

封面设计 谢忠民

小学教师进修中师教材辅导

几 何 题 解

北京教育学院师范教研室

河南省小学教师进修中师数学编写组

责任编辑 侯耀宗

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 7.625印张 161千字

1986年5月第1版 1986年5月第1次印刷

印数 1—10,440册

统一书号7356·294 定价1.05元

编者的话

由陕西、河南、甘肃、内蒙古、北京五省、市、自治区合编的小学教师进修中等师范教材已陆续出版发行，供各地小学教师进修之用。其中由北京教育学院师范教研室与河南省小学教师进修中师数学编写组编写的《初中数学复习》、《代数与初等函数》上、下册、《几何》、《算术基础理论》、《小学数学教材教法》等书已由河南教育出版社出版。为了配合这套数学教材的使用，我们编写这套教材的各册习题解答，供使用这套教材时参考。

本书是《几何》一书的习题解答。由北京教育学院方金秋编写。每个习题的解答只给出一种方法，这些方法不一定是最好的，希望读者在使用中根据自己的思考，给出更好的解法。限于我们的水平，加之时间仓促，书中的错误之处在所难免，望读者在使用中提出意见，以便修改。

编者

一九八五年六月

目 录

第一部分 立体几何

第一章 直线和平面	(1)
第一节 平面	(1)
习题一	(1)
第二节 空间两条直线	(8)
习题二	(8)
第三节 空间直线和平面	(10)
习题三	(10)
第四节 空间两个平面	(24)
习题四	(24)
第二章 多面体和旋转体	(34)
第一节 多面体	(34)
习题五	(34)
第二节 旋转体	(43)
习题六	(43)
第三节 表面积和体积	(52)
习题七	(52)
复习题	(79)

第二部分 逻辑知识初步

第三章 逻辑知识初步	(90)
------------	--------

第一节 概念	(90)
习题八	(90)
第二节 命题	(93)
习题九	(93)
第三节 逻辑思维的基本规律	(95)
习题十	(95)
第四节 推理和证明	(97)
习题十一	(97)
复习题	(105)

第三部分 平面解析几何

第四章 直角坐标系、曲线和方程	(111)
第一节 直角坐标系	(111)
第二节 曲线和方程	(111)
习题十二	(111)
第五章 直线	(121)
第一节 直线的斜率和直线方程	(121)
习题十三	(121)
第二节 两条直线的位置关系	(134)
习题十四	(134)
第六章 圆锥曲线	(151)
第一节 圆	(151)
习题十五	(151)
第二节 椭圆	(166)
习题十六	(166)
第三节 双曲线	(182)

习题十七	(182)
第四节 抛物线	(203)
习题十八	(203)
复习题	(216)

第一部分 立体几何

第一章 直线和平面

第一节 平面

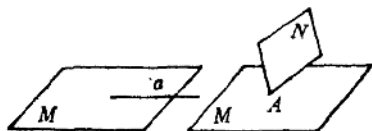
习 题 一

1. 如图所示, 说直线 a 不全在平面 M 内; 平面 M 与平面 N 只有一个公共点 A , 这样的说法对吗? 为什么?

答: 不对.

根据公理 1:

如果一条直线上
的两点在一个平面
内, 那么这条直线上



(第 1 题)

所有的点都在这个平面内. 另一方面, 几何中所说的平面, 应该看作是在空间无限伸展着的. 所以, 直线 a 应全在平面 M 内. 说直线 a 不全在平面 M 内的说法是不对的.

根据公理 2: 如果两个平面有一个公共点, 那么它们相交于过这点的一条直线. 另一方面, 几何中所说的平面, 应该看作是在空间无限伸展着的. 所以, 平面 M 与平面 N 相交于过 A 点的一条直线, 说平面 M 与平面 N 只有一个公共点的

说法是不对的。

2. 为什么独轮车要安上两只撑脚？而有的自行车后轮只安装一只撑脚？

答：这是由于不在同一条直线上的三点确定一个平面，从而使车子稳定的缘故。

3. 把一张纸折一下，为什么折痕是直线？

答：把一张纸折一下，相当于把一个平面折成两个相交的平面，其折痕为这两个平面的交线，所以折痕是直线。

4. 怎样用两条细绳来检查椅子四个脚底是否在同一平面内？为什么？

答：把两条细绳拉直，并分别压在两个对角的椅子脚底，当两条细绳相交于一点时，则说明这四条脚底在一个平面内；如果两条细绳成异面直线（即不相交于一点），则说明这四条脚底不在同一个平面内。这种检查法的原理是：两条相交的直线确定一个平面。

5. 三点确定一个平面的说法对吗？为什么？

答：不对。如果三点是在同一直线上时，过这三点就有无数多个平面。只有不在同一直线上的三点才确定一个平面。

6. 一条直线能否确定一个平面？任意一点和一条直线呢？

答：一条直线不能确定一个平面。任意一点和一条直线也不一定能确定一个平面。只有直线外的任意一点和这条直线才能确定一个平面。

7. 一个点能不能确定一个平面？两个点呢？怎样的三点才能确定一个平面？不在同一平面内的四个点可确定几个

平面？

答：一个点不能确定一个平面；

两个点也不能确定一个平面；

只有不在一条直线上的三个点才能确定一个平面；

不在同一平面内的四个点可以确定4个平面。

8. 试证：三角形一定是平面图形。

证明：设三角形为 ABC （如图），

则 A 、 B 、 C 三点不

在同一直线上。

所以， A 、 B 、

C 三点确定平面 M

（公理3）。正

即 A 、 B 、 C 在平面 M 内。

所以， $\triangle ABC$ 的边

AB 、 CB 、 CA 也在平面 M 内（公理1）。

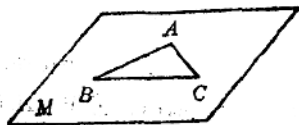
故 $\triangle ABC$ 是平面图形。

9. 过已知直线外一点向这条直线上三个点分别连结三条线段，这三条线段是否在同一平面内？为什么？

答：在同一平面内。根据公理3的推论1：一条直线和这条直线外的一点，确定一个平面。因为直线上的三点和直线外的一点在同一平面内，则由这四点中的任意两点连结的直线（线段）也在这个平面内（公理1）。所以，过已知直线外一点向这条直线上三个点分别连结三条线段一定在同一平面内。

10. 用斜二轴测投影法画出下列图形的直观图：

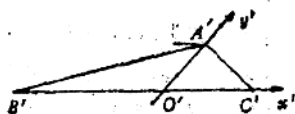
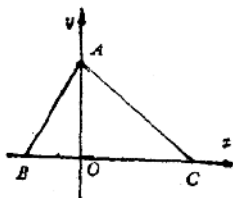
（1）边长分别为3cm、4cm、5cm的三角形；



（第8题）

(2) 相邻两边分别为 2cm 、 3cm ，夹角为 60° 的三角形，

(3) 边长为 3cm 的正五边形。



(第10题(1))

(1) 画法：如图，①作 $\triangle ABC$ ，使 $AB=3\text{cm}$ ， $AC=4\text{cm}$ ， $BC=5\text{cm}$ 。

②取 BC 所在的直线为 x 轴；过 A 作 BC 的垂线 AO ；取 AO 所在的直线为 y 轴。

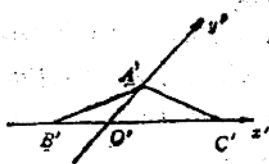
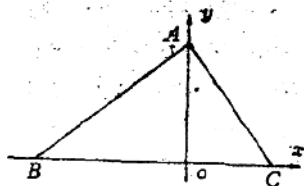
③作 x' 轴和 y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。

④在 x' 轴上，截取 $B'O' = BO$ ， $C'O' = CO$ ；

在 y' 轴上，截取 $A'O' = \frac{1}{2}AO$ 。

⑤连结 $A'B'$ ， $A'C'$ ，得 $\triangle A'B'C'$ 。

则 $\triangle A'B'C'$ 为所求的直观图。



(第10题(2))

(2)画法: 如图, ①作 $\triangle ABC$, 使 $AB=2\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$, $\angle ABC=60^\circ$.

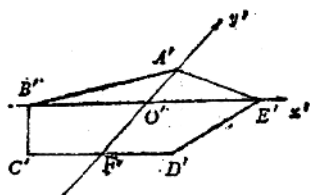
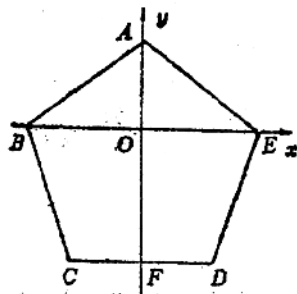
②取 BC 所在的直线为 x 轴, 过 A 点作 $AO \perp BC$ 于 O , 取 AO 所在的直线为 y 轴.

③作 x' 轴和 y' 轴, 使 $\angle x'O'y'=45^\circ$.

④在 x' 轴上, 截取 $B'O'=BO$, $C'O'=CO$. 在 y' 轴上, 截取 $A'O'=\frac{1}{2}AO$.

⑤连结 $A'B'$, $A'C'$, 得 $\triangle A'B'C'$.

则 $\triangle A'B'C'$ 为所求的直观图.



(第10题(3))

(3)画法: 如图, ①作正五边形 $ABCDE$, 使 $AB=BC=CD=DE=EA=3\text{cm}$.

②连结 BE , 并延长作为 x 轴; 过 A 作 $AO \perp BE$ 于 O , 取 AO 所在直线为 y 轴, y 轴交 CD 于 F .

③作 x' 轴和 y' 轴, 使 $\angle x'O'y'=45^\circ$.

④在 x' 轴上, 截取 $B'O'=O'E'=BO=OE$; 在 y' 轴上, 截取 $A'O'=\frac{1}{2}AO$, $O'F'=\frac{1}{2}OF$.

过 F' 作 $C'D' \parallel x'$ 轴, 并且使

$$CF' = F'D' = CF = FD,$$

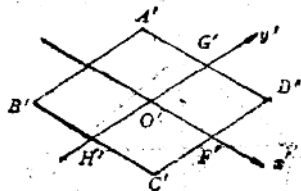
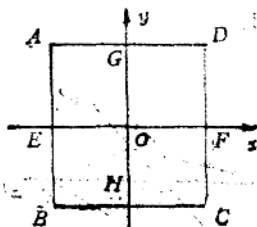
⑤ 连结 $A'B'$, $B'C'$, $D'E'$, $E'A'$, 得五边形 $A'B'C'D'E'$.

则五边形 $A'B'C'D'E'$ 为所求直观图.

11. 用正等轴测投影法画出下列图形的直观图:

(1) 边长为2.5cm的正方形;

(2) 内外半径分别为2cm、4cm的圆环.



(第11题(1))

(1) 画法: 如图, ① 作正方形 $ABCD$, 使 $AB=BC=CD=DA=2.5\text{cm}$.

② 过正方形中心 O , 作 x 轴平行于 AD , 作 y 轴平行于 AB . x 轴交 AB 于 E , 交 CD 于 F , y 轴交 AD 于 G , 交 BC 于 H .

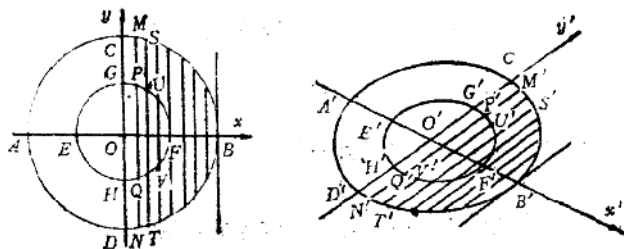
③ 作 x' 轴和 y' 轴, 使 $\angle x'O'y' = 60^\circ$.

④ 在 x' 轴上, 截取 $E'O' = EO$, $F'O' = FO$, 在 y' 轴上, 截取 $G'O' = GO$, $H'O' = HO$.

⑤ 过 E' , F' 分别作 $A'B' \parallel y'$ 轴, $C'D' \parallel y'$ 轴, 过 G' , H' 分别作 $A'D' \parallel x'$ 轴, $B'C' \parallel x'$ 轴, $A'B'$, $B'C'$,

$C'D'$ 、 $D'A'$ 分别交于 B' 、 C' 、 D' 、 A' ，得四边形 $A'B'C'D'$ 。

则四边形 $A'B'C'D'$ 就是所求的正方形的直观图。



(第11题(2))

(2)画法：如图，①作内外半径为2cm，4cm的圆环，其圆心为O。

②在圆环上，取一对互相垂直的直径AB、CD，分别以AB、CD所在的直线为x轴、y轴。

③作 x' 轴与 y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 60^\circ$ 。

④把直径AB分成n等份，过各分点作平行y轴的大圆的弦：MN、ST…，小圆的弦PQ、UV、…。

⑤在 x' 轴上，以 O' 为中点画线段 $A'B'$ ，使 $A'B' = AB$ ，画线段 $E'F'$ ，使 $E'F' = EF$ 。把 $A'B'$ n等分，以 O' 点为中点画 y' 的平行线 $M'N'$ 、 $S'T'$ 、…，使 $C'D' = CD$ ， $M'N' = MN$ ，…使 $G'H' = GH$ ， $P'Q' = PQ$ ，…。

⑥用平滑曲线连结 $D'N'T' \dots B' \dots S'M'C' \dots A'$ 连结 $H'Q'V' \dots F' \dots U'P'G' \dots E'$ ，得到圆环的直观图(如图)。

第二节 空间两条直线

习 题 二

1. 举出几个异面直线的实例。

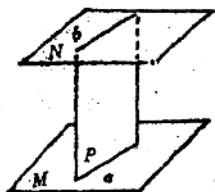
(略)

2. 什么叫做平行线？什么叫做异面直线？

答：在同一平面内的两条不相交的直线叫做平行线，不在同一平面内的两条直线叫做异面直线。

3. 分别在两个平面内的两条直线，一定是异面直线吗？

答：不一定。因为分别在两个平面内的两条直线可能是平行线（如图），直线 a 在平面 M 内，直线 b 在平面 N 内，而 $a \parallel b$ 。



(第3题)

4. 垂直于同一直线的两条直线，有几种可能的位置关系？

答：可能有相交、平行和异面直线三种位置关系。

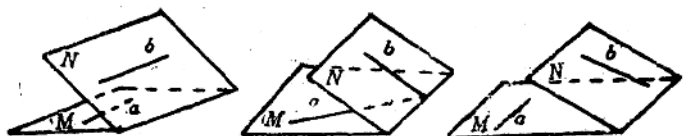
5. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线使它们成为

(1) 平行线；

(2) 相交直线；

(3) 异面直线。

答：如图所示。



(第5题)

6. 什么叫做两条异面直线所成的角? 两条异面直线在什么情况下互相垂直? 空间的两条垂直直线一定相交吗?

答: a, b 是两条异面直线, 经过空间任意一点 O , 作 $a' \parallel a$, $b' \parallel b$, a' 和 b' 所成的角叫做异面直线 a 和 b 所成的角. 由于 a' 和 b' 所成的角有四个, 其中对顶角相等, 如果没有特别说明, 通常说直线 a 和 b 所成的角是指 a' 和 b' 所成的锐角 (或直角). 如果两条异面直线所成的角是直角, 我们说这两条异面直线互相垂直. 两条互相垂直的直线不一定相交, 因为它们可能是互相垂直的两条异面直线.

7. 求证: 如果一条直线和两条平行线中的一条垂直, 那么也和另一条垂直.

已知: $a \parallel b$, $c \perp a$.

求证: $c \perp b$.

证明: 如图, $\because a \perp c$,

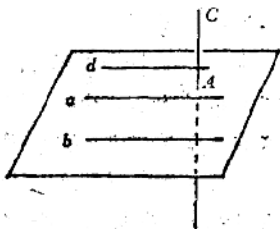
$\therefore$ 过 c 上的任意一点 A 作 $d \parallel a$,

则 $d \perp c$.

$\because b \parallel a$, $a \parallel d$, $\therefore b \parallel d$.

$\therefore c \perp b$.

8. 在正方体里, 下列直线所成的角是多少度?



(第7题)

(1) $A'A$ 和 $B'C'$,

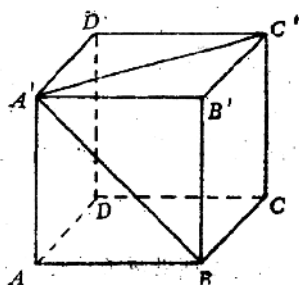
(2) $A'C'$ 和 AB ,

(3) $A'B$ 和 DC .

答: (1) AA' 和 $B'C'$ 所成的角为 90° .

(2) $A'C'$ 和 AB 所成的角为 45° .

(3) $A'B$ 和 DC 所成的角为 45° .



(第8题)

第三节 空间直线和平面

习 题 三

1. 如果一条直线平行于另一条直线, 那么它就和经过另一条直线的任何平面都平行, 这个结论对吗? 为什么?

答: 这个结论不对. 因为如果经过另一条直线的一个平面也通过这条直线时, 那么这条直线就在这个平面内, 这时不能说这条直线与这个平面平行.

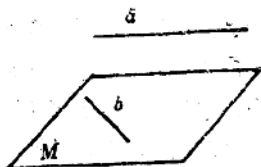
2. 一块矩形板 $ABCD$ 的一边 AB 在平面 M 内, 把这块矩形板绕着 AB 转动, 这时 AB 的对边 CD 是不是都和平面 M 平行? 为什么?

答: CD 不是都和平面 M 平行, 因为在旋转的过程中 CD 不能在平面 M 内, 当 CD 在平面 M 内时, 不能说 CD 和平面 M 平行.

3. 如果一条直线平行于一个平面, 那么这条直线是否和

这个平面内所有的直线都平行？

答：不是。如图，
 $a \parallel$ 平面 M ， b 在平面 M 内，
 但 a 与 b 不平行。



(第3题)

4. 如果两条平行线中的一条平行于一个平面，那么另一条是否也与这个平面平行？

答：不一定，因为当另一条直线在这个平面内时，就不能说另一条直线与这个平面平行。

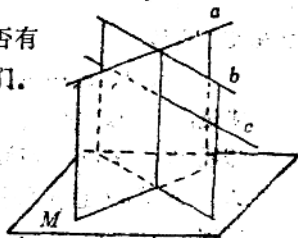
5. 空间的任意两条直线，能否有公共的平行平面？试用图表示它们。

答：空间的任意两条直线，
 都能有公共的平行平面。

如图，直线 a 与 b 相交，

$a \parallel M$ ， $b \parallel M$ ，

直线 b 与 c 平行，



(第5题)

$b \parallel M$ ， $c \parallel M$ ，而直线 a 与 c 为异面直线，
 $a \parallel M$ ， $c \parallel M$ 。

6. 如果平面外的两条平行线中有一条和平面内的某一条直线平行，求证另一条直线也和这个平面平行。

已知：直线 a 、 b 是平面 M 外的两条直线，且 $a \parallel b$ ，直线 c 在平面 M 内， $a \parallel c$ 。

求证： $b \parallel$ 平面 M 。

证明： $\because a \parallel b$ ， $a \parallel c$ ，

$\therefore b \parallel c$ 。



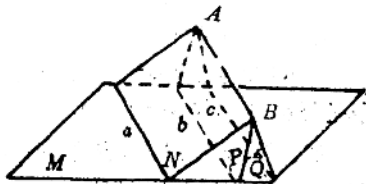
(第6题)

$\therefore b \parallel \text{平面} M$ (直线和平面平行的判定定理)。

7. 直线 AB 平行于平面 M , 经过 AB 的一组平面和平面 M 相交, 求证: 它们的交线 $a, b, c, \dots$ 是一组平行线。

已知: $AB \parallel \text{平面} M$,
平面 $N, P,$
 $Q, \dots$

是过直线 AB
的一组平面,
且与平面 M 分
别相交于直线



(第7题)

$a, b, c, \dots$

求证: $a \parallel b \parallel c \parallel \dots$

证明: $\because AB \parallel \text{平面} M$,

$\therefore AB \parallel a$ (直线和平面平行的性质定理)。

同理, $AB \parallel b, AB \parallel c, \dots$,

$\therefore a \parallel b \parallel c \parallel \dots$

8. 求证: 如果两个相交平面同时平行于一条已知直线, 它们的交线也与已知直线平行。

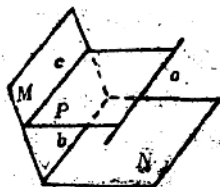
已知: $a \parallel \text{平面} M, a \parallel \text{平面} N$,
 M 与 N 交于直线 b 。

求证: $a \parallel b$ 。

证明: $\because a \parallel \text{平面} N$,

$\therefore$ 过直线 a 作平面 $P \parallel N$,

则 P 交 M 于直线 c 。



(第8题)

$\therefore$ 直线 $a \parallel c$ (如果一条直线和一个平面平行, 并且经过这条直线的一个平面和这个平面相交, 那么这条直