

罗增儒数学奥林匹克丛书



LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

新世纪版

初中数学 奥林匹克

题解

同步辅导
全真赛题

分类精解
模拟演练

全 一 册

罗增儒 主编

陕西师范大学出版社



罗增儒 1945年生，广东惠州

人，陕西师范大学教育考试研究所所长、教授、硕士生导师。获曾宪梓教师奖，享受国务院的政府特殊津贴。是中国数学奥林匹克首批高级教练，长期从事数学竞赛的命题、解题、辅导和理论研究工作。

1984年以来，已为全国初中联赛、高中联赛、冬令营提供了10余道正式试题，多次聘为高、初中联赛命题组成员。1992年，曾受到中国数学奥委会与中国数学普委会的联合表彰；1993年，他所主持的“奥林匹克数学学科建设”研究课题获全国高校优秀教学成果国家级二等奖。主编的小学、中学、大学数学奥林匹克丛书受到广泛的欢迎。代表作有《数学竞赛导论》、《数学解题学引论》、《直觉探索方法》。

ISBN 7-5613-0524-9



ISBN 7-5613-0524-9/G·376

定价：16.00元

罗增儒数学奥林匹克丛书

初中数学奥林匹克题解

全 一 册

主 编	罗增儒		
编 写	罗增儒	安振平	江树基
	刘康宁	岳建良	王彦斌

陕西师范大学出版社

图书代号:JF185500

图书在版编目(CIP)数据

初中数学奥林匹克题解. 全一册/罗增儒主编. —西安:陕西师范大学出版社, 2001. 7

ISBN 7-5613-0524-9

I. 初… II. 罗… III. 数学课—初中—解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15577 号

责任编辑 朱永庚

封面设计 徐 明

责任校对 郭健娇

出版发行 陕西师范大学出版社

社 址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)

E-mail: nuph@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印 刷 潼关县印刷厂

开 本 850×1168

印 张 15.875

字 数 350 千

版 次 2001 年 7 月第 1 版

印 次 2002 年 4 月第 3 次

定 价 16.00 元

开户行:西安工行小寨分理处 账 号:216-144610-44-815

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。

电 话:(029)5251046(传真) 5233753 5307864

内 容 简 介

本书与罗增儒主编的《初中数学奥林匹克》(初一、初二、初三分册)配套,解答了该书的全部习题,并提供6套仿真、实用的模拟试题.各类习题与解答既可用于赛前的适应性训练,又可用于平时的评估测试;既可成套使用,又可拆开重组.其中的大部分题目,对参加中考也很有帮助.最后一部分还汇编了近3年全国初中数学竞赛试题及解答。

初中数学奥林匹克题解

前言

本书与罗增儒主编的《初中数学奥林匹克》(初一、初二、初三分册)配套,内容包括三部分。

第一部分是《初中数学奥林匹克》各讲的习题解答。当初为了给读者留下更多的思考空间,同时也限于篇幅,我们只给了选择题、填空题的结论,读者在使用中,有的找不出结论,有的猜不透过程,学习与辅导都多感不便。正是根据实际的需要,我们对每一道选择题、填空题都作了讲解,并与解答题的答案汇集在一起。当然,这将给读者带来许多方便,但并不妨碍读者提出更多、更好的解法。

第二部分是奥林匹克模拟试题,其目的是为读者提供一个解题能力实际检验与强化提高的机会,同时,也为考试经验的积累与考试心理的调整提供一个环境。其内容部分选自笔者主编的《初中数学竞赛模拟试题》,此书的仿真性、实用性与长久训练价值都曾获好评;另一部分内容选自笔者为有关刊物、有关竞赛所编拟的训练题,在指导思想,依然追求仿真环境、训练价值与新颖性,既保留了《初中数学竞赛模拟试题》的优点,又补充了数学命题研究的新成果。

第三部分是最新、最权威的初中数学竞赛试题,以便于读者把握数学竞赛的最新动向。

鉴于疏漏在所难免,而更好的解法又肯定会层出不穷,我们重申,无意以“请读者原谅”作为遁词,而是诚请各地师生毫不客气地指

罗增儒 数学奥林匹克丛书

正. 借此机会, 我要衷心感谢, 几年来曾就《数学奥林匹克丛书》提过批评与建议的读者, 他们的智慧已使新的《数学奥林匹克丛书》减少了一点愚蠢.

罗增儒

2001年4月

初中数学奥林匹克题解

目 录

第一部分 奥林匹克训练题解答

初一分册

第一讲	巧算	1
第二讲	字母表示数	8
第三讲	分数的分拆	12
第四讲	有理数	17
第五讲	+1 与 -1	23
第六讲	十进制	29
第七讲	整式的加减	33
第八讲	整除的判定	37
第九讲	一元一次方程	41
第十讲	一元一次方程的应用题	45
第十一讲	最大公约数与最小公倍数	50
第十二讲	素数与合数	54
第十三讲	奇数与偶数	58
第十四讲	带余除法	62
第十五讲	线段和角	66
第十六讲	一次方程组	71
第十七讲	相交线与平行线	76

第十八讲	一元一次不等式	80
第十九讲	趣味图形	85
第二十讲	整式的乘除	91
第二十一讲	不定方程	95
第二十二讲	几何不等式初步	101
第二十三讲	容斥原理	106
第二十四讲	计数原理	112
初二分册		
第一讲	自然数的分拆	117
第二讲	因式分解	123
第三讲	因数分解	127
第四讲	末位数	131
第五讲	三角形	135
第六讲	分式	141
第七讲	恒等式的证明	146
第八讲	三角形中的不等关系	151
第九讲	待定系数法	156
第十讲	换元法	161
第十一讲	配方法	165
第十二讲	同余	169
第十三讲	四边形	173
第十四讲	比例	180
第十五讲	相似形	185
第十六讲	二次根式	191
第十七讲	共线点与共点线	197
第十八讲	面积	203
第十九讲	对称	208
第二十讲	推理问题	213

初中数学奥林匹克题解

第二十一讲	抽屉原理	218
第二十二讲	图论思想	222
初三分册		
第一讲	一元二次方程	226
第二讲	二次方程的判别式	233
第三讲	根与系数的关系	238
第四讲	三角函数	243
第五讲	二元二次方程组	248
第六讲	平方数与勾股数	255
第七讲	圆	260
第八讲	二次函数	265
第九讲	二次不等式	272
第十讲	三角形的四心(一)	278
第十一讲	三角形的四心(二)	284
第十二讲	旋转	290
第十三讲	高斯函数	298
第十四讲	定值与最值	304
第十五讲	技巧方程	311
第十六讲	几何中的数数问题	317
第十七讲	几何中的存在性问题	323
第十八讲	反证法	329
第十九讲	数学奥林匹克的技巧(一)	334
第二十讲	数学奥林匹克的技巧(二)	343
第二十一讲	数学奥林匹克的技巧(三)	349
第二十二讲	数学奥林匹克的技巧(四)	355

第二部分 奥林匹克模拟套题及解答

第一套模拟试题	362
---------	-----

罗增儒 数学奥林匹克丛书

第一套模拟试题解答·····	365
第二套模拟试题·····	370
第二套模拟试题解答·····	373
第三套模拟试题·····	379
第三套模拟试题解答·····	382
第四套模拟试题·····	388
第四套模拟试题解答·····	391
第五套模拟试题·····	399
第五套模拟试题解答·····	403
第六套模拟试题·····	413
第六套模拟试题解答·····	416

第三部分 全国初中数学竞赛试题及解答

1998 年初中数学竞赛试题·····	426
1998 年初中数学竞赛试题解答·····	430
1998 年全国初中数学竞赛试题·····	437
1998 年全国初中数学竞赛试题解答·····	441
1999 年全国初中数学联合竞赛试题 参考答案及评分标准·····	450
2000 年全国初中数学联合竞赛试题参考答案···	472
2000 年全国初中数学竞赛试题解答·····	486

第一部分 奥林匹克训练题解答

初一分册

第一讲 巧算

习题 1-1(P.8)①

(一) 选择题②

1. 给出 20 个数:

87 91 94 88 93 91 89 87 92 86

90 92 88 90 91 86 89 92 95 88

它们的和是().

(A) 1789 (B) 1799 (C) 1879 (D) 1899

●解 由于这 20 个数均与 90 接近或相等,故可先将它们都减去 90 后求和,有

$$-3+1+4-2+3+1-1-3+2-4+0+2-2+0+1-4-1+2+5-2=-1.$$

从而,所给 20 个数的和为

① 习题 1-1 表示《初中数学奥林匹克》中的初一分册习题 1-1.下同.

② 本书中的选择题,每小题都有 4 个选项,其中只有一项是符合题目要求的.

$$90 \times 20 - 1 = 1799. \quad \text{应选(B).}$$

2. $3 - 6 + 9 - 12 + \dots + 1995 - 1998$ 等于().

(A) -335 (B) 335 (C) -999 (D) 999

●解法1 共有666个数,提出公因数3,得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3 \times (1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 665 - 666) \\ &= 3 \times [(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (665 - 666)] \\ &= 3 \times (-333) = -999, \text{选(C).} \end{aligned}$$

●解法2

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3 - (6 - 9) - (12 - 15) - \dots - (1993 - 1995) - 1998 \\ &= -1998 + 333 \times 3 = -999, \text{选(C).} \end{aligned}$$

3. 在自然数1,2,3,4,5,⋯中,前15个素数之和的负倒数等于().

(A) $-\frac{1}{328}$ (B) $-\frac{1}{329}$ (C) $-\frac{1}{337}$ (D) $-\frac{1}{340}$

●解 自然数中的前15个素数依次为:2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47.有

$$2 + 3 + 5 = 10, \quad 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17 = 30,$$

$$29 + 31 = 60, \quad 37 + 43 = 80, \quad 41 + 47 = 88,$$

故所求值为 $-\frac{1}{10 + 3 \times 30 + 60 + 80 + 88} = -\frac{1}{328}$. 选(A).

【发散思考】你能迅速、准确地写出100以内的素数吗?

4. 为了从500个外形相同的鸡蛋中找出惟一的一个双黄蛋,检查员将这些蛋按1~500的序号排成一列,第一次先从中取出序号为单数的蛋,发现其中没有双黄蛋;他将剩下的蛋在原来的位置上又按1~250编了序号(即原来的2号变为1号,原来的4号变为2号,⋯⋯原来的500号变为250号),又从中取出新序号为单数的蛋进行检查,仍没有发现双黄蛋;如此继续下去,检查到最后一个蛋才是双黄蛋.这个双黄蛋最初的编号是().

(A) 48 (B) 250 (C) 256 (D) 500

初中数学奥林匹克题解

●解法1 设这只双黄蛋最初的编号是 a , 经过一次检验, 它的编号变为 $\frac{a}{2}$, 经过二次检验后, 编号变为 $\frac{a}{2^2}$, …… 经过 n 次检验后, 编号变为 $\frac{a}{2^n}$. 该双黄蛋的最终编号为 1, 有

$$\frac{a}{2^n} = 1, \quad \text{即} \quad a = 2^n.$$

若正向考虑, 从 500 个蛋到 1 个蛋需检验 8 次, 所以 $a = 2^8 = 4^4 = 256$. 故应选(C).

●解法2 第一次取出 250 个蛋后, 问题给出的四个选择支变为
(A) 24 (B) 125 (C) 128 (D) 250

第二次取出 125 个蛋, 显然(B)被否定, 剩下的 3 个选择支为
(A) 12 (C) 64 (D) 125

以下的依次变化是

第三次: (A) 6 (C) 32 (D) 被否定)

第四次: (A) 3 (C) 16

第五次: (C) 8 (A) 被否定)

(二) 填空题

1. 设 $n!$ 表示从 1 连续乘到 n , 如

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \times 2, \quad 3! = 1 \times 2 \times 3, \dots,$$

$$1995! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 1995,$$

那么 $1! + 2! + 3! + \dots + 1995!$ 的个位数字是_____.

●解 由 $n!$ 的定义知, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, 更有 $6!, 7!, \dots, 1995!$ 的个位数字均为 0. 又 $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24$, 得 $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$. 故 $1! + 2! + 3! + \dots + 1995!$ 的个位数字是 3.

【引申探究】 你知道吗?

$\sum_{i=1}^4 i!$, $\sum_{i=1}^{2000} i!$ 的个位数字是一样的.

2. 老师在黑板上写了 13 个自然数, 让小明计算平均数(保留两位小数), 小明计算出的答案是 12.43, 老师说最后一位数字错了, 其他的数字都对. 这 13 个自然数的和是_____.

●解 设这 13 个自然数的和是 a , 则

$$12.40 \times 13 \leq a \leq 12.49 \times 13,$$

即 $161.2 \leq a \leq 162.17$, 且 a 为整数.

故 $a = 162$.

【发散思考】你能说出老师根据什么说出小明计算有错吗?

3. 已知如下数表:

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
... ..

那么第 200 行所有的数的和为_____.

●解法 1 由所给数表知, 第 200 行共有 $2 \times 200 - 1 = 399$ 个数, 第一个数为 200, 第二个数为 201, ..., 第 399 个数为 $200 + 399 - 1 = 200 + 398$, 故第 200 行所有的数的和为

$$\begin{aligned} & 200 + 201 + 202 + \cdots + 598 \\ &= 399 \times 200 + (1 + 2 + 3 + \cdots + 398) \\ &= 79800 + \frac{398(1 + 398)}{2} \\ &= 79800 + 79401 = 159201. \end{aligned}$$

●解法 2 设

$$x = 200 + 201 + 202 + \cdots + 598,$$

$$x = 598 + 597 + 596 + \cdots + 200.$$

$$2x = 798 \times 399,$$

$$x = 399 \times 399 = 159201.$$

则
有
得

初中数学奥林匹克题解

●解法3 由数表知,设第 i 行的第 1 个数为 i ,则最后一个数为 $3i-2$,共有 $2i-1$ 个数,得

$$\begin{aligned} Si &= i + (i+1) + \cdots + (3i-2) = [1 + (3i-2)] - [1 + (i-1)] \\ &= \frac{(3i-1)(3i-2)}{2} - \frac{i(i-1)}{2} = (2i-1)^2, \end{aligned}$$

所以 $S_{200} = (2 \times 200 - 1)^2 = 399^2 = 159201$.

(三) 利用图 1-1-1 的数表,写出 1.01 连乘 6 次的准确值.

●解 经试算 $1.01^2, 1.01^3, \dots$ 可知,当表中的数字为一位数时,每一个数的左边都看成有一个未写出的零(左边第一个数可以不写);当表中的数字为两位数时,其十位数字就自动占领当初零的空位,故由最后一行得 $1.01^6 = 1.061520150601$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

图 1-1-1

(四) 把 1995 个数 $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111 \cdots 11}_{1995 \text{ 个 } 1}$ 相加,所得的末四位数是多少?

●解法1 由于和的个位数上有 1995 个 1 相加,十位上有 1994 个 1 相加,百位上有 1993 个 1 相加,千位上有 1992 个 1 相加,而

$$\begin{aligned} &1 \times 1995 + 10 \times 1994 + 100 \times 1993 + 1000 \times 1992 \\ &= 1995 + 19940 + 199300 + 1992000 = 2213235. \end{aligned}$$

所以和的末四位数为 3235.

●解法2 因题中只求相加和中末四位数,故只与每个数的末四位数和不足四位数的个位、十位、百位有关,有

$$\begin{aligned} &1 + 11 + 111 + \underbrace{1111 + \cdots + 1111}_{1992 \text{ 个 } 1111} \\ &= 123 + 1111 \times 1992 \\ &= 123 + 2213112 \\ &= 2213235. \end{aligned}$$

所以,和的末四位数为 3235.

(五) 1995 减去它的 $\frac{1}{2}$, 再减去余下的 $\frac{1}{3}$, 再减去余下的 $\frac{1}{4}$,
 ……依次类推, 一直到减去余下的 $\frac{1}{1995}$, 试求最后剩下的数.

●解法 1 由 1995 减去它的 $\frac{1}{2}$, 得 $1995 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1995 \times \frac{1}{2}$;
 从 $1995 \times \frac{1}{2}$ 再减去它的 $\frac{1}{3}$, 得

$$1995 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1995 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1995 \times \frac{1}{3};$$

依次类推, 一直到减去余下的 $\frac{1}{1995}$, 得 $1995 \times \frac{1}{1995} = 1$. 即最后余下的数是

$$\begin{aligned} & 1995 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{1995}\right) \\ &= 1995 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{1994}{1995} = 1. \end{aligned}$$

●解法 2 列表如下:

减去	剩下
$\frac{1995}{2},$	$\frac{1995}{2},$
$\frac{1995}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right),$	$\frac{1995}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1995}{3},$
...	...
$\frac{1995}{1994} \left(1 - \frac{1}{1995}\right),$	$\frac{1995}{1994} \times \frac{1994}{1995} = 1.$

【发散思考】 1. 一个数 a 减去它的 $\frac{1}{2}$, 余下的数是 $\frac{a}{2}$, …, 那么减去余下的数多少是 $\frac{a}{2000}$?

2. 2000 减去它的 $\frac{1}{2}$, 再减去余下的 $\frac{1}{3}$, …, 依次类推, 一直减去余下的 $\frac{1}{2000}$, 最后剩下的数是 1 吗? 如果再继续作下去, 你能猜到余下的数是什么? 如此作下去, 能否出现剩下的数是负的数?