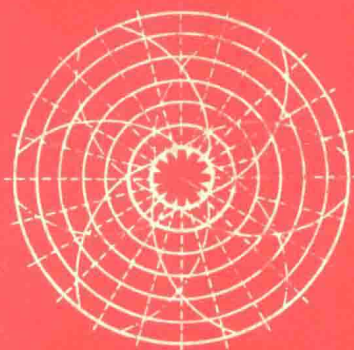
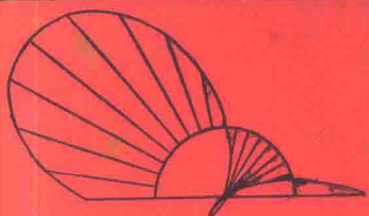
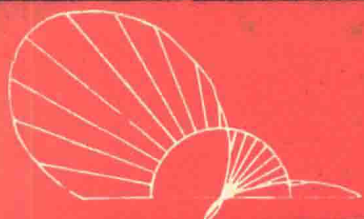
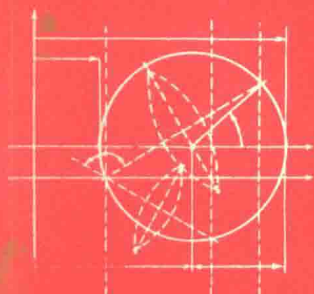


地应力测量的原理和应用



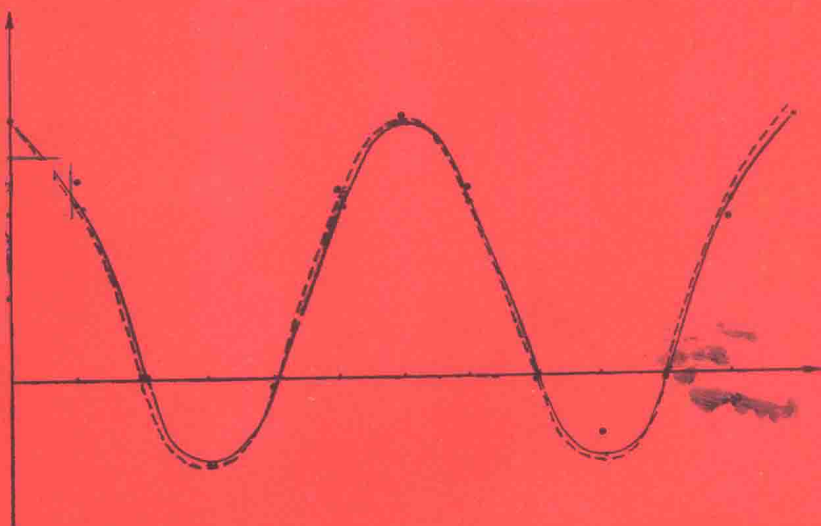
中国地质科学院地质力学研究所

编著

国家地震局地震地质大队



地质出版社



内 容 简 介

本书是中国地质科学院地质力学研究所和国家地震局地震地质大队几年来在地应力测量方面取得的部分研究成果。它包括了地应力测量原理, 数据处理方法, 测量仪器, 实地测量成果以及在地质、地震、矿山中的应用等方面的论文共十一篇, 可供地质、地震、矿山、水工、建筑、铁路、国防等方面的有关人员和大专院校有关专业的师生参考。

地应力测量的原理与应用

中国地质科学院地质力学研究所 编著
国家地震局地震地质大队

*

地质部书刊编辑室编辑

地质出版社出版

(北京西四)

地质印刷厂印刷

(北京安德路47号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本: $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张: $15^{1/4}$ ·字数: 366,000

1981年1月北京第一版·1981年1月北京第一次印刷

印数1—3,810册·定价2.20元

统一书号: 15038·新554

序 言

地壳上的构造现象是由于地应力作用的结果,开展地应力场的测定和研究是地质力学的一个重要方面,它对构造体系中应力活动方式的分析以及地壳运动问题的探讨具有重要的意义。同时,在地震预报、矿山开采、水利工程、军事工程等实际应用方面也有很大的现实意义。

自五十年代初期以来,国外的地应力测量工作陆续发展起来。哈斯特在瑞典、挪威、芬兰、挪威的亚等地区进行了大量的地应力测量工作,加拿大、美国、澳大利亚、苏联、法国和南非等许多国家和地区也都进行了很多地应力测量。这些测量绝大部分是在矿井中进行的,其目的是为了解决矿山及其他岩石工程的合理设计及稳定性问题。在这方面已有很多成功的例子。利用地应力测量进行地壳应力状态和地壳运动问题的研究也开展了部分工作,并先后发表了一些有关的论文。

我国的地应力测量工作是在六十年代初结合地震预报、矿山开采和水利工程的稳定性的研究开展起来的。我国卓越的科学家李四光非常重视地应力测量工作,把它作为地质力学研究工作的一个重要方面。他在五十年代末就着手将地应力测量应用于地震预报和地质构造的研究,并亲自指导和参加了这一工作。随着地应力测量的理论、仪器和方法的完善,到了七十年代进行了较多的现场测量。在解决矿山工程稳定性和地震预报方面取得了一定的进展,并开始了某些地区的现今地壳构造应力场特征的研究。

随着我国社会主义建设事业的迅速发展,很多部门诸如地质、地震、矿山开采、水电、建筑等都迫切需要开展地应力测量工作。为了适应形势发展的需要,我们编辑了这本《地应力测量的原理与应用》。

本书反映了近年来我国的地应力测量工作的部分新成果。其中一部分文章虽曾在有关刊物上发表过,但为了保持本书的系统性,在对这部分文章进行了必要的修改后也一并收集在内。

本书主要由潘立宙,李方全,王连捷等同志负责编汇。图件的清绘工作是由国家地震局地震地质大队和地质力学研究所两单位的绘图室完成的。现场测量和室内试验工作是国家地震局地震地质大队第四研究队和地质力学研究所进行的。

编者 1978.9

目 录

测量地应力的钻孔变形法·····	潘立宙 (1)
三维地应力测量的计算·····	王连捷、范雪玲、廖椿庭 (48)
平面地应力测量结果的最小二乘方整理方法·····	王连捷、范雪玲、廖椿庭 (81)
测量地应力的专用仪器——SYL-1型数字式压磁应力仪·····	章名川、区明益、汪铁华 (97)
绝对地应力测量的实验研究 ·····	王连捷、李方全、廖椿庭、李立球 (113)
云南西部地区现今构造应力场与龙陵地震 ·····	丁旭初、李立球、梁海庆 (131)
华北地区现今构造应力场 ·····	李方全、王连捷 (142)
矿区地应力测量与矿山设计 ·····	廖椿庭、任希飞、施兆贤 (151)
与地应力测量有关的几个公式的推导和讨论 ·····	潘立宙 (163)
钻孔法地应力测量中元件率定的若干力学问题 ·····	张 超 (204)
关于地应力测量压磁传感器的制作问题 ·····	丁原辰 (224)

测量地应力的钻孔变形法^①

潘 立 宙

(中国地质科学院地质力学研究所)

摘 要

本文首先用框图分析了钻孔变形法测量地应力的全过程,着重说明它的力学原理,并且介绍了基本公式的推导,接着又讨论了影响元件特性曲线或工作曲线的因素。作者在文中给出了三元件任意布置时的附加地应力计算公式和作图法,并提出了在应力解除测得的地应力值上叠加后来测得的应力变化值,以得到后续时刻的地应力值的建议,为此,介绍了叠加两应力状态的算法和作图法。

本文对预报震中的附加主应力方向汇交法初步探讨了它的理论背景,并提出了利用附加主应力轨迹线圈闭中心、附加最大剪应力轨迹线收敛中心等预报震中的建议,还提出了根据弹性应变能密度的分布和变化来分析地震前兆并预报地震的建议。

作者在文章的第八节中用一个简单例子指出了所谓“应力计”和“应变计”的实质;并在文末提出了若干问题和建议。本文对钻孔变形法测量地应力的工作中出现的一些认识问题作了澄清。

前 言

测量地应力的方法很多,有应力恢复法,应力解除法,应力半解除法等等,利用钻孔的应力解除法又分空孔法和填孔法两种;用来测量孔径变化的元件又分电感型元件,电阻型元件,钢弦型元件等等。在这些方法中,有一个以平面应力状态为基础的、利用钻孔变形来测量地应力的方法,即所谓哈斯特方法;目前国内外采用这个方法的很多,但在概念上人们对这个方法还存在着许多不同的理解。本文的目的是阐明这个测量方法的过程和力学原理,推导它的基本公式,顺便提出些问题和建议。至于测量和记录方面的仪器装置,元件的原理和制作,钻孔及掏槽的技术操作等等问题,则不列入本文讨论范围之内。

一 测量过程分析

测量一个物理量,我们通常的做法,是利用一系列仪器装置,将这个物理量转换成能够看见的几何量,然后根据仪器装置的原理,将几何量换算成物理量。以我们生活中常见的测量物体的重量为例,我们在称重中有时利用一根弹簧,把重物挂到弹簧上去,同时观

① 此文于1972年9月在国家地震局地震地质大队召开的地应力分析研究会议上报告。

察弹簧下端指针的位移，然后根据弹簧受力与伸长之间的数量关系，由指针的位移推算出物体的重量。这个测量过程比较简单，如图 1.1 所示。

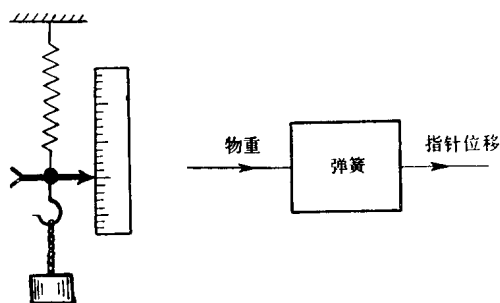


图 1.1

目前所采用的地应力测量方法，是在地块上钻一个圆孔。当地应力变化时，钻孔形状也跟着产生变化，它的直径在有些方向上变大，在另一些方向上变小。我们记录这些方向上的孔径变化，然后根据孔径与地应力状态之间的数量关系，从孔径的变化计算出地应力状态的变化。由于地块的变形很小，孔径的变化不容易直接量度，于是我们用几个电感型元件（当然也可以用别种测量元件，例如：电阻型元件，钢弦型元件等等），把孔径的变化转换成

电感的变化；然后根据各个元件的特性曲线，即元件长度与电感之间的数量关系，从元件的电感变化得出孔径的变化。至于元件的电感变化，我们又可以利用电桥装置把电感量转换成仪表中指针的几何位移；然后根据电桥装置的原理，由仪表指针的几何位移算出元件电感量的变化数值。因此，这个测量过程可以分成三大环节，如图 1.2 所示。

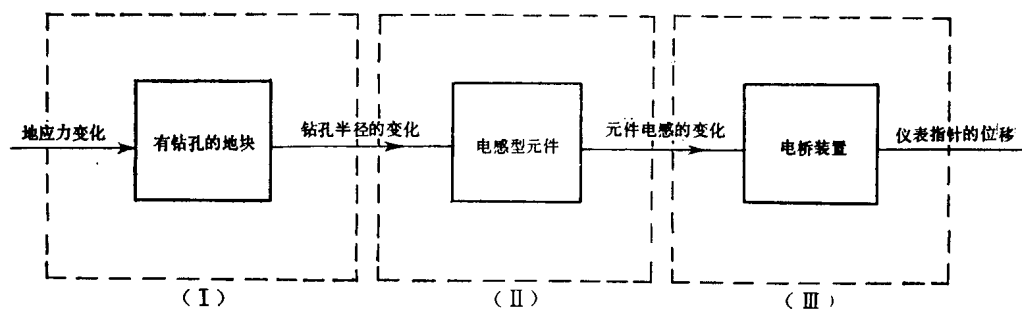


图 1.2

在每一环节中都必然有外界因素的干扰，原理与实际情况的差别，以及引起测量误差的其他因素。通常我们总设法把它们排除，或者把它们的作用减小到不影响测量所要求的精确度。

由于自然现象很复杂，人们在总结自然过程的原理和规律时，往往抓住几个主要的因素来考虑，忽略另一些次要因素的影响，也就是说，常常引进某些简化条件。在某一特定的测量过程中，这些简化条件的合理性，是根据当时当地的实际情况和我们对测量结果所要求的精确度来判定的。

在上述地应力测量过程的第 I 环节中，也常常引进若干简化前提。所谓“哈斯特法”的主要简化前提是：1. 地块是均匀且各向同性的弹性体；2. 地应力状态是平面应力状态^①，各个截面上的应力方向与水平面平行；3. 在测量地点周围的一定区域内，应力是均匀分布

① 有人简化为平面变形状态，例如中国科学院岩土力学研究所，〈应用深孔应变解除法测定岩体中的“残余应力”〉，1965年。

的；4. 钻孔的变形，可以看成是：在无穷远处受均匀分布的外力作用下，无穷大弹性薄板中圆孔的变形。在这些简化假定下，测量地应力的过程就与图 1.3 的测量过程一样了。

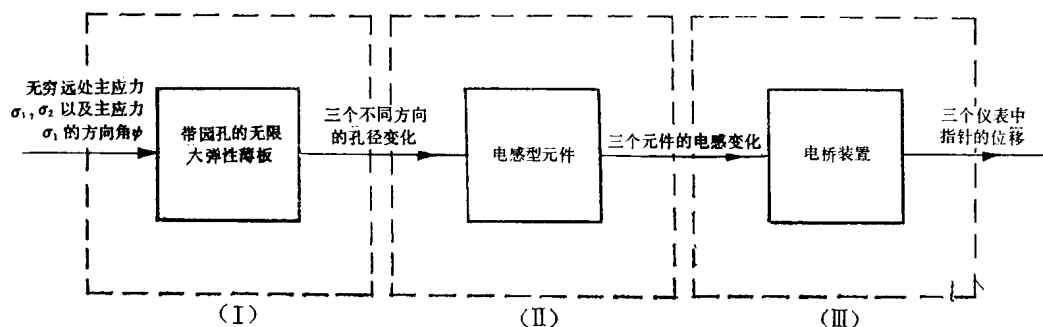


图 1.3

测量过程的上述分析使我们明瞭在每一环节中，输入的是什量；输出的或者测量的又是什么量；它采用的原理是什么；原理与实际情况的差别在哪里，如何改进；外界的干扰因素是什么，在哪里起作用，如何排除等等。它使我们明瞭环节与整个过程的关系是什么。例如，如果第 I 环节的原理不那么精确，即使元件和电桥制作得非常精确，也不能测出精确的地应力；反之，如果元件和电桥制作得不符合要求，即使原理很可靠，也同样不能测出精确的地应力。这种过程分析还能指出我们克服困难的努力方向是什么，例如第 I 环节中，我们要知道的是钻孔直径的变化，那末我们的努力方向就是想方设法去测准钻孔的变形，包括测量工具和测量方法的选择。

这里，我们还要指出一个问题，就是我们要测量的是无孔地块内的应力，现在地块上钻了一个孔，它内部的应力能和无孔地块的一样吗？根据圣维南原理，对于静力平衡的地块来说，有孔地块和无孔地块的应力状态只在孔周附近有显著差别；在离开钻孔较远的地方，两者的应力状态差别不大，离开得越远，差别得越小(图 1.4)。所以用钻孔变形法测量出来的地应力不是钻孔附近的应力，而是离钻孔远处的应力，这个应力在一定精确度内可以代表无孔地块内在被测地点处的应力。

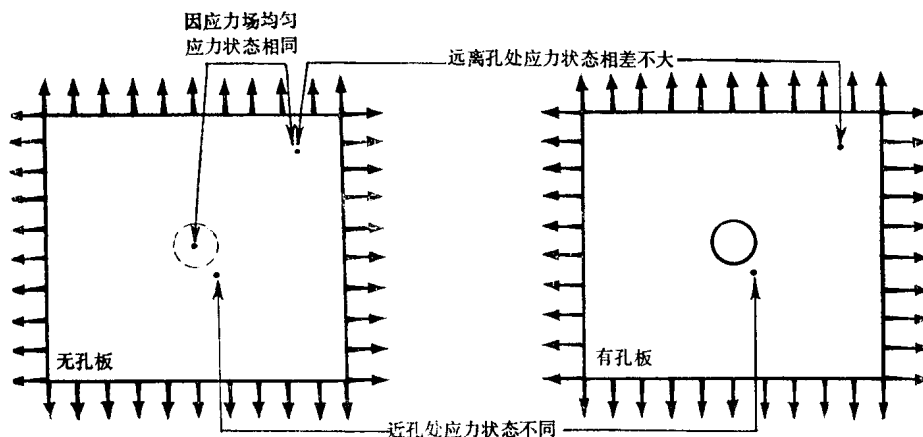


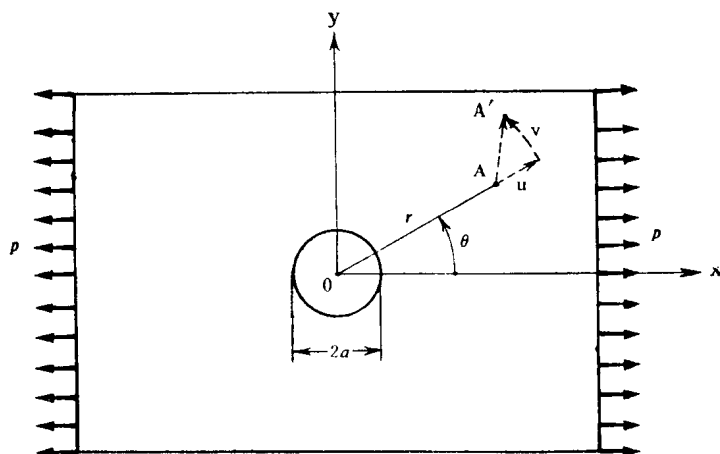
图 1.4

二 基本公式的推导

既然钻孔变形法测量地应力的第 I 环节中的原理以平面应力状态为基础，把钻孔的变形看成是无限大弹性薄板中圆孔的变形，我们就需要来推导这种弹性薄板中圆孔的变形公式。

设无限大弹性薄板的杨氏模量为 E ，泊松比为 ν ，薄板中有一圆孔，圆孔的半径为 a ；在无穷远处薄板受 x 方向的拉力作用，拉力是均匀分布的，分布强度为 p （图 2.1）。今用平面极坐标 (r, θ) 来表达板内各点的位置。在变形过程中，板内任意一点的位移可分解为径向（即 r 的增加方向）位移 u ，周向（即 θ 的增加方向）位移 v ，以及在厚度方向的位移 w 。我们规定离开孔心的径向位移 u 取正值，反之， u 取负值。

以 $dr, d\theta$ 为范围，在板内任一点划出一扇形微块。按平面应力状态的假定，在此微块上只有沿板厚均匀分布的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ ，其余应力分量均为零，其中 σ_r, σ_θ 是正应力， $\tau_{r\theta}$ 为剪应力。与此相应，微块只有应变分量 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}$ ，其余应变分量均为零，其中 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ 是伸缩应变， $\gamma_{r\theta}$ 是剪应变（图 2.2）。我们规定拉伸的正应力取正值，



A' 是板变形后 A 点的位置

图 2.1

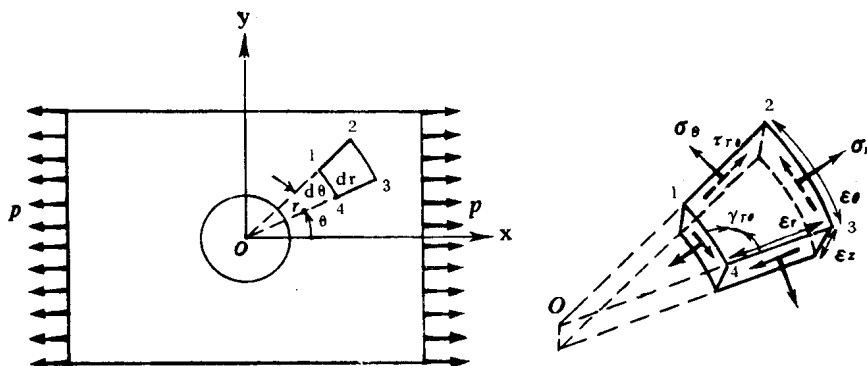


图 2.2

压缩的正应力取负值；伸长应变取正值，缩短应变取负值。

由于沿板厚方向上的位移分量 w 以及该方向上的伸缩应变 ϵ_z 对我们所需要的结果没有什么联系，所以我们在以后的讨论中不再提到它们。

如果我们只单纯地考虑无穷远处拉力 p 的影响而不考虑体力，那末我们有以下这些方程和条件：

1. 位移与应变之间的关系

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (2.3)$$

2. 变形协调条件

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \epsilon_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r \gamma_{r\theta}) = 0 \quad (2.4)$$

也称变形协调方程，它是为了保证位移连续而要求应变分量之间具备的一种关系。

3. 虎克定律（或称应力与应变关系）

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (2.5)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (2.6)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \quad (2.7)$$

4. 平衡方程

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.9)$$

它是建立内力之间，以及内力与体力之间的方程。

5. 边界条件

应力边界条件：

$$\text{i) 在圆孔壁上，也即当 } r=a \text{ 时， } \sigma_r=0, \tau_{r\theta}=0; \quad (2.10)$$

$$\text{ii) 在离圆孔较远的地方，应力状态与无孔圆板的应力状态相差不大。} \quad (2.11)$$

位移边界条件：

$$\text{i) 在 } \theta=0^\circ \text{ 处， } v=0; \quad (2.12)$$

$$\text{ii) } u|_{\theta=0^\circ} = u|_{\theta=180^\circ} \quad (2.13)$$

6. 位移单值条件

这个条件可以在解答的最后结果中核验。

先将虎克定律(2.5) — (2.7)代入变形协调条件，我们得到

$$\begin{aligned} & \nu \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1+2\nu}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial r^2} - \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \\ & + \frac{1+\nu}{r} \left(2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

将平衡方程中的(2.8)式对变数 r 求偏导数, 经归并及移项后得到

$$\frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} = -r \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \quad (2.15)$$

又将(2.9)式对变数 θ 求偏导数, 并经移项后得到

$$\frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \quad (2.16)$$

(2.15)式与(2.16)式相加后给出

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = -r \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \quad (2.17)$$

把(2.17)式代入(2.14)式, 经过整理后, 我们得到以应力分量表达的协调方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (2.18)$$

有时简写为

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (2.19)$$

其中简写符号 ∇^2 说明运算过程:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.20)$$

它在数学上称为拉普拉斯算子。

再将虎克定律(2.5)—(2.7)代入位移与应变的关系(2.1)—(2.3), 我们得到位移与应力之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (2.21)$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \quad (2.23)$$

我们从无限大有孔薄板中, 以很大的外半径 b , 与圆孔同心地划出一个圆环形平板(图2.3), 我们来求这块环形平板的外边界条件。根据圣维南原理, 我们知道, 在无穷远处受同样拉力的有孔平板和无孔平板内离圆孔较远处的应力状态的差别是很小的。因此我们在无孔平板的 (b, θ) 点处取一个如图2.4所示的三角微块。考虑这三角块的平衡^①, 就可以得出该处的 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$:

$$\sigma_r = \frac{p}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (2.24)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2} \sin 2\theta \quad (2.25)$$

它们也就是圆环形平板的外边界条件。

① 参阅本文第四节中(4.1)—(4.2)式。

我们的思路, 是先从上述那些方程和边界条件求出这块圆环形平板的应力分布, 然后把环形板的外半径 b 取得越来越大。当 b 趋于无穷大时, 这块圆环形平板就变成了无限大有孔平板, 圆环形平板内的应力分布也就变成了无限大有孔平板内的应力分布。根据无限大有孔平板内的应力分布, 再求出该板内的位移分布。

现在我们把求解无限大有孔平板内的应力分布和位移分布的步骤和方程归纳如下:

第一步 从平衡方程:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.27)$$

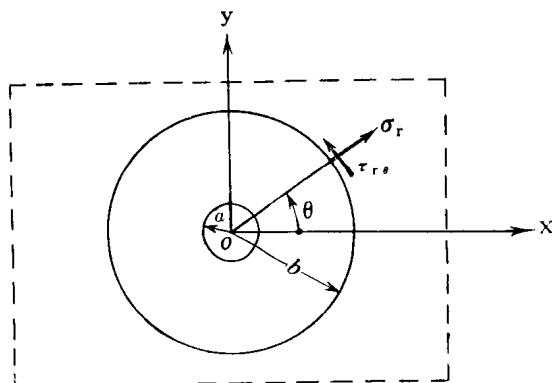


图 2.3

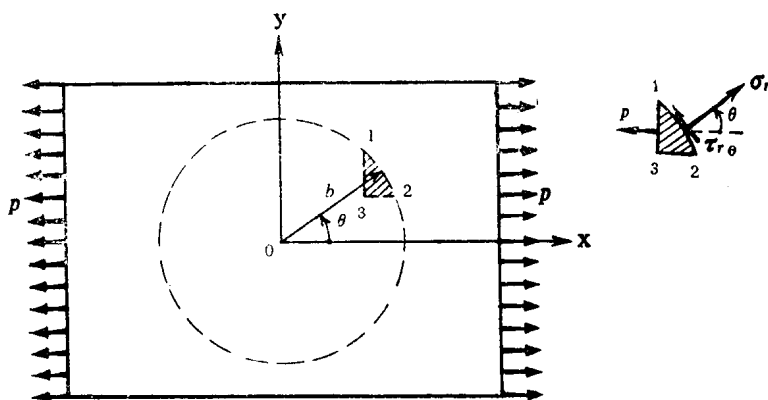


图 2.4

和变形协调方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad (2.28)$$

以及应力边界条件:

$$\text{i) 在 } r=a \text{ 处, } \sigma_r=0, \tau_{r\theta}=0; \quad (2.29)$$

$$\text{ii) 在 } r=b \text{ 处, } \sigma_r = \frac{p}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad (2.30)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2} \sin 2\theta, \quad (2.31)$$

先求出环形板内的应力分布。然后令应力算式中的 b 趋于无穷大, 得出无穷大有孔平板的应力分布 $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ 。

第二步 将第一步中求出的应力代入位移与应力的关系式 (2.21) — (2.23), 得到方程:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (2.32)$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta} \quad (2.34)$$

然后从这些方程和位移边界条件:

$$\text{i) 在 } \theta=0^\circ \text{ 处, } v=0; \quad (2.35)$$

$$\text{ii) } u|_{\theta=0^\circ} = u|_{\theta=180^\circ} \quad (2.36)$$

求出无限大有孔平板的位移 $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$ 。

在第一步求解应力的时候, 我们常常借助于一个未知函数 $\phi(r, \theta)$, 称为“应力函数”, 它与应力分量的关系取为

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.37)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (2.38)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \quad (2.39)$$

用直接代入法可以证明, 由这个未知函数 $\phi(r, \theta)$ 控制的应力分量(2.37)–(2.39)式必定满足平衡方程(2.26)和(2.27)。因此, 只要应力分量是从某一个函数根据关系式(2.37)–(2.39)得出来的, 我们就不必多此一举地再去考虑平衡方程了。但这个函数 $\phi(r, \theta)$ 不能任意选取, 因为从它导出的应力分量还必须满足变形协调方程和边界条件。

将(2.37)–(2.39)式代入协调方程(2.28)和边界条件(2.29)–(2.31)中, 我们就得到未知函数 $\phi(r, \theta)$ 应该满足的方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \phi = 0 \quad (2.40)$$

或

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.41)$$

和应该满足的边界条件:

i) 在 $r=a$ 时,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = 0 \quad (2.43)$$

ii) 在 $r=b$ 时,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{p}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{p}{2} \sin 2\theta \quad (2.45)$$

我们仍旧把(2.40)式称为协调方程。在数学中,这个方程称为双调和方程;凡满足双调和方程的函数称为双调和函数。已经找到的双调和函数很多,例如:

$$\theta; r^2\theta; r^2\log r; r^2; \log r; r^2\cos 2\theta; r^4\cos 2\theta; \frac{1}{r^2}\cos 2\theta; \cos 2\theta; \dots \quad (2.46)$$

值得我们注意的是:双调和函数之和仍是双调和函数,双调和函数与任意常数之积也仍是双调和函数。

根据以上的讨论,我们已经把第一步中求解应力的问题归结为寻找一个合适的双调和函数 $\phi(r, \theta)$,使它能够满足边界条件(2.42)–(2.45)。有了这个函数,就可根据(2.37)–(2.39)式得出应力分量。这些应力分量必定满足平衡方程(2.26), (2.27)和协调方程(2.28),因而也就是我们所需要的解答。现在我们就来寻找这个合适的双调和函数。为此,

从算式(2.46)所列出的那些双调和函数中挑选五个函数: $\log r; r^2; r^2\cos 2\theta; \frac{1}{r^2}\cos 2\theta; \cos 2\theta$ 这五个函数之和,

$$\phi = A\log r + Br^2 + Cr^2\cos 2\theta + D\frac{1}{r^2}\cos 2\theta + F\cos 2\theta \quad (2.47)$$

仍是双调和函数,其中 A, B, C, D, F 是任意常数。

将(2.47)式代入边界条件(2.42)–(2.45)后,比较每个等式左右两边的系数,我们就得到决定任意常数的方程:

$$\frac{1}{a^2}A + 2B = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{b^2}A + 2B = \frac{p}{2} \quad (2.49)$$

$$2C + \frac{6D}{a^4} + \frac{4F}{a^2} = 0 \quad (2.50)$$

$$2C - \frac{6D}{a^4} - \frac{2F}{a^2} = 0 \quad (2.51)$$

$$2C + \frac{6D}{b^4} + \frac{4F}{b^2} = -\frac{p}{2} \quad (2.52)$$

$$2C - \frac{6D}{b^4} - \frac{2F}{b^2} = -\frac{p}{2} \quad (2.53)$$

为了得到无限大有孔平板的解答,我们令方程(2.48)–(2.53)中的 b 很大很大,此时,方程中凡分母含有 b 的那些项就很小很小,可以忽略不计,于是这些方程就变为

$$\frac{1}{a^2}A + 2B = 0 \quad (2.54)$$

$$2B = \frac{p}{2} \quad (2.55)$$

$$2C + \frac{6D}{a^4} + \frac{4F}{a^2} = 0 \quad (2.56)$$

$$2C - \frac{6D}{a^4} - \frac{2F}{a^2} = 0 \quad (2.57)$$

$$2C = -\frac{p}{2} \quad (2.58)$$

由此解出

$$A = -\frac{a^2 p}{2}, \quad B = \frac{p}{4}, \quad C = -\frac{p}{4}, \quad D = -\frac{a^4 p}{4}, \quad F = \frac{a^2 p}{2} \quad (2.59)$$

将以上这些常数代入(2.47)式后, 我们就找到了我们需要的那个双调和函数, 即

$$\phi = -\frac{a^2 p}{2} \left\{ \log r - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (2.60)$$

将(2.60)式代入(2.37)–(2.39)式, 我们就得到第一步中所要求的应力分量:

$$\sigma_r = \frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (2.61)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (2.62)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (2.63)$$

下面我们来进行第二步工作, 即求解无限大平板有孔问题的位移 u 和 v , 为此, 将(2.61)–(2.63)式代入(2.32)–(2.34)式, 我们有方程:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{p}{2E} \left\{ (1-\nu) - (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} + \left[(1+\nu) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) - \frac{4a^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (2.64)$$

$$\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{p}{2E} \left\{ (1-\nu) + (1+\nu) \frac{a^2}{r^2} - \left[(1+\nu) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) - 4\nu \frac{a^2}{r^2} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (2.65)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = -\frac{(1+\nu)p}{E} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (2.66)$$

将方程(2.64)对变数 r 积分后得出

$$u = \frac{p}{2E} \left\{ (1-\nu)r + (1+\nu) \frac{a^2}{r} + \left[(1+\nu) \left(r - \frac{a^4}{r^3} \right) + \frac{4a^2}{r} \right] \cos 2\theta \right\} + K(\theta) \quad (2.67)$$

其中 $K(\theta)$ 是变数 θ 的任意函数。

把(2.67)式代入方程(2.65), 并经移项整理后, 我们有

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{p}{E} \left\{ (1+\nu) \left(r + \frac{a^4}{r^3} \right) + 2(1-\nu) \frac{a^2}{r} \right\} \cos 2\theta - K(\theta) \quad (2.68)$$

再将此方程对变数 θ 积分后得出

$$v = -\frac{p}{2E} \left\{ (1+\nu) \left(r + \frac{a^4}{r^3} \right) + 2(1-\nu) \frac{a^2}{r} \right\} \sin 2\theta - \int^\theta K(\theta) d\theta + L(r) \quad (2.69)$$

其中 $L(r)$ 是变数 r 的任意函数。

任意函数 $K(\theta)$, $L(r)$ 的具体形式要靠方程(2.66)来决定。为此将(2.67)式和(2.69)式代入方程(2.66), 并经移项整理后, 我们得到

$$\frac{dK(\theta)}{d\theta} + \int^\theta K(\theta) d\theta = L(r) - r \frac{dL(r)}{dr} \quad (2.70)$$

在等式(2.70)中, 左边是独立变数 θ 的函数, 右边是独立变数 r 的函数。这两个函数

要相等的话, 必须都等于一个常数 N , 也即

$$\frac{dK(\theta)}{d\theta} + \int^{\theta} K(\theta) d\theta = N \quad (2.71)$$

$$L(r) - r \frac{dL(r)}{dr} = N \quad (2.72)$$

将(2.71)式的左右两边对变数 θ 取导数, 我们得到二阶常微分方程:

$$\frac{d^2 K(\theta)}{d\theta^2} + K(\theta) = 0 \quad (2.73)$$

它的通解是

$$K(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta \quad (2.74)$$

其中 A, B 是任意常数

把(2.72)式改写为

$$\frac{d}{dr} \{L(r) - N\} = \frac{L(r) - N}{r} \quad (2.75)$$

这是一阶常微分方程, 它的通解是

$$L(r) = Cr + N \quad (2.76)$$

其中 C, N 是任意常数

现在再把(2.71)式改写为下式:

$$\int^{\theta} K(\theta) d\theta = N - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \quad (2.77)$$

此式的右边以(2.74)式代入后, 我们有

$$\int^{\theta} K(\theta) d\theta = N + A \sin \theta - B \cos \theta \quad (2.78)$$

将(2.74), (2.76)和(2.78)三式代入(2.67)式和(2.69)式后, 我们得到

$$u = \frac{p}{2E} \left\{ (1-\nu)r + (1+\nu)\frac{a^2}{r} + \left[(1+\nu)\left(r - \frac{a^4}{r^3}\right) + \frac{4a^2}{r} \right] \cos 2\theta \right\} + A \cos \theta + B \sin \theta \quad (2.79)$$

$$v = -\frac{p}{2E} \left\{ (1+\nu)\left(r + \frac{a^4}{r^3}\right) + 2(1-\nu)\frac{a^2}{r} \right\} \sin 2\theta - A \sin \theta + B \cos \theta + Cr \quad (2.80)$$

把(2.79)式和(2.80)式代入位移边界条件(2.35)和(2.36)后, 我们得到决定任意常数 A, B, C 的两个方程:

$$B + Cr = 0 \quad (2.81)$$

$$A = -A \quad (2.82)$$

因为 r 是变数, 所以从(2.81)式能够定出

$$B = 0, C = 0 \quad (2.83)$$

另外, 从(2.82)式又可定出

$$A = 0 \quad (2.84)$$

将 A, B, C 这三个常数值代入(2.79)式和(2.80)式后, 我们就得到第二步中所要求的无限大有孔平板的位移分布, 它们是

$$u = \frac{p}{2E} \left\{ (1-\nu)r + (1+\nu)\frac{a^2}{r} + \left[(1+\nu)\left(r - \frac{a^4}{r^3}\right) + \frac{4a^2}{r} \right] \cos 2\theta \right\} \quad (2.85)$$

$$v = -\frac{p}{2E} \left\{ (1+\nu)\left(r + \frac{a^4}{r^3}\right) + 2(1-\nu)\frac{a^2}{r} \right\} \sin 2\theta \quad (2.86)$$

用钻孔变形法测量地应力时，我们只需要知道孔壁各点的径向位移。在(2.85)式中令 $r=a$ ，就可以得出这些位移，它们是

$$u|_{r=a} = \frac{ap}{E} (1 + 2\cos 2\theta) \quad (2.87)$$

今后，为了书写符号方便起见，我们将省去竖线和角注，仍用 u 来表示孔壁各点的径向位移，也即

$$u = \frac{ap}{E} (1 + 2\cos 2\theta) \quad (2.88)$$

其中 θ 应理解为从拉力 p 的方向转到孔壁上点的矢径方向所经过的角度；逆时针方向转动时， θ 取正值，顺时针方向转动时， θ 取负值^①。

以上仅讨论了无穷大有孔平板在 x 方向受拉力时孔壁上各点的径向位移。由于我们所用到的弹性力学方程都是线性方程，所以对于无穷大有孔平板既受 x 方向拉力同时又受 y 方向拉力的情况，其孔壁上各点的径向位移可以从已有的公式(2.88)，运用叠加法得到。下面我们就来讨论这一情况。

设无穷大平板内有一半径为 a 的圆孔，在无穷远处既受 x 方向的均匀分布拉力，分布的强度为 σ_1 ，同时又受 y 方向的均匀分布拉力，分布强度为 σ_2 ，如图2.5_I所示，此时，孔壁上任一点 A 的径向位移为 u 。如果这块平板只受 x 方向拉力，如图2.5_{II}所示， A 点的径向位移为 u_1 ；按公式(2.88)，我们有

$$u_1 = \frac{a\sigma_1}{E} (1 + 2\cos 2\theta) \quad (2.89)$$

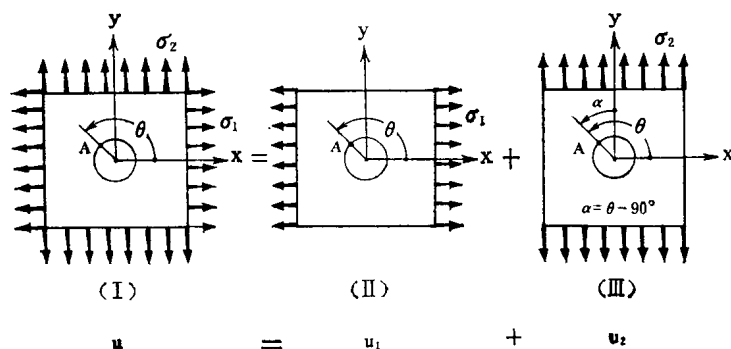


图 2.5

另一方面，如果这块平板只受 y 方向的拉力，如图 2.5_{III} 所示， A 点的径向位移为 u_2 ，按公式(2.88)，我们有

① 以后，凡是遇到转动的角度，其值的正负均按此规定。

$$u_2 = \frac{a\sigma_2}{E}(1 + 2\cos 2\alpha) \quad (2.90)$$

其中 α 是从拉力 σ_2 的方向转到 A 点的矢径方向所经过的角度, 它与 θ 的关系为

$$\alpha = \theta - 90^\circ \quad (2.91)$$

将(2.91)式代入(2.90)式, 我们得到

$$u_2 = \frac{a\sigma_2}{E}(1 - 2\cos 2\theta) \quad (2.92)$$

按照叠加原理, 两种外力联合作用下所产生的孔壁径向位移, 等于每种外力单独作用下所产生的孔壁径向位移之和, 也即

$$u = u_1 + u_2 \quad (2.93)$$

将(2.89), (2.92)两式代入(2.93)式, 我们就得到

$$u = \frac{a}{E} \{ \sigma_1 + \sigma_2 + 2(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \} \quad (2.94)$$

其中 θ 是从 σ_1 方向转到孔壁上点的矢径方向所经过的角度。(2.94)式是以平面应力状态为基础的、利用钻孔变形来测量地应力的基本公式, 我们常常把它改写成

$$\frac{uE}{3a} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (2.95)$$

引进记号 S :

$$S \equiv \frac{uE}{3a} \quad (2.96)$$

把(2.91)式进一步改写为

$$S = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (2.97)$$

为了强调 S 这个量与孔壁的径向位移 u 成正比, 我们把 S 称之为“折算位移”, 它的量纲是: 公斤/厘米²。

哈斯特^①把 S 这个量用符号 σ 表示, 并且称之为“记录的应力值”。这种称呼容易引起误会。人们往往把这个量错认为平板内、法线与 σ_1 方向成 θ 角的截面上的正应力, 也即错认为通常所说的“在测量元件方向上的应力”。正是为了消除这种误会, 所以我们宁可把 S 称为“折算位移”, 虽然它的量纲不是长度。

三 测量元件的特性曲线

前面的分析已经指出, 在我们所采用的那种测量地应力的过程中, 必须先知道孔壁上点的径向位移 u 。因为这位移就等于钻孔直径变化数值的一半, 所以我们只要知道钻孔的直径变化就够了, 也就是说, 我们只要测量变化着的钻孔直径就行了。在测量过程中, 测量元件是放置在钻孔内某一直径方向上的, 元件的两端是与孔壁接触的。如果元件与孔壁之间相互作用的接触力很小, 元件给孔壁的接触力对孔壁所引起的附加变形可以忽略的

① 《地质力学论丛》, 第2号, 第159页, 科学出版社, 1964年, 北京。