微分方程講义

（初稿）

張朝池編

邓汉英校

人民教育出版社

本書是为天津市广播函授大学电机、机械、化工、冶金等四个專業編写的，也可作为一般業余大学工科的数学用書。

本書共分五章，內容包括一阶、二阶常微分方程的几种初等解法，綫性常微分方程的基本理論和解法以及数学物理偏微分方程一些基本概念和解法。为配合学習本書，各章附有学習要点和方法的总結以及習題，書末还附有答案。

本书原由高等教育出版社出版。自1960年4月1日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称"人民教育出版社"。因此本书今后用人民教育出版社名义継續印行。

微分方程講义

（初　稿）

張朝池　編

邓汉英　校

人民教育出版社出版　高等學校教材編輯部　北京宣武門內承恩寺7号

北京市书刊出版业營业許可証出字第2号

人民教育印刷厂印装　新华书店发行

統一書号13010·740　开本 850×1168 1/32　印張3 4/16

字数81,000　印数 9,001—21,000　定价(6)0.34

1960 月 1 月第 1 版　1960 年 5 月北京第 2 次印刷

§1. 定义

微分方程 是一种方程，其中有未知函数，而在这个方程里出现有这个未知函数的微商（或微分）。

例 1. 微分方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$$

这里未知函数是 y，它所依赖的自变量是 x。

例 2. 方程（以后把微分方程简称为方程）

$$y''+y'-4y=2e^{2x}$$

这里未知函数也是 y，自变量也是 x。

例 3. 方程

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0$$

这是微分的形式，但也可以写成微商的形式，只要在方程等号左右同时除以微分 dx：

$$(x+y)+(x-y)\frac{dy}{dx}=0.$$

例 4. 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

这里有对 x 和对 y 的偏微商。未知函数是 u，它是自变量 x，y 的函数，也就是一个二元函数。

未知函数只依赖一个自变量的微分方程，称为常微分方程。在例 1 — 3 中的方程都是常微分方程。

未知函数依賴两个或两个以上自变量的微分方程，称为偏微分方程。在这种方程里有未知函数的偏微商。例 4 中的方程就是偏微分方程。

以下我們將先討論常微分方程。

如果在方程中出現的最高阶微商是 n 阶的，我們称这方程为 n 阶方程。这样，例 1 和例 3 的方程是一阶方程。例 2 和例 4 的方程是二阶的。

以后我們主要只討論一阶和二阶的方程，它們是应用上最常遇到的。

如果把某一个具体的函数代替一个方程中的未知函数后，方程变为恒等式，就是說这个函数满足这方程，則称这函数为这方程的解（或积分）。

例 5. 驗算函数 $y=e^{2x}$ 是例 2 方程的解。

解. 先計算

$$y=e^{2x},$$

$$y'=2e^{2x},$$

$$y''=4e^{2x}.$$

代入方程，

$$(4e^{2x})+(2e^{2x})-4(e^{2x})=2e^{2x}$$

即

$$2e^{2x}=2e^{2x},$$

这是恒等式。故函数 $y=e^{2x}$ 是解。

例 6. 驗算由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定的函数 y 是例 1 中方程的解。

解. 現在所討論的函数 y 由 $x^2+y^2=1$ 所确定，这是一个隐函数形式，要把它代入方程需要求微商 $\frac{dy}{dx}$。这可以用隐函数求微

商的方法：由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 y 的微商

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

现在求由 $x^2+y^2=1$ 所确定的 y 的微商

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y},$$

代入方程

$$\left(-\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\equiv 0.$$

故 $x^2+y^2=1$ 是方程的解。

例 7. 驗算函数 $y=\frac{1}{x}$ 是否例 1 中方程的解。

解. 先計算 y 的微商

$$y=\frac{1}{x},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x^2}.$$

代入方程

$$\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\frac{x}{\left(\frac{1}{x}\right)}=0,$$

即

$$\frac{-1}{x^2}+x^2=0.$$

这不是恒等式。所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 不是原方程的解。

習 題

1. 指出下列各式哪些是恒等式：

(1) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.

73、94/104

(2) $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

(3) $e^{x+x^2}=e^x\cdot e^{x^2}$.

(4) $\ln x=\ln y$.

(5) $\ln xy=\ln x+\ln y$.

2、 指出下列微分方程是几阶的，并驗算所給函数是否方程的解。

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$; $y=\sin 2x$.

(2) $y'=6y$; $y=x^2$.

(3) $y'=x\sin y$; $y=n\pi$，n 是整数。

(4) $2xydx+(x^2+3y^2)dy=0$; $x^2y+y^3=C$，C 是常数。

(5) $2x\sin y\,dx+(x^2\cos y+2y)dy=0$; $x^2\sin y+y^2=1$.

3. 已給兩方程：

(1) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=4$;

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4$

試問它們是几阶的？$y=2x+C$（C 是常数）是否它們的解？又 $y=2x^2$ 呢？

4. 試解下列方程：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=e^x$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$.

提示：用求不定积分的方法。

§2. 微分方程的用处

微分方程是解决一些自然科学、工程技术等問題的很有效的数学工具。在这些問題里常常遇到一些未知函数需要加以确定。例如研究物体的冷却过程，物体的溫度隨着时間在变化，也就是时間的函数。我們想知道物体溫度的变化情况，就是要求出这个函数来。又如研究行星的运动，就是要确定它的位置（即“坐标”），这也是一个时間的函数。

对于这些未知函数，我們往往根据一些自然規律，例如牛頓的力学定律、質量守恒定律、热能守恒定律等等，作出有关的微

分方程。于是把問題变成微分方程求解問題。

我們举一个簡單的例子：一質量为 m 的質点受到一个沿 Ox 軸方向的力 F 的作用在 Ox 軸上作直綫运动（圖 1）。假設这个力的大小是已知的时間 t 的函数

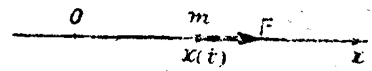

圖 1

$$F=F(t).$$

这时質点的坐标是 t 的未知函数，記为 $x(t)$。于是根据力学定律

$$F(t)=ma,$$

其中 a 是質点在时 t 时的加速度。由微商的物理意义，加速度就是坐标 $x(t)$ 的二阶微商 $\frac{d^2x}{dt^2}$，因此可列出运动的微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t),$$

其中 x 是未知函数。

第一章学習要点和方法

1. 本章主要是介紹微分方程的基本名詞。在学習基本概念时，为了对概念掌握得深刻和巩固，决不要死記定义，而要抓住每个概念的实質，进而把它在思想上具体化起来。因为在具体問題里往往有它的特殊情况，如果沒有抓住概念的实質，遇到具体問題就会被迷惑。随着概念的引进，我們常常給出例題和習題，它們能帮助建立概念和培养处理具体問題能力，所以应該加以重視。

例如关于“微分方程”，它的主要特点是方程里有未知函数的微商或微分。那么其它方面就無关紧要了，比如方程里是否明显地出現自变量或未知函数本身。例如方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

根据定义，这是微分方程，这方程里出現的只有未知函数 y 的二

阶微商，沒有明显出現自变量 x、未知函数 y 和 y 的一阶微商。

又如“微分方程的解”，它是一个函数，代入方程后使方程变为一个恒等式。在具体問題里，这个函数可以是各式各样的，特別它可以是常数。例如方程

$$\frac{dy}{dx}=y-2.$$

有解 $y=2$。要験算只須將它代入方程右边，得 $2-2=0$；代入左边，由于常数的微商为零，所以也得 0。因此得恒等式 $0\equiv 0$。

2. 本章習題主要用到的运算是求函数的微商。因此要求熟練这方面的基本运算，掌握以下几点：

(a) 簡單函数的微商公式；

(b) 一般求微商的法則、复合函数的微商法則；

(c) 隐函数的微商公式。

3. 如果現在复習一下“微商”的物理意义和几何意义，那对以后的学習，特別对于处理微分方程的应用題是很有帮助的。这方面可参看楊从仁編：微积分学，第二章 §1、§6、§7。高等教育出版社出版。

第二章 一阶微分方程

§ 3. 一般概念

1. 一阶方程的一般形狀 根据上章的定义，一阶方程里含有未知函数的一阶微商而不含更高阶的微商。因此它的一般形狀是

(1) $$F(x,y,y')=0,$$

这里等号的左边是一个含有 x，y 和 y' 的式子，或者說是 x，y 和 y' 的一个給定的函数；等号右边为零。

有时把一阶方程写成另一种样子：

(2) $$y'=f(x,y),$$

这里等号左边是未知函数 y 的微商 y'；等号右边不含 y'，是 x,y 的一个函数。

例 1. 方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x^2y+x=0$$

是方程(1)的形狀。但也可以写成方程(2)的形狀：

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{x^2y-x}.$$

2. 通解和特解 在討論一阶方程的一些求解的方法以前，我們先看一个簡單的例子。

例 2. 方程

(3) $$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}.$$

根据积分学的知識，我們知道这个方程的解是

(4) $$y=\int\frac{x}{2}\,dx+C=\frac{x^2}{4}+C,$$

这里 C 是一个任意常数。無論 C 取定为什么实数，(4) 式总是方程(3)的解。例如以下几个函数都是(3)的解：

(5) $$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{4}\ (\text{取定 } C=0 \text{ 所得})； \\ y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{2}{3}\ (\text{取定 } C=-\dfrac{2}{3} \text{ 所得})； \\ y=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{\pi}{5}\ (\text{取定 } C=\dfrac{\pi}{5} \text{ 所得}). \end{cases}$$

可見方程(3)有無穷多个解，这些解由含有一个任意常数 C 的 (4) 式所表示出来。

以后將看到，一阶方程的解常常含有一个任意常数，这种解称为方程的通解或通积分。当它被求出来时，一般形狀是：

$$y=\varphi(x,C),\text{（}y\text{ 表示为 }x\text{ 的显函数）}$$

或

$$\Phi(x,y,C)=0.\text{（解表示为隐函数形式）}$$

（以后在解方程时，如果得到解的隐函数表示式，不一定把它写成显函数。因为有时写出显函数有困难或得到的結果不如隐函数簡便。）

一般說来，通解包括了方程所有的解。但有时也会遺漏几个，这点我們不作过多的討論。

从上面的例子，我們看到，当通解中的任意常数 C 取定为某个实数时，就成了一个确定的解，这个解称为方程的特解。所以，(5)式中的函数都是方程(3)的特解。

習　題

5. 求出下列方程的通解，并由此随意写出兩个特解：

（1）　$y'=\cos x$；

（2）　$y'=\dfrac{1}{x}$；

（3）　$y'+x=0$.

§4. 可分离变量的方程

下面我們要介紹某些一阶方程的解法。这些方程用一些代数运算和积分运算就可解出。但要知道，無論是一阶方程或是高阶方程，大多数是不能这样解出的。那时，只能設法求近似解。

可分离变量的方程的形狀：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\varphi(y).\tag{6}$$

注意它的右边是一个 x 的函数 $f(x)$ 和一个 y 的函数 $\varphi(y)$ 的乘积。

这种方程可以用所謂分离变量法解出：用乘除法使方程等号

的一边只有 x 的函数和 x 的微分 dx；而另一边只有 y 的函数和 y 的微分 dy。

先把方程(6)等号左右乘以 dx，則得

$$dy=f(x)\varphi(y)dx,$$

再除以 $\varphi(y)$ $\left(或者說乘以\dfrac{1}{\varphi(y)}\right)$，方程就变成

$$\frac{1}{\varphi(y)}dy=f(x)dx. \tag{7}$$

这样变量就分离了。总之，像(6)这种类型的方程，等号左右乘以 $\dfrac{dx}{\varphi(y)}$，就变成分离了变量的方程(7)。

方程(7)左右两个微分相等，它們的原函数就只差一常数項，或者說左边对 y 积分和右边对 x 积分相差一常数項：

$$\int\frac{1}{\varphi(y)}dy=\int f(x)dx+C, \tag{8}$$

这里用不定积分的符号記被积函数的任意一个原函数，C 是任意常数。在具体問題里，$\varphi(y)$ 和 $f(x)$ 是具体的函数。(8)式即表明 y 和自变量 x 的函数关系，也就是方程(6)的通解。要注意：

(1)通解(8)往往是給出 y 和 x 的隐函数关系式，有时可以把 y 变写为 x 的显函数；

(2)通解(8)中所要求的两个原函数有时不能用积分法得出。这时我們常常利用这样一个定理：有可变上限的定积分

$$\int_{x_0}^{x}f(t)dt \quad (x_0是常数)$$

是其上限 x 的函数，它是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数，(显然这原函数在 $x=x_0$ 时它等于零)。这样，公式(8)也可写成：

$$\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\varphi(t)}dt=\int_{x_0}^{x}f(t)dt+C \quad (x_0, y_0 是常数).$$

例 3. 解方程

$$\frac{dy}{dx}=e^{y}\sin x.$$

解. 等号左右乘以 dx

$$dy=e^{y}\sin x\,dx,$$

再乘以 e^{-y}

$$e^{-y}dy=\sin x\,dx.$$

两边积分

$$\int e^{-y}\,dy=\int\sin x\,dx+C$$

得

(9) $$-e^{-y}=-\cos x+C$$

或 $$\cos x-e^{-y}=C.$$

其中 C 为任意常数。这就是方程的通解的隐函数形式。如果要写成显函数，可由(9)：

$$e^{-y}=\cos x-C,$$

$$-y=\ln(\cos x-C).$$

故

$$y=-\ln(\cos x-C).$$

这就是通解的显函数写法。

例 4. 解方程

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{\cos 2y}=0.$$

解. 先写成

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{\cos 2y},$$

这就是可分离变量的方程，因为等号右边是 $-x^2$ 和 $\frac{1}{\cos 2y}$ 的乘积。分离变量得：

$$\cos 2y\,dy=-x^2dx,$$

积分得

$$\frac{1}{2}\sin 2y=-\frac{1}{3}x^3+C_1,$$

其中 C_1 为任意常数。这就是通解。或写成

$$3\sin 2y+2x^3=6C_1.$$

我們知道 C_1 是任意常数，故 $6C_1$ 也是任 意常数，所以为简單起見，把它記为 C，方程通解就是

$$3\sin 2y+2x^3=C.$$

我們也可以把它写成显函数形式，但不如隐函数式簡便，所以就不再写了。

注意 1. 下面这种形式的方程可以分离变量：

(10) $$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0.$$

这方程的特点是微分 dx 前面是一个 x 的函数 $M_1(x)$ 和一个 y 的函数 $M_2(y)$ 的乘积，微分 dy 前面也类似。

我們把方程写成

$$M_1(x)M_2(y)dx=-N_1(x)N_2(y)dy,$$

再等号左右除以 $M_2(y)N_1(x)$，即得分离了变量的方程

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy.$$

两边积分即得通解

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx=-\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy+C,$$

其中 C 为任意常数。

例 5. 解方程

(11) $$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

解. 两边除以$(y^2-1)(x^2-1)$，得到

$$\frac{x\,dx}{x^2-1}+\frac{y\,dy}{y^2-1}=0.$$

积分

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-1} + \int \frac{y\,dy}{y^2-1} = C_1,$$

其中 C_1 为任意常数。求出积分

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-1) + \frac{1}{2}\ln(y^2-1) = C_1.$$

即

(12) $$\ln(x^2-1) + \ln(y^2-1) = 2C_1.$$

为簡化此式，把任意常数 $2C_1$ 写成 $\ln C$，C 为不等于零的任意常数。通解(12)就写成

$$\ln(x^2-1) + \ln(y^2-1) = \ln C,$$

$$\ln(x^2-1)(y^2-1) = \ln C,$$

故通解 $$(x^2-1)(y^2-1) = C.$$

其中 C 为不为零的任意常数。(其实在这式中取 $C=0$ 得出的函数也是方程的解，下面我們就要提到。)

注意 2　在分离变量的时候，我們把方程(6)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y)$$

兩边除以 $\varphi(y)$。但如果函数 $\varphi(y)$ 在某点 $y=y_0$ (y_0 是一个常数)处 $\varphi(y_0)=0$，这时我們要注意函数 $y=y_0$ 也是方程的一个解。这很容易代入方程去驗証，微商 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_0}{dx} = 0$，代入

$$0 = f(x)\varphi(y_0).$$

但 $\varphi(y_0)=0$，所以这是恒等式。

注意 1 中的方程(10)也有类似的情况。我們就例 5 中的方程(11)来說，如果把它写成

(13) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(y^2-1)}{(x^2-1)y}.$$

这里所謂的 $\varphi(y)$ 就是 $\frac{y^2-1}{y}$，在 $y=1$，$y=-1$ 处，它等于零。容易驗証 $y=1$ 和 $y=-1$ 是方程(13)的解，也就是原方程(11)的

解。

前面我們提到例 5 的通解 $(x^2-1)(y^2-1)=C$ 中取任意常数 C 等于零也是解。因为

$$(x^2-1)(y^2-1)=0,$$

即

$$x^2-1=0 \text{ 和 } y^2-1=0.$$

而 $y^2-1=0$ 就是 $y=1, y=-1$。我們已看到它的确是解。至于 $x^2-1=0$ 的問題我們就不多說了。总之，方程 (11) 的通解是 $(x^2-1)(y^2-1)=C$，其中 C 为任意常数(可以等于零)。

習　題

解下列方程：

6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$.

7. $\dfrac{dy}{dx}=3x^2y$.

8. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=0$.

9. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$.

10. $\dfrac{dy}{dx}+ye^{2x}=0$.

11. $y\dfrac{dy}{dx}-\sin 4x=0$.

12. $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$.

13. $(x^3-yx^2)y'+y^2+xy^2=0$.

14. $(1+y^2)dx-\sqrt{x}\,dy=0$.

15. $dy+y\,\mathrm{tg}\,x\,dx=0$.

16. $\sin x\sin y\,dy+\cos x\cos y\,dx=0$.

17. $e^{x^2+8y}dy+x\,dx=0$.

18. $x(1-y)dy-(1+y^2)dx=0$.

19. $e^{x^2}dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

§ 5. 一般概念(續)

1. 积分曲綫 我們已經看到微分方程的解是一些函数。如果我們在 Oxy 坐标平面上用 x 代表自变量，y 代表这个函数。那么，一个解就是一条曲綫。我們称这种代表方程的解的曲綫为积分曲綫。

例如我們已經知道函数 $y=\frac{x^2}{4}$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2} \tag{3}$$

的一个解，这函数在 Oxy 平面是一条抛物綫(圖 2_1)。所以这条抛

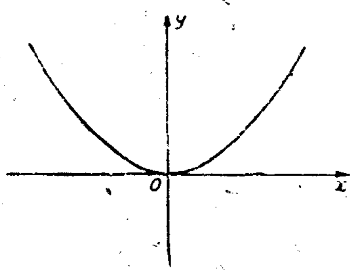

圖 2_1

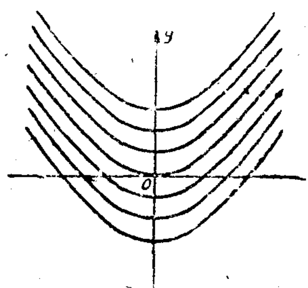

圖 2_2

物綫是方程(3)的积分曲綫。

方程的通解里有一个任意常数 C，当它取定为某个实数时就得出一个特解，相应就有一条积分曲綫。所以，从通解可以得到無穷多条积分曲綫，成了一个积分曲綫族(当然我們不可能把無穷多条积分曲綫都画出来。有时我們可以画出几条，从而对整体也有了了解)。

例如方程 (3) 的通解是 $y=\frac{x^2}{4}+C$。当取 $C=0$ 时，就得到上面已提到的积分曲綫。当取 C 为不同实数时，就得积分曲綫族，它是一族抛物綫 (圖 2_2)。