上海市大学教材

高等数学

（理科用）

中册

上海人民出版社

高 等 数 学

（理 科 用）

中 册

《高等数学》编写组

上 海 人 民 出 版 社

上海市大学教材

高等数学

（理科用）

中 册

《高等数学》编写组

上海人民出版社出版

（上海绍兴路5号）

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 270,000

1973年8月第1版 1973年8月第1次印刷

印数 1—25,000

统一书号 13171·58 定价 0.95 元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

目　录

第五章　空间解析几何

毛主席教导我们："**马克思主义者认为人类社会的生产活动，是一步又一步地由低级向高级发展，因此，人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面。**"在平面解析几何中，通过建立平面坐标系，把平面上的图形与数或代数式联系起来，从而可以用相应的数或代数式的运算来考察平面上图形的性质以及图形之间的相互关系，同时又给数或代数式以直观意义．随着生产实践的发展，提出了许多涉及到空间图形的问题，这就需要研究空间解析几何．

空间解析几何与平面解析几何相仿，它通过建立空间坐标系把空间图形与数或代数式联系起来，给数或代数式以直观意义，是研究空间图形的性质以及图形之间的相互关系的一种数学方法．

这一章我们先建立空间直角坐标系，然后引进有广泛应用的向量，再以向量为工具，讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容．

第一节　空间直角坐标系

这一节把平面直角坐标系推广到空间直角坐标系．

过空间某一定点 O 作三条互相垂直的直线 Ox, Oy, Oz, 叫做坐标轴，分别称为 x 轴，y 轴，z 轴，规定它们的正向使按右手法则排列，也就是以右手握住 z 轴，当 x 轴按右手握拳方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的方向，如图 5-1 所示．

由三坐标轴两两决定的平面 xOy, yOz, zOx 称为坐标平面；三个坐标轴的交点 O 称为原点，在三个轴上选定长度单位，这样就构成了空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$.

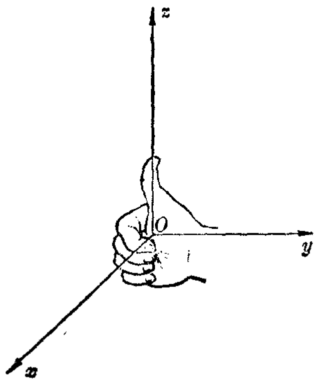

图 5-1

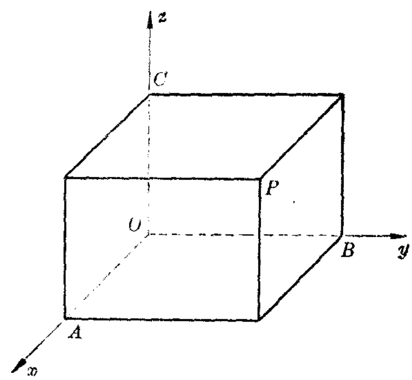

图 5-2

建立了空间直角坐标系，就可以把空间一点用它的三个坐标表示出来．设 P 为空间任一点．过 P 作垂直于三坐标轴的平面，它们与三个坐标轴分别交于 A, B, C 三点(图 5-2)．若这三点在三个轴上的坐标分别是 a, b, c, 则称这三个数 a, b, c 为 P 点的 x, y, z 坐标，记为 $P(a,\ b,\ c)$．反过来，任意给定三个数 (a, b, c)，空间中就有唯一的一点以它为坐标．这样，空间的点 P 和数组 $(a,\ b,\ c)$ 之间就建立了一一对应的关系．

显然，原点的坐标为 $(0,\ 0,\ 0)$；在 x 轴，y 轴，z 轴上点的坐标分别是 $(x,\ 0,\ 0)$，$(0,\ y,\ 0)$，$(0,\ 0,\ z)$；在坐标面 xOy, yOz, zOx 上点的坐标分别是 $(x,\ y,\ 0)$，$(0,\ y,\ z)$，$(x,\ 0,\ z)$．

空间两点之间的距离　设 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 是空间两点(图 5-3)．为了求它们之间的距离，我们过 P_1, P_2 各作坐标面的平行平面，组成一长方体，它的各棱与坐标轴平行，显见

$$P_1A=x_2-x_1,\quad AD=y_2-y_1,\quad DP_2=z_2-z_1.$$

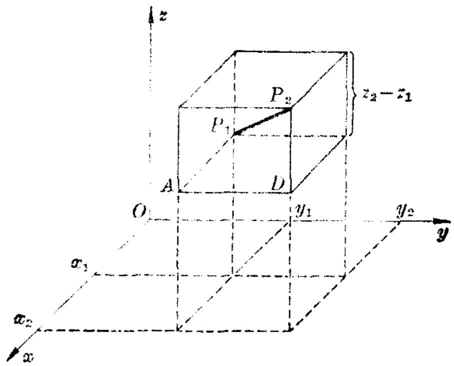

图 5-3

根据勾股定理有

$$P_1P_2=\sqrt{(P_1D)^2+(DP_2)^2}$$
$$=\sqrt{(P_1A)^2+(AD)^2+(DP_2)^2},$$

所以

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间任意两点的距离公式，它是平面上两点距离公式的推广．从这个公式可以得到任一点 $P(x, y, z)$ 和原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

［例1］ 求点 $P_1(1, 0, -1)$ 与 $P_2(4, 3, -1)$ 之间的距离．

解：根据距离公式，

$$P_1P_2=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2+(-1+1)^2}$$
$$=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}.$$

［例2］ 求 z 轴上的一点，使它与点 $A(-4, 1, 7)$ 和与点 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等．

解：设所求 z 轴上的点为 M，它的坐标可写成 $(0, 0, z)$，其中 z 是待定的数．由两点的距离公式，

$$AM=\sqrt{4^2+(-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{17+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{66-14z+z^2},$$

$$BM=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(z+2)^2}$$
$$=\sqrt{34+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.$$

由题设 $AM=BM$，就得

$$66-14z+z^2=38+4z+z^2,$$

即

$$18z=28,\qquad z=\frac{14}{9}.$$

从而得到所求的点为 $M\left(0,\ 0,\ \frac{14}{9}\right)$.

习　　题

1. 指出下列各点位置的特殊性质:
   (1) $(4, 0, 0)$;　　(2) $(0, -7, 0)$;
   (3) $(0, -7, 2)$;　　(4) $(-5, 0, 3)$.
2. 分别求与定点 $(2, -3, -1)$ 及定点 (a, b, c) 关于原点、三坐标轴、三坐标面为对称的点的坐标.
3. 求定点 $M(4, -3, 5)$ 到原点与到各坐标轴的距离.
4. 根据下列条件，求点 B 的未知坐标:
   (1) $A(4, -7, 1)$，　$B(6, 2, z)$，　$AB=11$;
   (2) $A(2, 3, 4)$，　$B(x, -2, 4)$，　$AB=5$.
5. 在 yOz 平面上求与三已知点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ 及 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

第二节　向　　量

一、向量的概念

我们经常遇到一些量，它们不仅有大小，而且还有方向，例如位移、速度、加速度、力等等. 这种既有大小又有方向的量称为向量.

向量可以用作图的方法，也可以用坐标的方法来表示.

向量的图形表示 向量不仅有大小，而且还有方向．我们在空间中取一由 O 指向 A 的有向线段 OA，使它的长度等于所讨论向量的大小，使它的指向表示该向量的方向（图 5-4）．我们就用带有箭头的记号 $\overrightarrow{OA}$ 或与 A 同名的一个黑体小写字母 $\boldsymbol{a}$ 表示这个向量．

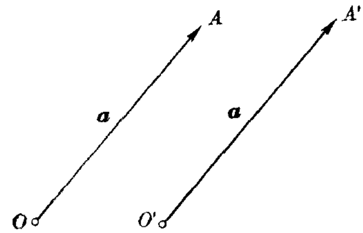

图 5-4

考察一个刚体的平行移动．当刚体从一个位置平行移动到另一位置时，刚体上各质点在同一时间内有相同的位移，各点所画出的位移向量有相同的大小和相同的方向，它们都反映了刚体位移的情况，因此刚体的平移运动可用这些位移向量中的任一个来表示．基于这样的原因，我们把这些大小相等、方向相同的向量看作是相等的．在今后的讨论中，如果遇到两向量大小相等、方向相同，就说这两个向量相等．

图 5-4 所示的向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'A'}$，由于它们的大小相等、方向相同，因此它们相等，表示了同一向量 $\boldsymbol{a}$．由此，一个向量的图形可以自由平移．今后如有必要，就可以把几个向量移到同一出发点．

向量的模 表示向量大小的数值称为向量的模．向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模等于线段 OA 的长度，用记号 $|\overrightarrow{OA}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$ 表示．

二、向量的加减法和数乘

在生产实践和科学实验中，还经常要对向量进行运算．例如，观察车床上的刀架，设大拖板向左移动了 30 毫米，中拖板向前移动了 40 毫米．这两个位移是两个向量，它们合起来就等于车刀架向左前方移动了 $\sqrt{30^2+40^2}=50$ 毫米．从这一简单的例子可以看出，两个向量合成后还是一个向量，这个新向量就是以原来两个向量为边所组成的平行四边形的对角线（图 5-5）．

又如在力学中关于力的合成、速度的合成等都有类似的情况．

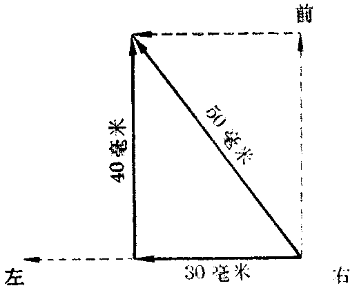

图 5-5

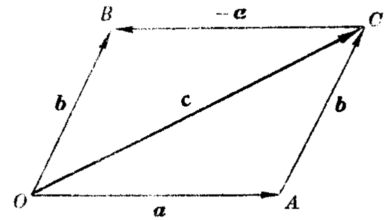

图 5-6

我们把这样的向量合成称为向量的加法，并表述如下：设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$（图 5-6），以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为边作一平行四边形 $OACB$，取对角线 $\overrightarrow{OC}$，它也表示一向量，记作 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$。向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

用平行四边形的对角线来求出两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形规则.

由于 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，因此我们还可以这样来作出两向量的和：作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 为起点作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连接 OC，就得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，这一方法叫做向量加法的三角形规则. 三角形规则和平行四边形规则没有本质的差异.

在实际中我们还经常碰到大小相等、方向相反的向量，如作用力与反作用力等. 为此，用 $-\boldsymbol{a}$ 表示大小与 $\boldsymbol{a}$ 相等但方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反的向量. 显然，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

按向量加法的三角形规则，从图 5-6 中的 $\triangle OBC$ 可得

$$\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b},$$

这可看作是把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 中的 $\boldsymbol{a}$ 移项的结果. 上式又可以简化为

$$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b},$$

这式子表示了向量的减法.

若一向量的模为 0，因而谈不上有方向，在图形上退缩为一

点，这种向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$. 显然，

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}, \text{ 或 } \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}.$$

向量与数相乘 在应用中还常常碰到向量与数相乘的情况，例如速度或力增大三倍，这表示保持它们的方向不变，而大小增大三倍，由此得出向量与数相乘（简称向量数乘）的定义.

如果 $\lambda>0$，那末 $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示一个向量，它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，大小为 $\lambda|\boldsymbol{a}|$；如果 $\lambda<0$，那末 $\lambda\boldsymbol{a}$ 也表示一向量，它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，大小为 $-\lambda|\boldsymbol{a}|$；如果 $\lambda=0$，那末

$$\lambda\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{a}=\mathbf{0}.$$

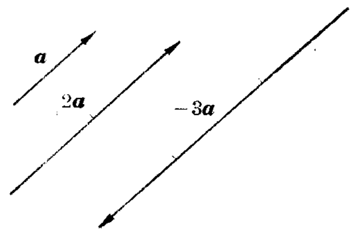

图 5-7

图 5-7 表示向量数乘的几何意义.

若一向量 $\boldsymbol{a}_0$ 的模为 1，且方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，则称 $\boldsymbol{a}_0$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量. 从向量数乘的定义有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0.$$

由上面的定义可以推出，若三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 在同一平面上（称为共面），必有 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$（$\lambda, \mu$ 是常数）.

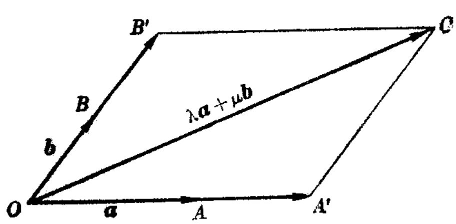

图 5-8

为了推导这个结论，把这三个共面的向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 移到同一出发点，分别记为 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$（图 5-8）. 过 C 点作 OB、OA 的平行线，与 OA、OB 的延长线交于 A'、B'.

由向量数乘的定义，有 $\overrightarrow{OA'}=\lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=\mu\overrightarrow{OB}$，再根据向量加法的平行四边形规则，得

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},$$

即

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

三、向量的坐标表示

我们已讨论了向量的图形，并且从几何上给出了向量的和与差。可以看出，这个表示方法很直观，也很清楚，但在具体运算中，这种表示方法是很不够的，我们还必须通过空间直角坐标系，引进向量的坐标表示，把向量与一组数对应起来，然后利用代数运算进一步研究向量的运算.

向量的坐标表示法 设空间直角坐标系中有一向量 $\boldsymbol{a}$. 由于向量可以平行移动，我们可把它的起点移到坐标原点，假定它的终点是 A，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$（图 5-9）. 设 A 点的坐标为 (a_x, a_y, a_z)，它是由向量 $\boldsymbol{a}$ 唯一确定的. 于是向量 $\boldsymbol{a}$ 就唯一地对应于数组 (a_x, a_y, a_z). 反过来，任意给定三个数 (a_x, a_y, a_z)，在空间中便确定一点 $A(a_x, a_y, a_z)$，于是便确定了一个向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$.

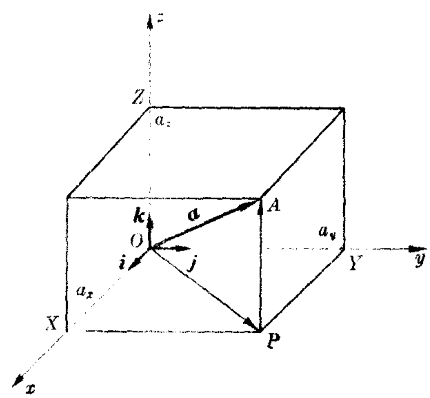

图 5-9

这样，向量 $\boldsymbol{a}$ 与数组 (a_x, a_y, a_z) 之间建立了一一对应的关系，我们称 (a_x, a_y, a_z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标（有时也称 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量），记为①

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\},$$

这就是向量的坐标表示. 有时为了便于计算，还把上式改写成下

① 在这里，为了避免与点的坐标混淆，我们用加花括号的三个数表示向量坐标.

面的按基本向量的分解式.

我们沿 x, y, z 轴分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 称它们为这一坐标系的基本向量(图 5-9). 过 A 作三平面分别垂直于三坐标轴, 与它们交于 X, Y, Z 三点, 则 $OX=a_x$, $OY=a_y$, $OZ=a_z$, 因此

$$\overrightarrow{OX}=a_x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OY}=a_y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OZ}=a_z\boldsymbol{k},$$

由向量加法的三角形规则,就有(图 5-9)

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}+\overrightarrow{OZ},$$

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$$

上式就是 $\boldsymbol{a}$ 的按基本向量的分解式.

向量加减法和数乘的坐标表示　设 λ 是一数, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两向量, $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 则有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k};$$

或写成

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,\ a_y\pm b_y,\ a_z\pm b_z\},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

从这些式子看出,向量的加、减与数乘可以归结成它们的三个坐标分别相加、相减与数乘.

[例 1]　已知向量 $\boldsymbol{a}=\{4, -1, 3\}$ 及 $\boldsymbol{b}=\{5, 2, -2\}$, 求

$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}.$$

解: $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,　　$2\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,　　$3\boldsymbol{b}=15\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$;

$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=23\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},$$

或记作

$$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\{23, 4, 0\}.$$

由此可知,它在 z 轴上的坐标为 0, 所以它在 xOy 平面上.

[例 2]　已知两点 P_1, P_2, 它们的坐标分别为 (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), 求向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$.