的量的关系作为研究的对象。例如在研究商高定理时就不能只以边长为 3、4、5 的直角三角形为对象而必須假設画出的是一个沒有任何特殊性的任意的直角三角形。也就是說，代表一切可能的直角三角形。这也是数学的一个深刻的特点。

数学的对象和推理方法的这些特点也自然地要求数学理論构成謹严的系統。当然每門科学的理論都是有系統的，这种系統性是客观事物之間内在联系的深刻的反映，但是数学理論的系統性却表現得更为突出。然而应当看到数学的系統是由人們整理出来的，它反映人們对于事物之間内在联系的認識与理解，用不同的观点可以整理出不同的系統。还应当注意，随着生产水平的提高，随着人类对于客观規律的認識的不断深刻化，即使是科学的数学系統也必定随之要有不断的改善。所以对于数学的系統性也不能有絕对化的看法。过去中学数学各科独立，系統龐杂，例如把数与形分离开来，在研究形的时候排斥用算术、代数的方法，在几何学中人为地加上了圓規直尺作图的严格限制，这就形成了过去欧几里

① "数学——它的内容、方法与意义" 1958 年科学普及出版社版，第一册，3 页。

德几何系統，这种片面地追求形的純粹性就是形而上学宇宙观的反映。

数学的現实性是它的抽象性的物质基础。数学的概念都是直接或間接地由現实世界中的具体事物抽象出来的。数学的定理是客观世界中的空間形式和数量关系的客观規律的反映。

数学应用的普遍性是数学的現实性的很好的証据。正是因为数学是由現实世界中抽象出来的，它舍弃了一切个别問題中的具体属性，而仅仅概括了最普遍的性质，并且正是由于反映了客观世界的量的固有关系，所以数学才可以有极其广泛的应用。因此，从这一方面看，数学的抽象性就意味着其应用的普遍性。例如正是因为已經証明了一般的二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时有极大值或极小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，所以就完全可以利用这一結論求出以 $v_0$ 为初速垂直向上抛射的物体所能达到的最高点，因为这个运动方程 $s=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 表明 $s$ 是一个二次函数；也可以求出一定周长所圍面积为最大的矩形，因为如設周长是 $2c$，一边之长是 $x$，則面积 $A=cx-x^2$ 也是一个二次函数。数学的理論都可以象这样用于表面上毫不相同的各种問題。

数学能作为准确的科学预見的工具，也是数学反映了客观真理的証明，科学史上有許多著名的预見的例子，例如

(1) 法国学者勒弗列(U. J. J. Leverrier, 1811—1877) 研究行星运动問題，他发現根据古典力学的定律得出的推論与观测的事实有出入，他認为这是某顆未知行星的引力影响的結果，并且根据力学法則算出了这顆行星的质量与軌道。后来观测員果然在勒弗列所指出的位置上看到了这顆新行星——海王星。

(2) 1863 年英国物理学家麦克斯韦尔(J. C. Maxwell)概括了由实驗建立起来的电磁現象規律。把这些規律表述为方程的形式，他用純粹数学的方法从这方程推論出可能存在电磁波，发表了著名的电磁場理論，根据这理論，电磁場的傳播具有波动的性质，

幷算出了傳播速度等于光速。20余年后赫兹(H. Hertz)用实驗的方法产生和研究了电磁波。結果証明电磁波的性質和光波的性質完全相同,这样就証实了麦克斯韦尔的电磁場理論。

既然在許多問題上自然現象都与数学推算出来的預期結果完全符合,那就足以証明不仅所依据的那种自然科学定律是眞理,而且那种凭以推演和計算的方法也是客观世界的一种固有的規律。

資产阶級唯心論者往往利用数学的抽象性对数学进行歪曲,他們否認数学依存于現实的事实,而認为数学不过是人类心灵的自由产物。事实上,从数学的整个发生发展过程来看数学都是和实际密切联系着的,唯心論者从根本上曲解了科学的抽象。"…一切科学的(正确的、郑重的、不是荒唐的)抽象,都更深刻、更正确、更完全地反映着自然…"①总之,抽象性是数学的特征,但是这离不开数学的現实性,不但数学概念本身,而且它的方法都是反映客观現实的,只不过在一些情形中反映比較直接,而在另一些情形中反映要經过一系列的抽象过程、概念形成过程等等。"純粹数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系——这是非常現实的資料——为对象的,这些資料表現于非常抽象的形式之中,这一事实只能表面地掩盖它的来自現实世界的根源。"②所以脫离了对客观事物的具体研究就无从抽象出来数学的概念,但是如果仅仅局限于对具体事物的具体研究而不通过抽象与概括,加以提高,也就不可能产生数学概念,幷且一般地說,也就沒有了科学。必須統一地看待数学的抽象性与現实性。

数学在反映客观实际的同时也反映着客观的辯証規律,同时数学本身也是辯証的。数学的这种辯証的性質卽使在初等数学中也有明显的表現。例如数的性質只有在运算中才能表現出来,离开了正数負数的运算,0是不可理解的。代数学中充滿着象正数与負数、根与冪等等的矛盾。而变量与常量的矛盾、有限与无限的

① 列宁:"哲学笔記"人民出版社1956年版155頁。

② 恩格斯:"反杜林論"人民出版社1956年版37頁。

矛盾則更是高等数学的主要內容。

## 二、高等数学的研究对象及方法

在十六世紀以前的漫长年代里，数学的进步是很緩慢的。初等几何学所研究的一直是不变的图形，初等代数所研究的一直是不变的量。研究的方法也是各自孤立的。到了十六世紀末叶，資本主义在欧洲开始兴起，伴随而来的还有地理上、天文上的偉大发現，1609年至1618年凱普勒发表了行星运动的三大定律。这些都給人們的科学思想带来巨大的影响。資本主义的兴起带来了第一次工业革命。机械工业、造船、紡織、采矿等工业的迅速发展提出了几何与力学上的一系列新問題。同时海运的发展也要求天文学有更快的发展，因而也引起了許多新的数学問題。例如造船就需要計算物体的重心；需要計算曲边图形的面积；为了确定机器或車船的运动状态，不仅要知道平均速度，更需要知道瞬时速度和加速度；为了計算行星的軌道，需要計算曲綫的弧长等等。很明显，計算平均速度只需要算术四則，而仅仅运用算术四則无論如何也求不出瞬时速度；用乘法就可以解决不变的力 $F$ 作用于一物体經过位移 $s$ 所作的功的問題，但是如果 $F$ 是变力，那么它作用于一物体所作的功就无法再用乘法計算了。这就要求数学創立嶄新的观点与方法。这就是説技术的改革与发展需要人們更深刻地掌握自然規律。自然界的一切都是永恒运动、相互制約、不断发展的，因此用以研究自然規律的数学方法也就必須反映运动的观点，不能再限于研究不变的量而要研究变量；不能再孤立地研究某一个量而要从各量在运动中的相互依从关系，或者函数关系，去研究各个量。于是数学就跨入了一个新时代。

法国著名的数学家兼哲学家笛卡儿（R. Descartes）(1596—1650）首先把变量引进数学并創立了坐标法。在十七世紀人們已經发現，把以上所提到的大量問題归納起来不外两类：第一类的代

表是求非匀速运动的瞬时速度或在曲綫上求切綫的問題，由这些問題引导出微分学；第二类問題的代表是非匀速运动中的总路程問題或变力作功問題，由这一些問題引导出积分学[①]。有許多数学家都参加了微积分学的准备工作，总的来說，微积分学是由牛頓(I. Newton)(1642—1707)和萊布尼茲(G. W. Leibnitz)(1646—1716)所完成的。恩格斯着重指出了这个过程和高等数学的辯証的意义："笛卡儿底变数是数学中的轉折点，于是运动与辯証法便进入了数学，于是必然地立即也就有了微分与积分，微分与积分也就立刻开始，并且整个講来它們是由牛頓与萊布尼茲完成了，而不是由他們发現的。"[②]用这种辯証的方法研究量与量之間的关系就能更深入地掌握客观規律，因而也就能更完滿地解决实际問題。例如用代数学的二次方程理論只能解决前面所提到的那类极大极小値問題，而在微积分学里就能对連續函数的极大极小値問題作統一的研究，得到更为普遍更便于利用的方法。

由于高等数学的这个特点，可以肯定，必須用辯証唯物主义的观点去学习高等数学。密切联系实际，不是孤立地、片面地而是有联系地、全面地研究各部分內容是最重要的学习方法。

数学分析的基础是极限概念，或者說无穷小量分析的方法，这种方法日益扩大地滲入了許多实用的領域中去，于是微积分学开始迅速地发展起来了，产生了許多新的重要的数学部門：如微分方程、变分法、积分方程、复变函数等，这些发展也使数学的另一些部門，如几何学，得到了新的进步。

## 三、社会主义制度下数学发展的无限前途。中国数学的发展

自然科学与工程技术的蓬勃发展是受到生产的急剧变革和扩

① "数学——它的內容、方法与意义"第一卷，87頁。

② "辯証法与自然科学"人民出版社1954年1月北京出版123頁。

大所激起的，这自然又与社会制度有密切的关系。偉大的十月社会主义革命以后，苏联在数学的各个領域內作出許多具有基本意义的貢献。例如与工程技术关系很密切的微分方程、概率論等发展的速度都是空前的。最近苏联有着划时代意义的人造卫星的成就，使得最发达的資本主义国家——美国——瞠乎其后。在1959年9月苏联更实現了环繞月球的飞行。我們知道，火箭的准确发射需要解决一系列非常复杂的数学問題，如果与此有关的数学没有发展到极高的水平，这些問題是不可能迅速解决的。这就更有力地說明，社会生产以及全部社会条件对数学的发展有着如何重要的影响。

我国是世界上文化发达最早的国家之一，由于农业的发展，引起了对数学的各种需要，所以数学很早就有了各方面的发展。最早的关于古代数学的記載，散見于諸子百家的著述，如“庄子”記有惠施对极限概念的初步認識。最古的“周髀算經”記有三千年前的商高定理，公元前263年刘徽注“九章算术”时得圓周率 $\pi=\frac{157}{52}$，他所用的方法和現在的极限方法很类似。后来祖冲之(429—500)推得圓周“密率”为 $\frac{355}{113}$，“約率”为 $\frac{22}{7}$，并定圓周率于3.14159265与3.1415927之間，在欧洲得到这个結果要比祖冲之晚一千一百余年。九章算术中載有不定方程、二元一次联立方程、开方、比例等問題。宋朝秦九韶改善賈宪所創的高次方程的解法，称为“正負开方术”，其方法与欧洲的霍納(Horner)法完全一样，但早于霍納五百七十多年。在賈宪的“开方作法本源图”中将六次以內的二項式定理系数一一列出。在朱世杰的“四元玉鉴”增到八次，这要比欧洲的巴斯加早二百多年。秦九韶所創“大衍求一术”曾流傳到欧洲，称为“中国剩余定理”。

总之，我国古代数学家在代数、几何、三角諸方面都有很大貢献，可見祖国劳动人民在数学方面具有丰富的才能。但是由于黑暗的封建統治使得民生雕敝，数学也就随之停滞不前，特别是近百

年来加上帝国主义的侵略，生产遭到极大的破坏，科学技术便急驟落后了，数学当然就更得不到发展。虽然如此，其間仍有許多数学家作出了不少貢献，不过这个时期主要的是把西洋数学移入了中国。

一直到解放以前，中国的数学也和其他自然科学一样，基本上处于西方国家的附庸地位，不务实际等資产阶級学术思想在数学界占居統治地位，使中国的数学有如无本之木。

解放以后，客观条件有了根本的改变，在党和政府的关怀下，在苏联等社会主义国家的帮助下，我国科学随社会主义建設事业的蓬勃发展也有了广闊光輝的前途，在1958年大跃进时期，数学界也展开了以反对脱离社会主义建設实际为中心的学术思想斗爭。跃进的客观事实彻底批駁了党不能領导科学研究，数学不能联系生产实际等論点。在科学研究上肯定了实踐——理論——实踐的路綫的正确性，在工学院数学教学上确立了既要加强数学理論又要密切結合专业联系实际的教学原則。大跃进以来虽然只經过很短的时間，党的科学研究方針就显示了其偉大的意义。例如现在重大的水利工程，天气中长期預报等社会主义建設事业的发展已經使偏微分方程、計算数学等方面的研究有了长足的进步，很多数学学科也都同样地有了进展，数学各个分支开始走上全面发展的道路。

我国持續大跃进的新形势，技术革命、技术革新的高潮，尖端技术的迅速发展向数学提出了更高的要求，特别要求多快好省地培养技术干部，使学生最快地掌握現代科学最新成就。但是原来的数学教学还存在着少慢差費的現象，不能完全适应我国社会主义建設的需要。这主要是因为形而上学和唯心主义在数学領域中还有很大的影响。資产阶級的学术观点强調数学理論系統的完整性，認为旧的数学体系是久經考驗而不可侵犯的，反对改革。

旧的数学体系基本上是十七、八世紀形成的，那个时代資产阶

級哲学的特点是形而上学的方法論。虽然当时資产阶級学者在正确地研究数学的时候不自覺地、被动地遵守了辯証唯物主义法則，这种資产阶級世界观对于他們的科学研究絕不能不产生很大的影响。到了十九世紀許多数学家在数学分析的理論基础方面展开了整理理論系統的工作，使数学分析有了巩固的邏輯基础。这对于数学的发展来説无疑是非常重要的：澄清了模糊的观念，揭露了概念之間的更根本的关系和实質，为发展数学树立了理論指导。但是資产阶級正是利用了这一点，顚倒了历史，把这种最后整理出来的邏輯系統看作是数学賴以存在和发展的根本。他們否認数学的眞理性首先体现在现实的应用之中而不是在一般的定义与公理中，也不是在証明的形式严格性中。不扫清这些資产阶級的形而上学唯心观点就无法使数学的研究适应当前社会主义建設的迫切需要。因此教育革命必須向自然科学領域內部深入。要在整个数学領域內插上毛澤东思想的紅旗，彻底改革数学旧体系，建立起辯証唯物主义的新的数学体系。

# 預篇　实数

## §0.1. 实数　数軸

### I. 量与数

人們在生产实踐中，遇到各种本质不同的量，如物理学中的温度、密度、电阻、速度、加速度、热容量等；化学中的原子量、原子价、濃度、溶解度等；几何学中的長度、面积、体积等等。量都是客观存在的，并且是具体的，它是一切物体的属性。我們所遇到各种量尽管它們的本质有种种不同，但它們有一个共同的性质，就是可以被測量。所謂測量就是先取一个本质上与被測量的量相同的固定量作为单位，然后把被測量的量与这个单位量进行比較，这种比較过程就叫測量。測量的实踐，使人們認識到量的相对的大小，由于这种認識的逐漸深入，漸漸形成抽象的数的概念。所以数就是客观存在的具体的量的抽象表达形式。

在生产实踐中，人們最初由于数而产生整数概念。以后由于測量就产生分数、无理数的概念。如以測量長度为例，当用单位長度測量被測量的長度时，如不能被量尽，就把单位長度分成更小的单位，如分成十等分，然后再进行測量，如能被量尽时，这就产生了有限小数（分数）的概念。以后人們又发現有的被測量的長度，无論如何細分单位長度，也不能量尽，例如以正方形的边長为单位長度去測量对角綫时，就是这种情形，这样就产生了无理数的概念。整数、零、分数、无理数的全体构成实数集合。数学分析的一切运算都建立在实数集合上，构成实数集合的系統如下表：

- 实数集合
  - 有理数集合
    - 整数集合 （包含正負整数和零）
    - 分数集合 （具有形式如 $\frac{p}{q}$ 的分数的全体。$p, q$ 为整数，并且 $q \neq 0$，但无公因数）
  - 无理数集合 （$\pi$, $e$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sin 20°$, $\log 2$ 等都是无理数的例子）

关于有理数的一切运算法则对于实数集合也都适用。这件事在本书以后是作为已知的，关于实数的一般理論，本书不作介紹。

## II. 实数軸

有了实数集合概念以后，現在介紹一下实数的几何表示，这就是**实数軸**的概念。实数軸是由以下步驟形成的：

1° 作一直綫，規定这直綫的正向（一般地說，在水平位置的直綫上是規定自左向右为正向），这样的直綫叫軸（如图 0-1）。

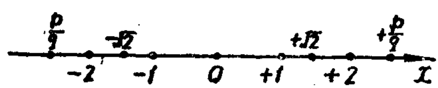


图 0-1

2° 在軸上指定一点 $O$，叫原点。另外規定一綫段 $u$ 作为单位长的綫段，即 $u$ 的长是 1。

3° 在軸上任意取一点 $P$，$O$ 与 $P$ 两点在軸上就决定一个以 $O$ 为起点，以 $P$ 为終点的綫段 $\overline{OP}$。根据綫段的量法我們知道：$\overline{OP}$ 綫段的长可以是整数，可以是分数，也可以是无理数。如果 $\overline{OP}$ 的长是整数 $n$，当 $P$ 点在 $O$ 点的右边时，我們就說 $P$ 点对应于正整数 $n$，当 $P$ 点在 $O$ 点左边时，我們就說 $P$ 点对应于負整数 $-n$。軸上这类的点都叫**整数点**；如果 $\overline{OP}$ 的长是分数 $\frac{p}{q}$，当 $P$ 点在 $O$ 点右边时，我們就說 $P$ 点对应于正分数 $+\frac{p}{q}$，当 $P$ 点在