LONGMEN

主编　屠新民　李丽琴

龙门 高考专版

LONGMEN GAOKAO ZHUANBAN

第一轮 总复习

- 诠释新教材
- 点拨新思路
- 解读新高考
- 造就新状元

数学

龍門書局
www.sciencep.com

LONGMEN GAOKAO ZHUANBAN

龙门

高考专版

第一轮 总复习

数学

● 主 编

屠新民　李丽琴

● 编 委

冯瑞先　段全庆　李小斌　刘继勋
李应顺　陈　晓　周延军　王素叶
买应霞　赵　莹　邱万岭　兰社云
杨春国　高凤昕　李济明　张玉清

图书在版编目(CIP)数据

龙门高考专版．第一轮．数学/屠新民，李丽琴主编．—北京：龙门书局，2003

ISBN 7-80160-930-1

Ⅰ．龙…　Ⅱ．①屠…②李…　Ⅲ．数学课－高中－习题－升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034074 号

责任编辑：王　敏　韩　博/封面设计：东方上林工作室

龙门书局 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国人民解放军第 1201 工厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2003 年 6 月第 一 版　开本：A4(890×1240)

2003 年 8 月第二次印刷　印张：17 1/4

印数：30 001—40 000　字数：600 000

定　价：18.50 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言

随着素质教育的全面推进，教育改革方兴未艾，提高学生整体素质，培养学生综合能力、创新能力和实际应用能力已被放到了教学的首要位置。而高考考试已由单纯对知识的考查改为逐步增加对能力的考查。高考总复习是一门学问，也是一门科学，如何在这门学问中贯彻新课程标准，体现素质教育的精髓，是广大教师孜孜以求、亟待完善的课题。为此，我们联合一批常年执教高三第一线的名师，以高度的责任感和饱满的工作热情，为2004年参加高考的考生精心打造出了《龙门高考专版》这套在各方面都有所创新的丛书。

本套丛书按大多数重点学校的复习习惯和规律，分为三轮。分别是

第一轮：总复习。**第二轮**：专题训练。**第三轮**：模拟冲刺演练。

我们将通过系统、全面的复习引领考生顺利走完高考之路。

本次推出的是"第一轮总复习"。本轮用书以人教版最新课本和最新考试说明为依据，由具有丰富教学经验的特高级教师和对高考深有研究的教研工作者合力精心编写。以培养学生创新能力、实践能力和综合能力为宗旨，注重夯实基础，力求将学科知识系统化、专题化，聚焦高考要求，锁定高考考点，指导学生把脉高考。

本书本着**指导解题方法、点拨解题思路、训练解题能力、检测复习效果的原则**设置栏目如下：

【考点·要求】针对新教材对各知识点的不同要求面设计，增强学生的目标意识，做到心中有数。

【方法·技巧】面向高考，高瞻远瞩，总结本讲重要的方法和技巧，使学生豁然开朗，甚至"点石成金"。

【例题·点拨】紧扣本讲重点难点，传授处理问题的方法和技巧，拓展学生的解题思路。

【考题·点悟】再次阐释高考中的热点问题，使学生明确高考知识及能力要求，使复习与高考接轨。

【创新·评价·测试题】针对不同的层次要求，巩固、演练使基础知识得到再现和强化，提升演练适当拓展思维空间，注重学科内的综合，提高学生综合创新能力。

【名师·猜题】再次吹响高考对本章要求的号角，提醒学生重点问题重点学，"一叶知秋"。

【考题·预测】帮助学生巩固本讲知识，检验复习效果，以增强学生的成功感，提高自信心。

根据编者多年的教学经验，学生第一轮复习易犯的三大毛病是"贪高"、"求多"、"超前"，不利于打好基础、提高能力。愿各位考生静下心来，"千里之行，始于足下"，扎扎实实打好基础，循序渐进提高能力，本书一定会成为广大考生高考取胜的好帮手。

LONGMEN GAOKAO ZHUANBAN

龙门 高考专版

第一轮 总复习

丛书编委会

目录

第一章　集合与简易逻辑

考试内容　集合、子集、补集、交集、并集．逻辑联结词、四种命题、充要条件．

考试要求　1．理解集合、子集、补集、交集、并集的概念．了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合．

2．理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义，理解四种命题及其相互关系，掌握充要条件的意义．

第一讲　集　合

考点·要求

1．掌握从集合间的关系(包含、相等)与运算(交、并、补集)着眼，充分利用集合元素的三种性质(无序性、互异性、确定性)解决问题的方法．

2．空集$\varnothing$是不含任何元素的集合，它具有如下重要性质：对任何集合 A，$\varnothing\subseteq A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$．解隐含有空集参与的集合关系问题时，切不可忽视空集的这一特性(如"例题·点拨"的例2)．

3．注意集合的子、交、并、补的等价条件的不同形式．如 $A\subseteq B$ 与 $A\cup B=B$ 或 $A\cap B=A$ 等价．

方法·技巧

解有关集合问题时，应注意：

1．灵活应用集合概念．

2．利用集合运算构造方程、不等式、方程组来解决问题．

例题·点拨

【例1】　(2002·全国)设集合 $M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则　(　　)

A．$M=N$　　B．$M\subsetneqq N$

C．$M\supsetneqq N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

解析　本题主要考查集合的概念、表示法及集合之间的关系．

由 $x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(2k+1)$，$x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(k+2)$，

$\because k\in\mathbf{Z}$，$\therefore 2k+1$ 为奇数，$k+2\in\mathbf{Z}$，所以 $M\subsetneqq N$．

答案　B

点拨　本题也可用特殊值法来解，即取 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 得 M、N，比较元素后得解．

【例2】　已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围．

解析　本题主要考查集合的运算与不等式的运算及逻辑划分能力．

$\because A\cup B=A$，即　$B\subseteq A$．

又 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant5\}$，

考虑到"空集是任何集合的子集"这一性质，因此需对 $B=\varnothing$ 与 $B\neq\varnothing$ 两种情况分别确定 m 的取值范围．

(1)若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，即 $m<2$．此时总有 $A\cup B=A$．故 $m<2$；

(2)若 $B\neq\varnothing$，则 $m+1\leqslant 2m-1$，即 $m\geqslant2$．

因为 $B\subseteq A$，得 $\begin{cases}-2\leqslant m+1,\\2m-1\leqslant5.\end{cases}\Rightarrow -3\leqslant m\leqslant3$．

$\therefore 2\leqslant m\leqslant3$．

由(1)、(2)知 m 的取值范围是 $(-\infty,3]$．

点拨　解此类题时，要特别注意"空集是任何集合的子集"这一性质，否则将会出错．

【例3】　已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a\neq0$，若 $M=N$，求 q 的值．

解析　本题考查综合应用集合、数列、方程(组)知识解题的能力．

$\because$ 集合 M 中的三个元素是以 a 为首项，d 为公差的等差数列中的前三项；集合 N 中的三个元素是以 a 为首项，q 为公比的等比数列中的前三项．解决此题可以从已知条件 $M=N$ 着眼．为此需分两种情况：

(1)若 $\begin{cases}a+d=aq, & ①\\a+2d=aq^2. & ②\end{cases}$

由②－①得　$d=aq(q-1)$，代入①

得　$a+aq(q-1)=aq$，即　$q^2-2q+1=0$．

$\therefore q=1$．但此时 $aq=aq^2=a$，与集合中的元素的互异性矛盾，故 $q\neq1$．

(2)若 $\begin{cases}a+d=aq^2, & ③\\a+2d=aq. & ④\end{cases}$

由④－③得　$d=aq(1-q)$，代入③

得　$a+aq(1-q)=aq^2$，即　$2q^2-q-1=0$．

$\therefore q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$(舍去)．故　$q=-\frac{1}{2}$．

点拨　应用集合运算，将问题转化为方程，是解本题的关键．

【例4】　设 a、b 是两个实数，

$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，

$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant144\}$，

是平面 xOy 内的点集合．讨论是否存在 a 和 b 使得(1) $A\cap B\neq\varnothing$；(2) $(a,b)\in C$ 同时成立．

解析　本题考查综合应用集合、不等式和解析几何知识解题的能力．

显然，如果存在实数 a 和 b 使(1)、(2)同时成立．由(1)成

立,知存在整数 n 使得

$na+b=3n^2+15$,即 $b=3n^2+15-na$. ①

由(2)成立,知存在整数 n 使得 $a^2+b^2\leqslant 144$. ②

将①代入②并整理得

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0$. ③

而 $\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]$
$=-36(n^2-3)^2$,

因为 n 是整数,$n^2-3\neq 0$,则 $\Delta<0$.

又 $1+n^2>0$,故不等式③不可能有实数解 a,即不存在实数 a 和 b,使(1)、(2)同时成立.

点拨 将集合语言转化为关于 a 的不等式是此题的关键.读者应从中体会这种转化方法.

【例5】 全集 $U=\mathbf{Z}$,集合 $A=\{x|x^2-3x-28\geqslant 0\}$,$B=\{x||x-1|<2a\}$,若 $B\cap\complement_U A=B$,求 a 的取值集合.

解析 本题主要考查集合与不等式知识的灵活应用.

$\because B\cap\complement_U A=B\Leftrightarrow B\subseteq\complement_U A$,

$A=\{x|x^2-3x-28\geqslant 0\}=\{x|(x+4)(x-7)\geqslant 0\}$,

$\complement_U A=\{x|(x+4)(x-7)<0\}=\{x|-4<x<7\}$.

(1)当 $a\leqslant 0$ 时,$B=\varnothing$,显然有 $B\subseteq\complement_U A$.

(2)当 $a>0$ 时,$B=\{x|1-2a<x<1+2a\}$.

由 $B\subseteq\complement_U A$ 在数轴上的表示(见图 1-1),可得

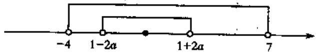

图 1-1

$\begin{cases}1-2a\geqslant -4\\1+2a\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow 0<a\leqslant\frac{5}{2}$.

综上可知,a 的取值集合是$(-\infty,\frac{5}{2}]$.

点拨 (1)一般地有 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cup B=A\Leftrightarrow A\supseteq B$.

(2)本题不能忽略 $a<0$ 时,$B=\varnothing$的情形.

考题·点悟

【例1】 (1998·上海)设集合为 $U=\mathbf{R}$,$A=\{x|x^2-5x-6>0\}$,$B=\{x||x-5|<a\}$ (a 是常数),$11\in B$,则 ( )

A. $\complement_U A\cup B=U$ B. $A\cup\complement_U B=U$

C. $\complement_U A\cup\complement_U B=U$ D. $A\cup B=U$

解析 本题考查集合的知识和一元二次不等式、绝对值不等式的解法及分析问题的能力.

集合 $A=\{x|x<-1$ 或 $x>6\}$.

$\because B\neq\varnothing$,$\therefore a>0$,$B=\{x|5-a<x<5+a\}$.

又$\because 11\in B$,$\therefore |11-5|<a$,$a>6$,$5-a<-1$,$5+a>6$,

$\therefore A\cup B=U$.

答案 D

【例2】 (2000·北京、安徽)设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$,集合 $M=\{a,c,d\}$,$N=\{b,d,e\}$,那么$\complement_U M\cap\complement_U N=$ ( )

A. $\varnothing$ B. $\{d\}$ C. $\{a,c\}$ D. $\{b,e\}$

解析 本题主要考查集合、补集、空集、交集的概念,其解法如下:

$\because \complement_U M=\{b,e\}$,$\complement_U N=\{a,c\}$,

$\therefore \complement_U M\cap\complement_U N=\varnothing$.

答案 A

点悟 本题易错选 B.这是由于有些考生审题欠认真,将 $\complement_U M\cap\complement_U N$ 错看成 $M\cap N$ 所致.因此,审题要认真.

【例3】 (2001·上海春)已知 R 为全集,$A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$,$B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant 1\}$,求$\complement_R A\cap B$.

解析 本题考查集合的运算以及简单的对数不等式、分式不等式的解法.

由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 有$\begin{cases}3-x>0,\\3-x\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4.\end{cases}$

解得 $-1\leqslant x<3$.

于是 $A=\{x|-1\leqslant x<3\}$,$\complement_R A=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 3\}$.

由 $\frac{5}{x+2}\geqslant 1$ 有$\frac{3-x}{x+2}\geqslant 0$,解得 $-2<x\leqslant 3$,于是 $B=\{x|-2<x\leqslant 3\}$.

$\therefore \complement_R A\cap B=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 3\}\cap\{x|-2<x\leqslant 3\}=\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

点悟 解此类求$\complement_U A\cap B$ 题目时,应将之表示到数轴上,避免遗失解.

创新·评价·测试题

(A组)

一、选择题

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $A=\{2,\log_x 2\}$,$B=\{x,2x\}$ 且 $A\cap B=\{2\}$,则集合$\complement_U(A\cup B)$为 ( )

A. $\varnothing$ B. $\{1\}$ C. $\{1,2,4\}$ D. $\{3,5\}$

2. 设全集 $U=\{a,b,c,d\}$,集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{b,d\}$,则以下结论正确的是 ( )

A. $\{a\}\in A$ B. $b\subsetneqq A\cap B$

C. $\{\varnothing\}\subsetneqq U$ D. $\complement_U A\cap\complement_U B=\{c\}$

3. 若 $P=\{y|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{(x,y)|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则必有 ( )

A. $P\cap Q=\varnothing$ B. $P\subsetneqq Q$

C. $P=Q$ D. $P\supsetneqq Q$

4. 已知 U 为全集,集合 M、$N\subsetneqq U$,若 $M\cap N=N$,则 ( )

A. $\complement_U M\supseteq\complement_U N$ B. $M\subseteq\complement_U N$

C. $\complement_U M\subseteq\complement_U N$ D. $M\supseteq\complement_U N$

二、填空题

5. 已知集合 $A=\{x|x^2=x,x\in\mathbf{R}\}$,则满足条件 $A\cup B=A$ 的所有集合B 的个数是________.

6. 若 $A\subseteq B$,$A\subseteq C$,$B=\{0,1,2,3\}$,$C=\{0,2,4,8\}$,满足上述条件的集合 A 为________.

7. 设集合 A、B、C 的关系如图 1-2 所示,则图中阴影部分表示的集合是________.

8. 设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x|-1<x<3\}$,$C=\{x|$

$-3<x<2\}$，则集合 $A\cap(B\cup C)=$ ______.

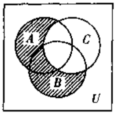

图 1-2

三、解答题

9. 设全集 $U=\{x|0<x<6,x\in\mathbf{N}\}$，$A=\{x|x^2-5x+q=0\}$，$B=\{x|x^2+px+12=0\}$，$\complement_U A\cup B=\{1,3,4,5\}$，求集合 A、B.

10. 设全集 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)|\dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，求 $\complement_U(M\cup N)$.

11. 若 $A=\{x|x^3+2x^2-8x>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，已知 $A\cup B=\{x|x>-4\}$，$A\cap B=\varnothing$，求 a，b.

（B 组）

一、选择题

1. 下列集合 A 到集合 B 的对应 f 是映射的是　（　）

A. $A=\{-2,0,2\}$，$B=\{-4,0,4\}$，f 是求 A 中数的平方

B. $A=\{0,1\}$，$B=\{-1,0,1\}$，f 是求 A 中数的平方根

C. $A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Q}$，f 是求 A 中数的倒数

D. $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}^*$，f 是求 A 中数的平方

2. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则 a 的值是　（　）

A. 2　B. -3 或 1　C. -4　D. -4 或 2

3. 设集合 $A=\{x|x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}^*\}$，则下述关系中正确的是　（　）

A. $A=B$　B. $A\supsetneqq B$　C. $A\subsetneqq B$　D. $A\cap B=\varnothing$

二、填空题

4. 满足 $\{1,3\}\subsetneqq A\subseteq\{1,3,5,7,9\}$ 的集合 A 的个数为______.

5. 若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,6,8\}$，则满足条件且含元素最多的集合 $A=$______.

三、解答题

6. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，a、$b\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x=f[f(x)],x\in\mathbf{R}\}$，若 $A=\{-1,3\}$，求 B.

7. 设集合 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

8. 若 $A=\{x||x^2-2x|\leqslant x\}$，$B=\left\{x\left|\left|\dfrac{x}{1-x}\right|\leqslant\dfrac{x}{1-x}\right.\right\}$，$C=\{x|ax^2+bx+b<0\}$，若 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求实数 a、b 的值.

第二讲　绝对值不等式

考点·要求

不等式是高中数学的重要内容之一，它具有应用广泛、灵活多变的特点，是解决其他数学问题的工具. 绝对值不等式包括性质、证明、解法及应用四个方面，其性质除不等式的"通性"外，还具有自身的性质. 但更应引起注意的是：

1. 理解绝对值的意义.

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0),\end{cases}$$

其几何意义是数轴上点 $A(a)$ 离开原点 O 的距离，则 $|OA|=|a|$. 它是去掉绝对值符号的"原始"依据. 对于形如 $|x-a|+|x-b|>m$ 或 $|x-a|+|x-b|<m$（m 是正常数）等含有多个绝对值符号的不等式，利用"零点分段"法（即绝对值的意义）或实数绝对值的几何意义求解较为方便.

2. 含有绝对值不等式的解法.

解绝对值不等式的关键是去掉绝对值符号. 为此，可利用(1)实数绝对值的定义；(2)实数绝对值的几何意义；(3)当不等式两端均为非负实数时，不等式两端平方；(4)图象法或"形数结合"思想；(5)不等式的同解变形原理. 即

①$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ 或 $f(x)>g(x)$；

②$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$.

这里的 $g(x)$ 可以是常数，也可以是含有未知数 x 的表达式，$g(x)$ 是常数时可以是任意实数.

绝对值不等式的解法是本单元的重点，也是高考的热点，要引起足够的重视.

3. 绝对值不等式的证明是一个难点，其方法灵活、多变，不易掌握，但要注意"分析法"的应用，会用

$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$　（*）

进行适当的放缩，在应用（*）求含有绝对值函数的最值时，一定要注意等号成立的条件，如：

$|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\geqslant 0$；

$|a-b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\leqslant 0$；

$|a|-|b|=|a+b|\Leftrightarrow(a+b)b\leqslant 0$；

$|a|-|b|=|a-b|\Leftrightarrow(a-b)b\geqslant 0$.

方法·技巧

1. 解绝对值不等式常采用"零点分段法"、"定义法"、"两边平方法"、"数形结合"思想、"等价转化"思想、"分类讨论"思想等，其目的是将绝对值不等式转化为"熟知"的不含绝对值的不等式进行求解. 即"化生为熟"、"化繁为简"，体现"化归思想"的应用.

2. 证明绝对值不等式除分析法、比较法等常用方法外，还要会用 $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ 将所证不等式适当放缩，即"放缩法"，以及"构造法"等.

例题·点拨

【例 1】　解不等式 $|x^2-3|>2x$.

解析　考查含绝对值不等式的解法.

解法一　（定义法）当 $x^2-3\geqslant 0$ 即 $x\geqslant\sqrt{3}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 时，

$x^2-3>2x$，即 $x^2-2x-3>0$.

则　$x>3$ 或 $x<-1$.

$\therefore$ $x>3$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$；

当 $x^2-3<0$，即 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，

$-x^2+3>2x$，即 $x^2+2x-3<0$.

则　$-3<x<1$，因此，$-\sqrt{3}<x<1$.

综上，原不等式的解集为 $\{x|x>3$ 或 $x<1\}$.

解法二　（两边平方法）当 $x\geqslant 0$ 时，原不等式可化为

$(x^2-3)^2>4x^2$，即 $x^4-10x^2+9>0$，

从而，得 $x>3$ 或 $x<-3$ 或 $-1<x<1$.

故 $x>3$ 或 $0\leqslant x<1$；

当 $x<0$ 时，$x^2-3\neq 0$，即 $x\neq\pm\sqrt{3}$.

$\therefore -\sqrt{3}<x<0$ 或 $x<-\sqrt{3}$；

综上，原不等式的解集为 $\{x|x>3$ 或 $x<1\}$.

解法三 （图象法）令 $y_1=|x^2-3|$，$y_2=2x$，分别在图1-3坐标系下画出 $y_1=|x^2-3|$ 和 $y_2=2x$ 的图象.如图1-3.解方程 $|x^2-3|-2x$ 可得 $x_1=1$，$x_2=3$.（$\because x\geqslant 0$）

故满足 $y_1>y_2$ 的不等式即原不等式的解集为 $\{x|x>3$ 或 $x<1\}$.

解法四 （利用等价转化）原不等式可化为

$x^2-3>2x$ 或 $x^2-3<-2x$.

$\therefore x>3$ 或 $x<-1$ 或 $-3<x<1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x>3$ 或 $x<1\}$.

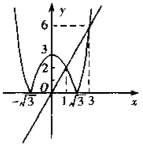

图1-3

点拨 比较上述各种解法，解法一、解法二分类讨论，不重漏，全面周到，解法三形象、直观；但总体来讲，解法四较为简捷、直接.

【例2】 解不等式 $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

解析 考查分式不等式和绝对值不等式的解法，要将分式不等式转化成二次不等式求解.

解法一 $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant\dfrac{3x}{x^2-4}\leqslant 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x}{x^2-4}\geqslant -1\\ \dfrac{3x}{x^2-4}\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4}\geqslant 0\\ \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4}\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)(x+2)(x-1)(x-2)\geqslant 0\\ (x+2)(x+1)(x-2)(x-4)\geqslant 0\end{cases}(x\neq\pm 2)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant -4\text{ 或 }-2<x\leqslant 1\text{ 或 }x>2\\ x<-2\text{ 或 }-1\leqslant x<2\text{ 或 }x\geqslant 4\end{cases}\Leftrightarrow x\leqslant -4\text{ 或 }-1\leqslant x\leqslant 1\text{ 或 }x\geqslant 4.$$

$\therefore$ 原不等式的解集为

$\{x|x\leqslant -4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4\}$.

解法二 $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$ 即 $3|x|\leqslant|x^2-4|$ $(x\neq\pm 2)$.

$\therefore 9x^2\leqslant(x^2-4)^2\Leftrightarrow x^4-17x^2+16\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\leqslant 1$ 或 $x^2\geqslant 16\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant -4$.

$\therefore$ 原不等式的解集为

$\{x|x\geqslant 4$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x\leqslant -4\}$.

点拨 显然第二种解法较简便.但要注意不等式本身存在的条件.如果从函数的观点看，$f(x)=\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|-1$ 为偶函数，所以可先在区间 $[0,+\infty)$ 上解不等式 $f(x)\leqslant 0$，再利用对称性确定不等式在 $(-\infty,0]$ 上的解.

【例3】 解不等式 $|\log_3 x+4|-|\log_{\frac{1}{3}}x^2+1|>1$.

解析 本例重在考查绝对值不等式和对数不等式的解法及化归思想的应用，鉴于此，要首先去掉绝对值符号并注意采用"零点分段法"进行分类讨论.

令 $\log_3 x=t$，原不等式可化为 $|t+4|-|2t-1|>1$.

(1) $\begin{cases}t\leqslant -4\\ -t-4+2t-1>1\end{cases}$ 不等式组无解；

(2) $\begin{cases}t>\dfrac{1}{2}\\ t+4-2t+1>1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<t<4$，

(3) $\begin{cases}-4<t\leqslant\dfrac{1}{2}\\ t+4-1+2t>1\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{2}{3}<t\leqslant\dfrac{1}{2}$.

$\therefore -\dfrac{2}{3}<t<4\Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<\log_3 x<4$.

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}<x<81$.

故原不等式的解集是 $\left\{x\middle|\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}<x<81\right\}$.

点拨 不等式的性质与函数的单调性是紧密联系的，对数函数的增减性是将对数不等式转化为代数不等式的重要依据.对绝对值不等式的求解步骤一般是：零点划区，分区求解，综合并解.

【例4】 设函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数，对任意不相等的实数 x_1、x_2，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$，且存在一实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1<x_0$，$f(a_n)=2a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$.求证：对任意的正整数 $n\in\mathbf{N}^*$，（Ⅰ）$a_n<x_0$；（Ⅱ）$a_n<a_{n+1}$.

解析 本题通过抽象函数与数列联系，利用绝对值不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$ 为"桥梁"，综合考查数学归纳法，逻辑推理论证能力等.

证明 （Ⅰ）1°当 $n=1$ 时，$a_1<x_0$ 显然成立；

2°设当 $n=k$ 时，不等式 $a_k<x_0$ 成立.

$\because f(a_n)=2a_{n+1}-a_n$，

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{f(a_n)+a_n}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，$f(x_0)=x_0$，$x_0\in\mathbf{R}$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，有 $a_{k+1}-x_0=\dfrac{f(a_k)+a_k}{2}-x_0$.

$$\begin{aligned}\text{即}\quad a_{k+1}-x_0&=\frac{1}{2}[f(a_k)+a_k-2x_0]\\&=\frac{1}{2}[(f(a_k)-x_0)+(a_k-x_0)]\\&=\frac{1}{2}[f(a_k)-f(x_0)+a_k-x_0]\\&<\frac{1}{2}[|a_k-x_0|+a_k-x_0]\\&=\frac{1}{2}(x_0-a_k+a_k-x_0)=0.\end{aligned}$$

即 $a_{k+1}<x_0$.

综上，由1°、2°可得，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n<x_0$ 成立.

（Ⅱ）$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{f(a_n)+a_n}{2}-a_n=\dfrac{f(a_n)-a_n}{2}$.

而 $f(x_0)=x_0$，则 $f(a_n)-a_n=f(a_n)-f(x_0)-(a_n-x_0)$，

$\therefore f(a_n)-a_n>-|f(a_n)-f(x_0)|-a_n+x_0>-|a_n-x_0|-a_n+x_0=a_n-x_0+x_0-a_n=0$.

$\therefore f(a_n)>a_n$，即 $2a_{n+1}>2a_n$，故 $a_{n+1}>a_n$.

点拨 通过已知条件求出 $a_{n+1}=\dfrac{f(a_n)+a_n}{2}$ 是证明的关键，利用最常用的"作差比较法"、数学归纳法是使问题获证的基础.

【例5】 在一条公路上，每隔100千米有个仓库（如图1-4），

共有五个仓库，一号仓库存有 10 吨货物，二号仓库存有 20 吨货物，五号仓库存有 40 吨货物，其余两个仓库是空的．现在想把所有的货物集中存放在一个仓库里，如果每吨货物运输一千米需要 0.5 元运输费，那么最少要多少运费才行？

—[一]—[二]—[三]—[四]—[五]—

图 1-4

解析　本题考查应用函数和绝对值不等式知识解题的能力．

读题可知，事实上，本题是含有绝对值函数的最小值问题，也是绝对值不等式的应用问题．如果将公路设为 x 轴，一号仓库 A_1 为坐标原点，二、三、四、五号仓库分别为 A_2、A_3、A_4、A_5 点，将货物集中于公路上某点(如 B 点)的坐标设为 x，依据题意布列关于 x 的函数(即所花运费)便可求解．

依据分析，知 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5，B 点分别为 $A_1(0)$、$A_2(100)$、$A_3(200)$、$A_4(300)$、$A_5(400)$、$B(x)$，则所花运费为

$f(x)=0.5\times10|x-0|+0.5\times20|x-100|+0.5\times0\times|x-200|+0.5\times0\times|x-300|+0.5\times40\times|x-400|=5|x|+10|x-100|+20|x-400|$．

按 $x<0$，$0\leqslant x<100$，$100\leqslant x<400$，$x\geqslant400$ 四种情况讨论可得，当 $x=400$(千米)时，$f(x)$取最小值为 5000(元)．也就是将货物都运到第五号仓库，花费最省为 5000 元．

点拨　作为数学问题还可以进一步拓广．$f(x)=m_1|x-a_1|+m_2|x-a_2|+\cdots+m_n|x-a_n|$，其中 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，m_1，m_2，$\cdots$，m_n 为任意实数，$f(x)$有无最值呢？有兴趣的同学可进一步研究．

考题·点悟

【例 1】　(1999·上海)设集合 $A=\{x\,|\,|x-a|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围．

解析　本题主要考查绝对值不等式，分式不等式和集合的运算．其解法如下：

由　$|x-a|<2$，得　$a-2<x<a+2$，

$\therefore A=\{x|a-2<x<a+2\}$．

由　$\frac{2x-1}{x+2}<1$，得　$\frac{x-3}{x+2}<0$，

即　$-2<x<3$，$\therefore B=\{x|-2<x<3\}$．

$\because A\subseteq B$，

$\therefore \begin{cases}a-2\geqslant-2,\\a+2\leqslant3.\end{cases}$　于是 $0\leqslant a\leqslant1$．

点悟　题中关键条件“$A\subseteq B$”是比较 $a-2$ 与 -2，$a+2$ 与 3 的大小的依据，读者要认真体会这一点．

【例 2】　(1997·全国)不等式组

$\begin{cases}x>0,\\ \frac{3-x}{3+x}>\left|\frac{2-x}{2+x}\right|.\end{cases}$ 的解集是　(　　)

A. $\{x|0<x<2\}$　　B. $\{x|0<x<\frac{5}{2}\}$

C. $\{x|0<x<\sqrt6\}$　　D. $\{x|0<x<3\}$

解析　该题“题小容量大”，它综合考查了绝对值不等式、分式不等式的解法，不等式组中的第一个不等式十分简单，且对第二个不等式起到约束作用．解此题的常规解法可通过约束条件，结合分类讨论去掉绝对值符号，再将分式不等式转化为二次不等式求解；还可以应用解选择题的方法，如“特殊值”验证法求解；也可以采用两边平方法去掉绝对值符号，再转化成二次不等式求解．该题属选择题中的“中高档”题，由于考生对解绝对值不等式、分式不等式、二次不等式的方法掌握不牢，运算能力欠佳而造成失分．事实上，

由　$\frac{3-x}{3+x}>\left|\frac{2-x}{2+x}\right|>0$．可得　$\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^2>\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2$．

即　$[(x-3)(x+2)]^2-[(x+3)(x-2)]^2>0$．

$\therefore (x^2-x-6)^2-(x^2+x-6)^2>0$．

$\therefore (x^2-x-6+x^2+x-6)(x^2-x-6-x^2-x+6)>0$．

$\therefore 4(x^2-6)x<0$．由 $x>0$，知 $x^2-6<0$．

$\therefore 0<x<\sqrt6$．

答案　C

点悟　此种解法是解绝对值不等式的“通法”，虽然麻烦，但避免了分类讨论．若将四个选项在数轴上标出，只要分别验证 $x=2,\frac{5}{2},3$，知 A 成立，B、D 不成立，立即知选 C，此法将四个区间的端点排序，验证排除，很快奏效且免去了繁琐的运算，事半功倍．

创新·评价·测试题

(A 组)

一、选择题

1. 设实数 a、b 满足 $ab<0$，则　(　　)

A. $|a+b|>|a-b|$　　B. $|a+b|<|a-b|$

C. $|a-b|<||a|-|b||$　　D. $|a-b|<|a|+|b|$

2. 设 $x\in\mathbf{R}$，则 $|x+1|<1$ 是 $|x|<2$ 成立的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 不等式 $|\sqrt{3x-2}-3|>1$ 的解集是　(　　)

A. $\{x|x>6$ 或 $\frac{2}{3}<x<2\}$　　B. $\{x|x>6\}$

C. $\{x|x>6$ 或 $\frac{2}{3}\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|\frac{2}{3}\leqslant x<2\}$

4. 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}>2^{-|x|}$ 的解区间为　(　　)

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

二、填空题

5. 不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant5$ 的解集是______．

6. 如果 $|x-2|+|2x+3|>a$ 恒成立，则 a 的取值范围是______．

7. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}|x-3|>1$ 的解集是______．

8. $|x-3|<x-1$ 的解集为______．

三、解答题

9. 解不等式 $\frac{1+|x|}{|x|-1}\geqslant3$．

10. 解不等式 $|x^2-3x+2|>x^2-3|x|+2$．

11. 解关于 x 的不等式 $|x+\log_a x|<|x|+|\log_a x|$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)．

12. 解不等式 $|\lg\sqrt{x}|+|\lg2\sqrt{x}|<1$．

(B 组)

1. 若 $a>0$ 且 $a\neq1$，解关于 x 的不等式 $|\log_a(1-x)|>$

$|\log_a(1+x)|$.

2. 解不等式$|\log_{\frac{1}{3}}x|+\left|\log_3\frac{1}{3-x}\right|\geqslant 1$.

3. 设$a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$,证明对任意的正整数$m$、$n$($m>n$)都有$|a_m-a_n|\leqslant\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}$.

4. 若关于x的方程$ax^2-4ax+1=0$的两个正根α、β满足$|\lg\alpha-\lg\beta|\leqslant 1$,求实数$a$的取值范围.

5. 若$f(x)=x^2-x+c$,$|x-a|<1$.求证:$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$.

6. 函数$f(x)$在$[0,1]$上有意义,且$f(0)=f(1)$,若对不同的$x_1,x_2\in[0,1]$总有$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$.求证:$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

7. 设m是$|a|$、$|b|$和1中最大的一个,当$|x|>m$时,求证:$\left|\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right|<2$.

8. 已知函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}$.设$a,b\in\mathbf{R}$,且$a\neq b$,求证:$|f(a)-f(b)|<|a-b|$.

9. 已知$|a|<1$,$|b|<1$,求证:$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.你能将此结论推广到3个字母的情形吗?请给出你的结论并加以证明.

10. 设$f(x)=ax^2+bx+c$(a、b、$c\in\mathbf{R}$且$a>0$),满足$|f(1)|\leqslant 1$,$|f(-1)|\leqslant 1$,且方程$f(x)=0$有异号两实根,试证:对属于区间$(-1,1)$上的任意x_0,都有$|ax_0+b|+c<1$.

第三讲　一元二次不等式

考点·要求

1. 了解一元二次函数,一元二次方程,一元二次不等式的联系.

2. 掌握一元二次不等式的解法.

3. 能将分式不等式转化为相应不等式组解决问题,能应用一元二次不等式解决某些应用问题.

方法·技巧

1. 理解一元一次不等式与一元二次方程、一次函数之间的关系,掌握依据函数图象写出有关一元一次不等式的解集的方法,初步了解运用数形结合思想解决数学问题的方法.

2. 理解二次函数图象与一元二次方程、一元二次不等式的关系,掌握一元二次不等式的图象解法.

3. 能根据一元二次方程的根的判别式判定一元二次不等式的解集的情况.

例题·点拨

【例1】 解下列不等式:

(1)$2x^2>2\sqrt{2}x-1$;

(2)$x(x-\sqrt{2})<4$.

解析　本题考查灵活解一元二次不等式的能力.

(1)$\because 2x^2>2\sqrt{2}x-1$,

$\therefore 2x^2-2\sqrt{2}x+1>0$,即　$(\sqrt{2}x-1)^2>0$,

$\therefore$ 原不等式的解集是$\{x|x\in\mathbf{R}$且$x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

(2)$\because x(x-\sqrt{2})<4$,$\therefore x^2-\sqrt{2}x-4<0$,

$\because \Delta=(-\sqrt{2})^2-4\cdot(-4)=18>0$,

$\therefore x_1=-\sqrt{2}$,$x_2=2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 原不等式的解集是$\{x|-\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}\}$.

点拨　将不等式化为标准形式是解此类题的关键.而(1)中的配方求解颇具特色.

【例2】 已知x是实数,且满足$x^2-2ax+1\geqslant\frac{1}{2}(x-1)^2$,试求实数$a$的取值范围.

解析　本题考查求不等式的参数的能力.

$\because$ 不等式$x^2-2ax+1\geqslant\frac{1}{2}(x-1)^2$,可化为

$\frac{1}{2}x^2-(2a-1)x+\frac{1}{2}\geqslant 0$,

由判别式$\Delta=(2a-1)^2-1\leqslant 0$,可得$0\leqslant a\leqslant 1$.

点拨　应用判别式是解此类题的常用方法.

【例3】 求不等式$x^2-2x+2a-a^2<0$的解.

解析　本题考查分类讨论解不等式的能力.首先应考虑方程$x^2-2x+2a-a^2=0$的两个根是$x_1=1+|a-1|$,$x_2=1-|a-1|$.故

当$a>1$时,$x_1=a$,$x_2=2-a$,$x_1>x_2$,

原不等式的解是　$2-a<x<a$.

当$a=1$时,$x_1=x_2=1$,原不等式的解是$x=\varnothing$.

当$a<1$时,$x_1=2-a$,$x_2=a$,$x_1>x_2$,

原不等式的解是　$a<x<2-a$.

点拨　解此类不等式,a与1的"三歧"关系是求解的关键,应注意讨论.

【例4】 解不等式$56x^2-ax-a^2<0$.

解析　本题考查应用逻辑划分思想合理解一元二次不等式的能力.

易知此题可分解因式,但必须对a进行分类讨论,确定不等式的解集.

$\because$ 原不等式可化为$(7x-a)(8x+a)<0$,

(1)当$a>0$时,$\frac{a}{7}>-\frac{a}{8}$,

原不等式的解集为$\{x|-\frac{a}{8}<x<\frac{a}{7},a>0\}$;

(2)当$a<0$时,$\frac{a}{7}<-\frac{a}{8}$,

原不等式的解集为$\{x|\frac{a}{7}<x<-\frac{a}{8},a<0\}$;

(3)当$a=0$时,得$56x^2<0$,其解集为$\varnothing$.

点悟　将此题中字母a的范围加以确定,则题目可确定化.就解法而言,得出解集后又可由解集逆向思维确定字母系数.因此,由题型和解法发散思考,可联想到如下题目.

【例5】 关于实数的不等式$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$与$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$($a\in\mathbf{R}$)的解集分别为$A$与$B$,求使$A\subseteq B$的$a$的取值范围.

解析　本题考查综合应用不等式、绝对值和集合知识解题的能力.

解法一　由已知，$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$．设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，

$A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $f(x)=0$ 的根分别在区间 $(-\infty,2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$ 中，于是

$$\begin{cases}f(2a)=-2a^2+2\leqslant 0,\\ f(a^2+1)=(a+1)\cdot a(a-1)(a-3)\leqslant 0,\end{cases}$$

解得　$1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$．

$\therefore\ \{a|1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$．

解法二　由已知，$A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，

$\because\ a^2+1\geqslant 2a$ 恒成立，$\therefore\ A\neq\varnothing$．

若 $3a+1\geqslant 2$，则 $B=\{x|2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$．

若 $3a+1\leqslant 2$，则 $B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$．

$A\subseteq B$ 的充分必要条件是

$$\begin{cases}3a+1\geqslant a^2+1\\ 2a\geqslant 2\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}a^2+1\leqslant 2,\\ 3a+1\leqslant 2a,\end{cases}$$

解得　$1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$．

$\therefore\ a\in\{a|1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1\}$．

考题·点悟

【例1】　(1998·全国)设 $a\neq b$，解关于 x 的不等式

$$a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2.$$

解析　本题考查应用化简思想解一元二次不等式的能力．

将原不等式化为

$(a^2-b^2)x+b^2\geqslant(a-b)^2x^2+2(a-b)bx+b^2$，

即　$(a-b)^2(x^2-x)\leqslant 0$，

$\because\ a\neq b$，即　$(a-b)^2>0$，$\therefore\ x^2-x=x(x-1)\leqslant 0$，

解之，得原不等式的解集 $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$．

点悟　将复杂问题通过巧妙运算转化为简单问题，是一种重要的运用数学技巧与方法解决问题的能力．

【例2】　(2002·北京春)不等式组 $\begin{cases}x^2-1<0\\ x^2-3x<0\end{cases}$ 的解集是　(　　)

A. $\{x|-1<x<1\}$　　B. $\{x|0<x<3\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<3\}$

解析　本题考查解一元二次不等式和不等式组的能力．

由　$x^2-1<0$ 得　$-1<x<1$；

由　$x^2-3x<0$ 得　$0<x<3$．

故不等式组的解集为 $\{x|0<x<1\}$．

答案　C

点悟　要注意取两个不等式的解集的交集．

创新·评价·测试题

(A组)

一、选择题

1. 对于不等式 $(x+5)(x-4)>0$，下列说法正确的是　(　　)

A. 当且仅当 $x+5>0,x-4<0$ 时成立

B. 当 $x+5>0,x-4>0$ 或 $x+5<0,x-4<0$ 时成立

C. 在 $x+5>0,x-4>0$ 时，或者在 $x+5>0,x-4<0$ 时成立

D. 只在 $x+5<0,x-4<0$ 时成立

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x||x|<p\}$，若 $B\subsetneqq A$，则实数 p 的取值范围是　(　　)

A. $0<p\leqslant 1$　　B. $p\leqslant 1$

C. $-1<p\leqslant 3$　　D. $p<1$

3. 与不等式 $(x+3)(x-5)<0$ 的解集相同的是　(　　)

A. $\begin{cases}x+3>0\\ x-5<0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x+3<0\\ x-5>0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+3>0\\ x-5<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+3<0\\ x-5>0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x+3>0\\ x-5>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+3<0\\ x-5<0\end{cases}$

4. 集合 $P=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0,x\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|2x^2-x-6>0,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $P\cap Q$ 的子集的个数为　(　　)

A. 16　　B. 8　　C. 15　　D. 7

二、填空题

5. 已知不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解是 $2<x<3$，则不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解为______．

6. 不等式 $x^2-2x+2a-a^2\leqslant 0$ 的解集是______．

7. 若 $f(x)=x^2-ax+1$ 有负值，则实数 a 的取值范围是______．

三、解答题

8. 已知 $A=\{x|x>a\}$，$B=\{x|x^2-2ax-3a^2<0\}$，求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$．

9. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\left\{x|x<-2,或\ x>-\dfrac{1}{2}\right\}$，求 $ax^2-bx+c>0$ 的解集．

10. 解关于 x 的不等式 $(m+3)x^2+2mx+m-2>0(m\in\mathbf{R})$．

(B组)

一、选择题

1. 下列不等式中，解集为实数集的不等式是　(　　)

A. $4x^2-12x+9>0$　　B. $4x^2-12x+9<0$

C. $2x^2+x+1<0$　　D. $3x^2-2x+4>0$

2. 若 $\dfrac{1}{a}x^2+bx+a>0$ 的解集是 $\{x|2<x<4\}$，则实数 a,b 的值是　(　　)

A. $-1,6$　　B. $1,-6$

C. $2\sqrt{2},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $-2\sqrt{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

3. 不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $\left\{x\left|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right.\right\}$，则 $a+b=$______．

4. 不等式 $-4<x^2-5x+2<26$ 的整数解为______．

5. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且满足 $x^2+y^2-6x-6y+17=0$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的取值范围是______．

三、解答题

6. 设 $A=\{x|-2<x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$．已知 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，试求 a,b 的值．

7. 解不等式 $|5x-6|<x^2$．

第四讲 简易逻辑

考点·要求

1. 了解命题、简单命题、复合命题的概念.

2. 理解逻辑联结词的含义,并能用"p 或q","p 且q"的形式表示复合命题.

3. 能判断命题的真假,掌握真值表.

4. 掌握四种命题及其关系.

5. 掌握反证法.

6. 掌握充分条件、必要条件的概念,会熟练地判断题中设置是结论的什么条件.

7. 掌握充要条件的概念,会熟练地判断和论证两个命题之间的四种条件关系.

方法·技巧

一、解有关逻辑联结词问题应注意以下知识的应用

1. 命题:初中数学中命题的概念为:"判断一件事情的语句."高中教材中定义为:"可以判断真假的语句."其实质是一样的.

2. 逻辑联结词:"或"、"且"、"非"等词叫做逻辑联结词.

3. 简单命题:不含逻辑联结词的命题叫做简单命题.简单命题常用小写拉丁字母:p、q、r、s…表示.

4. 复合命题:由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.复合命题由"p 且q","p 或q","非 p"构成.

5. 判断复合命题的真假,可根据真值表.一般规律是:

(1)"非 p"形式复合命题的真假与 p 的真假相反.

(2)"p 且q"形式复合命题当 p 与 q 同时为真时为真,其他情况时为假.

(3)"p 或q"形式复合命题当 p 与 q 同时为假时为假,其他情况为真.

二、解有关四种命题的题目应注意应用如下知识

1. 四种命题.

一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用$\urcorner p$ 和 $\urcorner q$ 分别表示 p 和 q 的否定.于是四种命题的形式为

原命题:若 p 则 q; 逆命题:若 q 则 p;

否命题:若$\urcorner p$ 则$\urcorner q$; 逆否命题:若$\urcorner q$ 则$\urcorner p$.

2. 四种命题的关系.

(1)原命题$\Leftrightarrow$逆否命题.它们的关系是相互的,原命题是逆否命题的逆否命题,它们具有相同的真假性.

(2)逆命题$\Leftrightarrow$否命题.它们之间也互为逆否关系,因此具有相同的真假性.

(3)原命题正确,逆命题不一定正确.它们之间的真假性无关.

3. 反证法.用反证法证明命题的一般步骤为:

(1)假设命题的结论不成立,即假设命题结论的反面成立.

(2)从这个假设出发,经过推理论证得出矛盾.

(3)由矛盾判断假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

三、解有关充要条件的问题应注意应用如下知识

1. 充要条件:命题 $A\Rightarrow B$ 成立,则 A 是B 的充分条件,B 是A 的必要条件.若 $A\Rightarrow B$ 且$B\Rightarrow A$,则 A 是B 的充分且必要条件,简称充要条件.

2. "A 是B 的充分条件"与"B 是A 的必要条件"是等价的,它们是同一个逻辑关系"$A\Rightarrow B$"的不同表达.

3. "A 是B 的充分条件"亦可说成是"B 的充分条件是A";"B 是A 的必要条件"亦可说成是"A 的必要条件是B";"A 是B 的充要条件,同时 B 也是A 的充要条件".

例题·点拨

【例 1】 分别写出下列各组命题构成的"p 或q","p 且q","非 p"形式的复合命题:

(1)p:$\sqrt{5}$是有理数,q:$\sqrt{5}$是无理数.

(2)p:方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号不同.

q:方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根绝对值不同.

解析 本题考查复合命题的有关知识.我们应按复合命题的特征解题.

(1)p 或q:$\sqrt{5}$是有理数,或是无理数;

p 且q:$\sqrt{5}$既是有理数,也是无理数;

非 p:$\sqrt{5}$不是有理数.

(2)p 或q:方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号不同或两根绝对值不同;

p 且q:方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号不同且两根的绝对值也不同;

非 p:方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号相同.

点拨 解此类题一定要明确"或"、"且"、"非"的概念及命题的有关知识,方能正确解题.

【例 2】 分别指出由下列各组命题构成的"p 或q","p 且q","非 p"形式的复合命题的真假:

(1)p:细菌都是有害的;q:有些细菌是有害的.

(2)p:有的角大于直角;q:所有的角都大于直角.

解析 本题考查真、假命题的概念.

我们应先确定 p,q 的真假,以便分析得解.

(1)因为 p 假q 真,所以,"p 或q"为真,"p 且q"为假,"非 p"为真.

(2)因为 p 真q 假,所以"p 或q"为真,"p 且q"为假,"非 p"为假.

点拨 应用真值表辅助求解更有效.

【例 3】 判断下列命题的真假,并写出它的逆命题、否命题、逆否命题.同时,也判断这些命题的真假.

(1)若 $ab\leqslant 0$,则 $a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$.

(2)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$.

(3)若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中$b^2-4ac<0$,则该二次函数图象与 x 轴有公共点.

解析 本题考查应用不等式、二次函数等知识综合命题知识,来判定命题真假的能力.

(1)该命题为真.

逆命题:若 $a\leqslant 0$ 或 $b\leqslant 0$,则 $ab\leqslant 0$.为假.

否命题:若 $ab>0$,则 $a>0$,$b>0$,为假.

逆否命题:若 $a>0$,$b>0$,则 $ab>0$.为真.

(2)该命题为假.

逆命题:若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$.为真.

否命题：若 $a\leqslant b$，则 $ac^2\leqslant bc^2$. 为真.

逆否命题：若 $ac^2\leqslant bc^2$，则 $a\leqslant b$. 为假.

(3)该命题为假.

逆命题：若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有公共点，则 $b^2-4ac<0$. 为假.

否命题：若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中 $b^2-4ac\geqslant 0$，则该二次函数图象与 x 轴没有公共点. 为假.

逆否命题：若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有公共点，则 $b^2-4ac\geqslant 0$. 为假.

点拨　(1)写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是正确找出原命题的条件和结论，然后依照定义来写.

(2)在判断原命题及其逆命题、否命题以及逆否命题的真假时，要应用"原命题与其逆否命题同真或同假；逆命题与否命题同真或同假"来判定.

【例 4】　如图 1-5，已知△ABC 的内切圆分别切 AB、BC、CA 于 D、E、F.

求证：△DEF 是锐角三角形.

解析　本题考查应用反证法证题的能力.

易知本题若从正面去思考，难度较大，但改从反面去思考，就比较容易解决.

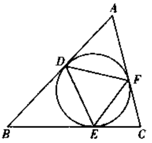

图 1-5

证明　设△DEF 不是锐角三角形，不妨设∠$DEF\geqslant 90°$，

∵ AB 切⊙O 于 D，

∴ ∠ADF=∠$DEF\geqslant 90°$，

又∵ AC，AB 都和⊙O 相切，有∠AFD=∠$ADF\geqslant 90°$，

∴ 在△ADF 中，有∠A+∠ADF+∠$AFD>180°$.

∵ 这与"三角形内角和为 180°"相矛盾.

∴ ∠$DEF<90°$.

同理可证：∠DFE 和∠EDF 都小于 90°.

因此，△DEF 是锐角三角形.

点拨　用反证法证题过程一定要规范、完整.

【例 5】　条件 p：方程 $f(x)=x^2+(a-1)x+1=0$ 在区间(0,2)上有两个根；条件 q：$\Delta=(a-1)^2-4\geqslant 0$，且 $f(0)>0$，$f(2)>0$，那么 p 是 q 的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　本题考查充要条件的有关知识.

∵ p 的充要条件为 $\Delta\geqslant 0$，$f(0)>0$，$f(2)>0$，对称轴 $x=-\frac{a-1}{2}$，有 $0<-\frac{a-1}{2}<2$.

因此，$p\Rightarrow q$，反之不成立.

答案　A

点拨　解此类题目要紧扣定义进行判定.

【例 6】　求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

解析　本题考查充要条件问题的证题方法.

我们作充要条件论证时，首先要判定命题中的条件是什么？结论是什么？这里条件是"$a+b+c=0$"，结论是"关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有根 $x=1$"，其次要分清充分性和必要性各要证明什么命题，然后分别证明.

证明　必要性：即要证"若 $x=1$ 是关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a+b+c=0$".

∵ $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

∴ $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$，即　$a+b+c=0$.

(2)充分性：即要证"若 $a+b+c=0$，则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根".

∵ $a+b+c=0$，把 $x=1$ 代入方程左边，方程左边 $=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c=0$，

∴ $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

由(1)和(2)可知原命题成立.

考题·点悟

【例 1】　(2002·全国理)函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$是单调函数的充要条件是　　(　　)

A. $b\geqslant 0$　　B. $b\leqslant 0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

解析　本题考查充要条件的概念和二次函数的性质.

抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点横坐标为 $x=-\frac{b}{2}$，其在 $[0,+\infty)$上是单调函数的充要条件是 $-\frac{b}{2}\leqslant 0$，即 $b\geqslant 0$.

答案　A

点悟　本题亦可用递推法解. 即令 $b=c=0$，则 $y=x^2$ 满足题意，排除 C、D；再令 $b=2$，$c=1$ 时，$y=(x+1)^2$ 满足题意，故排除 B.

【例 2】　(2001·上海)用计算器验算函数 $y=\frac{\lg x}{x}(x>1)$ 的若干个值，可以猜想下列命题中的真命题只能是　　(　　)

A. $y=\frac{\lg x}{x}$ 在$(1,+\infty)$上是单调减函数

B. $y=\frac{\lg x}{x}$，$x\in(1,+\infty)$的值域为 $\left[0,\frac{\lg x}{3}\right)$

C. $y=\frac{\lg x}{x}$，$x\in(1,+\infty)$有最小值

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}$，$n\in\mathbf{N}$

解析　本题综合考查应用计算器、命题、函数、极限等知识解决问题的能力.

用计算器验算 $y=\frac{\lg x}{x}(x>1)$ 的若干个值，如取 $x=10$，100，1000，…，$y=\frac{\lg x}{x}$ 的值越来越小(x 趋向无穷大，y 趋向于 0)，但取 $x=3,2,\frac{3}{2}$，…，$y=\frac{\lg x}{x}$ 的值越来越小(x 趋向于 1，y 趋向于 0). 故排除 A. 观上述数值变化，显然取不到 0，也没有最小值，而能发现 D 正确.

答案　D

点悟　对此类创新性试题，解题的方法往往是从特殊性出发，进行探索，寻求规律，归纳结论，从而解决问题. 此外，本题也对读者进行了启发，常见的科学计算工具要加以掌握.

创新·评价·测试题

(A 组)

一、选择题

1. 把"等腰三角形的底角相等"看成原命题时，它的逆命题是　　(　　)

A. 不是等腰三角形则底角不相等
B. 底角相等的三角形是等腰三角形
C. 有两个角相等的三角形是等腰三角形
D. 没有相等的角的三角形不是等腰三角形

2. 下列命题的逆命题正确的是 ( )
A. 末位是 5 的整数,可以被 5 整除
B. 当 $x=3$ 时,$x^2-2x-3=0$
C. 到圆心距离不等于半径的直线不是圆的切线
D. 角平分线上的点到角的两边距离相等

3. 以下命题为真命题的是 ( )
A. 圆的切线垂直于半径
B. 圆的切线只有一条
C. 过一点引圆的切线有两条
D. 过圆上一点引圆的切线只有一条

4. 以下命题为假命题的是 ( )
A. 正多边形的各边相等
B. 各边相等的五边形是正五边形
C. 不是正多边形的多边形各边都不相等
D. 垂直平分弦的直线就是圆的直径

5. 命题"p:$3\in\{2,3,4\}$,q:$\{3\}\subsetneqq\{2,3,4\}$."由这组命题构成的"$p$ 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题中,真、假情况是 ( )
A. 真、假、真　　B. 真、真、真
C. 真、真、假　　D. 假、假、真

二、填空题

说明:第 6~9 题填正确或错误

6. 对任意的一个命题不一定总有逆命题、否命题和逆否命题,因为原命题本身可能是错误的.这句话是______.

7. 一个命题的否命题正确,那么原命题也正确.这句话是______.

8. "两直线平行,内错角相等"是"内错角不相等,两直线不平行"的否命题.这句话是______.

9. "全等三角形一定是相似三角形"的否命题是"不全等的两个三角形不一定是相似三角形."这句话是______.

10. 一组命题"p:9 是质数,q:8 是 14 的约数"则"p 或 q"为______,"p 且 q"为______,"非 p"为______.

三、解答题

11. 指出下列各题中 p 是 q 的什么条件?并说明理由.
(1)p:$x>5$,q:$x>3$;
(2)$a,b\in\mathbf{R}$,p:$(a+b)^2=a^2+b^2$,q:a,b 中至少有一个为零.

12. 设 p 是 r 的充分而不必要条件,q 是 r 的充分条件,s 是 r 的必要条件,s 是 q 的充分条件,试问:
(1)s 是 r 的什么条件?
(2)p 是 q 的什么条件?

13. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,求 $a>b$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立的充要条件.

14. 求方程 $x^2-(m+1)x+4=0(m\in\mathbf{R})$ 在 $\{x\in\mathbf{R}|0\leqslant x\leqslant 3\}$ 内有两个不相等实根的充要条件.

(B 组)

一、选择题

1. 一组命题"p:$\sqrt{3}$ 是有理数,q:$\sqrt{3}$ 是无理数."由这组命题构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题中,真、假情况是 ( )
A. 真、真、假　　B. 真、假、真
C. 假、假、真　　D. 假、真、假

2. $\tan\theta\neq1$ 是 $\theta\neq45°$ 的 ( )
A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 ( )
A. $0<a\leqslant1$　　B. $a<1$
C. $a\leqslant1$　　D. $0<a\leqslant1$ 或 $a<0$

4. A 和 B 是两个命题,如果$\neg A\Rightarrow B$ 成立,那么 A 是$\neg B$ 的 ( )
A. 充分条件　　B. 必要条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 设 p 是 q 的充分条件,q 是 r 的充要条件,r 是 s 的必要条件,那么 s 是 p 的 ( )
A. 充分条件　　B. 必要条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

二、填空题

6. 一组命题"p:$\varnothing\in\{0\}$,q:$\varnothing\subsetneqq\{0\}$."则"$p$ 或 q"为______,"p 且 q"为______,"非 p"为______.

7. $a,b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2=0$ 的充要条件是______.

8. $x>2$ 且 $y>3$ 的充要条件是______.

9. $x-2=0$ 是 $x^2-4=0$ 的______条件.

10. 已知 p 和 q 是两个命题,如果 p 是 q 的充分条件,那么 q 是 p 的______条件,$\neg p$ 是$\neg q$ 的______条件.

三、解答题

11. 分别指出由下列各组命题构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题的真假:
①p:π 是有理数;q:π 是实数.
②p:两个无理数的和是无理数;q:两个无理数的积是无理数.
③p:$5+10=15$;q:$3<2$.
④p:$\varnothing\subsetneqq\{1\}$;$q$:$a\in\{a,b\}$.
⑤p:$x^2+1<0$;q:$x^2>-x^2$.
⑥p:方程 $x^2+x+1=0$ 没有实根;q:方程 $x^2+x+1=0$ 两根的符号不同.

12. 求证:在$\triangle ABC$ 中,不可能有 $A=B=90°$.

13. 已知 $p^3+q^3=2$,求证:$p+q\leqslant2$.

14. 关于 x 的实系数方程 $Ax^2+Bx+C=0(A\neq0)$ 有一个正根和一负根的充要条件是什么?

15. 如图 1-6,在四边形 $ABCD$ 中,$\angle A+\angle C=180°$,求证:四边形 $ABCD$ 内接于一圆.

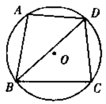

图 1-6