XIANXINGXITONGLILUNJIXITIJIE

线性系统理论及习题解

〔日〕 有本卓 著

马力建 刘铁军 于连波 译

线性系统理论及习题解

〔日〕有本卓 著
马力建 刘铁军 于连波 译

黑龙江科学技术出版社
一九八四年·哈尔滨

内 容 简 介

本书高度集中地总结了线性系统理论的精髓。全书共十一章：第一、二章介绍必要的数学基础；第三，四章讨论状态方程式的建立和状态微分方程式的解；第五、六章讨论传递函数和系统的标准构造、最小实现；第七章介绍系统的稳定性；第八章讨论有理正实函数系统理论的充分必要条件；第九至十一章分别介绍最佳系统、卡尔曼滤波器、观测器。本书每章之后都有大量的例题和习题解答，对广大读者掌握和运用控制理论颇有帮助。

本书可作大专院校电类专业师生教学参考书，也可供广大工程技术人员学习参考。

封面设计： 胃 川

线性系统理论及习题解

〔日〕 有本卓 著 马力建 刘铁军 于连波 译

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区分部街 28 号)

依安印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32·印张 11 4/16·字数230千

1984年2月第一版·1984年2月第一次印刷

印数：1—6,500

书号：13217·067 定价：1.35元

译者的话

近代控制理论是五十年代发展起来的科学，目前在电气、机械、航空、航海、宇宙空间、核子、化工、生态、医学、社会和经济学等领域内得到了广泛的应用。

随着我国科学技术和工农业生产的迅速发展，对于近代控制理论的研究一定会日益深入，其应用会日益广泛。为了适应高等院校与控制有关专业的学生和广大工程技术人员学习、运用近代控制理论的需要，我们翻译了《线性系统理论及习题解》这本书。

本书各章安排由浅入深，层次分明，对必要的数学基础知识作了专门介绍。每章均有理论叙述及例题解答，其解答方法巧妙，概念清楚。此外，还有大量的习题及解答，供读者练习。本书对读者学习近代控制理论，充实和提高理论与实践水平颇为有益。

本书初稿经赵义堂、范圣宣同志校阅后，又经鲍绍宣同志对全书进行了校译，在此一并致谢意。

由于我们水平所限，译文中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

译者

目　　录

第一章　向量、矩阵、行列式

§ 1—1　向量和向量空间

1—1—1　向量　图 1—1 是用几何方法表示的三维向量。若想把三维向量表示成代数形式，需用如图 1—1 所示的互相垂直相交的轴 e^1、e^2、e^3 构成一个坐标系，并把由此坐标系所确定的三个数 x_1、x_2、x_3 表示成

$$\mathbf{x} = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]$$

或

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

的形式，则称它们为向量 $\mathbf{x}$ 的坐标表示。前者称为**行向量**，后者称为**列向量**。本书采用列向量作为坐标表示。

关于三维空间中的向量概念，可以推广到 n 维空间中去。把由 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n 组成的列向量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1—1}$$

称为 **n 维向量**。

1—1—2　向量运算　对于一个向量 $\mathbf{x}$ 和标量 λ，定义

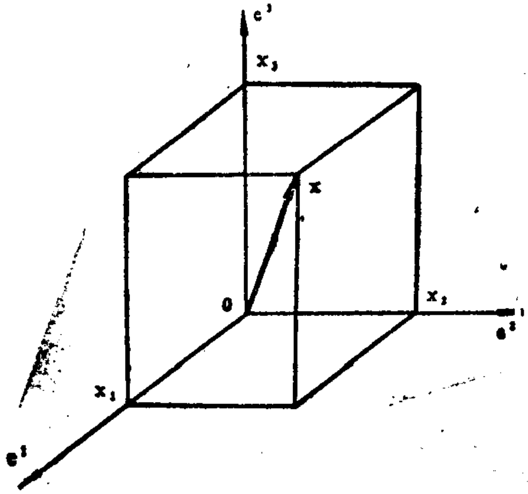

图 1—1　三维向量

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \qquad (1—2)$$

为向量 x 与标量 λ 的乘积。

如图（1—2）所示。

图 1—2　向量的数量乘积

定义

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \qquad (1—3)$$

为具有相同维数的二个向量 x 与 y 之和，如图（1—3）所示。

按以上定义的向量的数量乘法及向量的加法的运算，有如下的 A_1～A_8 的关系存在。

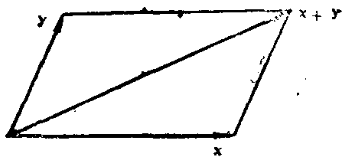

图 1—3　向量 x 与 y 的和

（A_1）对于两个向量 x 和 y，由式（1—3）确定的 x＋y 的和是唯一的。

（A_2）（交换律）$x+y=y+x$　　（1—4）

（A_3）（结合律）$(x+y)+z=x+(y+z)$　　（1—5）

（A_4）所有元素全为零的向量，称为零向量，记为o。

$$o+x=x+o=x$$

（A_5）满足 $x+(-x)=o$ 的向量 $-x$ 是唯一的，称向量 $-x$ 为向量 x 的**逆向量**，用标量 -1 和向量 x 的乘积来表示。

（A_6）（分配律）$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$　　（1—7）

（A_7）$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$　　（1—8）

（A_8）$1\cdot x=x$　　（1—9）

一般，若在由 x，y，z，…等构成的集合 V，定义了加法，且当集合 V 满足(A_1)～(A_5)时，将 V 称为**群**。此外，当 x 是集合 V 的元素时，记为 $V\ni x$（或者 $x\in V$）。

1—1—3　向量空间

向量空间定义　设向量 x，y，z 等集合为 V，标量的集合为K。若在 V 的元素之间定义了加法，又在 V 和 K 之间定义了数量乘法，如果它们满足下面的(B_1)～(B_5) 的关系。则称 V 为向量空间。

(B_1) V是群。

(B_2) 当给定 $V \ni x$ 和 $K \ni \lambda$ 时，可唯一确定 x 的数量乘积 $\lambda x \in V$。

(B_3) 对于 $V \ni x$，y 和 $K \ni \lambda$，有 $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$。

(B_4) 对于 $V \ni x$，$K \ni \lambda$，μ，有 $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$

(B_5) $1 \cdot x = x$（此处，1 是 K 的单位元素）

由于这里所说的标量集合 K，可以定义出如同所有实数的集合 R 和所有复数的集合 C 那样的普通四则运算，所以集合 K 称为代数中的体。因此，为了表示出是在哪个标量集合下的定义，常把以上定义的向量空间，称为体 K 上的**向量空间**。

(1—1) 式所表示的 n 维向量 x 的集合，是实数体 R 上的向量空间。把它称为 n 维实向量空间，记为 R^n。此外，由 n 个复数 z_1，z_2，…，z_n 构成的

$$z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (1—10)$$

的向量集合，是复数体 C 上的向量空间，**把它称为 n 维复数向量空间**，记为 C^n。显然，C^n 包含了 R^n。

1—1—4　线性无关、维数、基

线性无关定义　当 V 的非零向量 x^1，x^2，…，x^k，只在满足 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$ 的条件下才有，

$$\lambda_i \in K, \ \lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2+\cdots+\lambda_k x^k=0 \qquad (1—11)$$

成立。则称诸向量 x^i 为**线性无关**（或者称各自独立）。

线性相关定义　如果 $V \ni x^1$，x^2，…，x^k 不是线性无关

时，则 x^1，x^2，…，x^k就是**线性相关**。

维数定义 在向量空间 V 中，若可以找到任意多个线性无关的向量，那么，V 就称为**无限维**的。而当 V 不是无限维时，独立向量的个数是有限的，其有限的独立向量的最大个数称为维数。那么，V 就称为**有限维**的。

当 V 的维数为 n 时，V 的任意向量 x，可用 n 个线性无关的向量 x^1，x^2，…，x^n 的线性组合

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n \qquad (1\text{—}12)$$

来表示。因为 V 是由向量 $\{x^1, x^2, \cdots x^n\}$ 产生的，所以把 $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$称为 V 的生成元。

基定义 把 V 的线性无关的生成元 x^1，x^2，…，x^n，称为 V 的基。若采用如下的 n 个向量，

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1\text{—}13)$$

作为 n 维实向量空间 R^n 的基，就称它为 R^n 的**自然基**。

1—1—5 向量的内积 对于 n 维复向量空间 C^n 中的两个向量 x，y，把由

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i. \quad (\overline{x}_i \text{是} x_i \text{的共轭复数}) \qquad (1\text{—}14)$$

定义的量$\langle x, y \rangle$，称为 x，y 的内积。

内积具有下列三个性质：

(1) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \qquad (1\text{—}15)$

(2) $\langle\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2,\ y\rangle=\overline{\alpha_1}\langle x^1,$

$y\rangle+\overline{\alpha_2}\langle x^2,\ y\rangle$ (1—16)

(3) 对于 $x\neq0$，有 $\langle x,\ x\rangle\neq0$ (1—17)

此外，当 $\langle x,\ y\rangle=0$ 时，称 x 和 y 为正交（垂直相交）。

§ 1—2 线性变换和矩阵

1—2—1 线性变换 考察体 K 上两个有限维向量空间 V_1, V_2。当通过 V_1 的元素 x 能够确定 V_2 的元素 y 时，就说给出一个由 V_1 到 V_2 的变换．记为 $y=f(x)$，或者 $f:V\to V_2$。把 V_1 中 f 有定义的那部分集合 D，称为 f 的**定义域**．另外，把对应于 D 元素的 V_2 元素的集合，称为 f 的**值域**，用 $f(D)$ 表示。

线性变换定义 对于 V_1 的任意元素 x^1，x^2 和 K 的元素 λ，有

$$\left.\begin{aligned}&f(x^1+x^2)=f(x^1)+f(x^2)\\&f(\lambda x)=\lambda f(x)\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{—}18)$$

成立时，将 f 称为线性变换。

复合变换定义 当 $f:V_1\to V_2$，$g:V_2\to V_3$ 时，从 V_1 到 V_3 的变换 $g\cdot f$，确定如下

$$(g\cdot f)(x)=g(f(x)).\qquad(1\text{—}19)$$

1—2—2 坐标、矩阵 在抽象的向量空间中，线性变换可根据向量空间中引入的基用矩阵来表示。

若 V 是 K 上的 n 维向量空间，基是 a^1，a^2，…，a^n，

则 V 的任意元素 x，可唯一地表示为

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}^1+x_2\mathbf{a}^2+\cdots+x_n\mathbf{a}^n,\quad x_i\in K \qquad (1\text{—}20)$$

在此，V 的元素 x，对应 K 的 n 个元素 x_1，x_2，…，x_n，其变换可以表示为

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad 或\ \varphi: V\to K^n \qquad (1\text{—}21)$$

把 $\varphi(\mathbf{x})$ 称为关于基 $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，…，$\mathbf{a}^n$ 的 x 的坐标。

上述显见，借助于变换 φ，V 同 K^n 一一对应。因此，可以把 V 和 K^n 等同看待。

. 下面，我们来考察当 V_1 为 n 维，V_2 为 m 维时，向量空间之间的线性变换 $f: V_1\to V_2$。设 $\mathbf{a}^1$，$\mathbf{a}^2$，…，$\mathbf{a}^n$ 为 V_1 的基、$\mathbf{b}^1$，$\mathbf{b}^2$，…，$\mathbf{b}^m$ 为 V_2 的基，若 $\varphi: V_1\to K^n$，$\psi: V_2\to K^m$ 时，据图(1—4)就可得到变换 $F: K^n\to K^m$ 为

$$F=\psi\cdot f\cdot\varphi^{-1}$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & V_2 \arrow[d, "\phi"] \\
K^n \arrow[r, "F"'] \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

图 1—4　据矩阵 F 表示的线性变换

现今，K^n 的任意元素 ξ，根据自然基，可表示成为

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k \qquad (1-22)$$

可以认为，借助于变换 F，K^m 的元素为

$$n = F(\xi) = \sum_{k=1}^{m} n_k(e^k)$$

此时，据 $\varphi(a^k) = e^k$，即 $\varphi^{-1}(e^k) = a^k$ 得

$$\begin{aligned} \eta &= F(\xi) \\ &= F\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e^k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k F(e^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi(f(\varphi^{-1}(e^k))) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi(f(a^k)) \qquad (1-23) \end{aligned}$$

因为 $\psi(f(a^k))$是根据基 $b^1, b^2, \cdots, b^m$ 得的 $f(a^k)$ 的坐标，所以可表示为

$$\psi(f(a^k)) = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \qquad (1-24)$$

根(1-23)式，得

$$
F(\xi)=F\xi=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{1k}\xi_k\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{2k}\xi_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n}\alpha_{mk}\xi_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \tag{1—25}
$$

线性变换 F，可以用矩阵表示。矩阵 F 也可记为 $F=[\alpha^k{}_{ij}]$。

1—2—3　坐标变换　作为 $V_1=V_2=V$，我们把对应于 V 的元素 x 本身的变换，称为**恒等变换**。用下面的**单位矩阵**来表示，即

$$
I=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&&1&0\\ 0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix} \tag{1—26}
$$

V 的元素的坐标，将因 V 的基的取法不同而异。现在采用 a^1，a^2，…，a^n 作为 V 的基时，坐标为 ξ 的向量，在以

b^1，b^2，…，b^n 为基时，它的坐标就可用 $\eta = F\xi$ 来表示。这时，矩阵 F 与各个基的关系为

$$a^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} b^k \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad (1-27)$$

基结果与由 α_{jk} 构成的（1—25）式的矩阵形式是一致的。

1—2—4 矩阵的秩、矩阵的远算 $m \times n$ 矩阵 A 是 $K^n \to K^m$ 的线性变换，把 A 的值域记为 $A(K^n)$。

矩阵秩的定义 把 A（K^n）的向量空间的维数，称为矩阵 A 的秩。

矩阵的和 当 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$为 $m \times n$ 矩阵时，其和可按下式来确定，即

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \qquad (1-28)$$

矩阵与数量的乘法 如果 λ 为一标量，则 A 的 λ 倍可按下式确定，即

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}] \qquad (1-29)$$

矩阵的积 $A = [a_{ij}]$为 $m \times n$ 矩阵，$B = [b_{ij}]$为 $p \times m$ 矩阵时，两矩阵的乘积 $B \cdot A = C = [c_{ij}]$ 是 $p \times n$ 的矩阵。其中 c_{ij} 由

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \qquad (1-30)$$

来确定。

一般，$B \cdot A = A \cdot B$ 是不成立的。

逆矩阵 对于 $n \times n$ 矩阵 A，如果有

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = I \qquad (1-31)$$