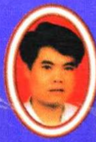
罗增儒数学奥林匹克丛书



LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

新世纪版

高中数学
奥林匹克

题解

同步辅导 分类精解
全真赛题 模拟演练

全一册

罗增儒 主编

陕西师范大学出版社

罗增儒数学奥林匹克丛书

高中数学奥林匹克题解

全一册

主编　罗增儒

编写　罗增儒　魏暹荪　文　锐　李元中
李三平　潘智民　李海军

陕西师范大学出版社

图书代号:JF185600

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克题解.全一册/罗增儒主编.—西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN7-5613-0525-7

Ⅰ.高… Ⅱ.罗… Ⅲ.数学课-高中-解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第15586号

责任编辑 朱永庚

封面设计 徐 明

责任校对 郭健娇

出版发行 陕西师范大学出版社

社　　址 西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)

E-mail: nuph@pub.xaonline.com

经　　销 新华书店

印　　刷 潼关县印刷厂

开　　本 850×1168

印　　张 17

字　　数 375千字

版　　次 2001年7月第1版

印　　次 2002年8月第3次

定　　价 17.00元

开户行:西安工行小寨分理处　账　号:216-144610-44-815

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换。

电　话:(029)5251046(传真)　5233753　5307864

内容简介

本书与罗增儒主编的《高中数学奥林匹克》(高一、高二、高三分册)配套,解答了该书的全部习题;并提供了6套模拟试题,具有仿真性、实用性和新颖性的特征。既可用于赛前的适应性训练,又可用于平时的评估测试;既可成套使用,又可拆开重组;其中的多数题目对参加高考很有帮助。最后一部分还汇编了近三年全国高中数学竞赛试题及解答。

前言

本书是罗增儒数学奥林匹克丛书中的一本，与罗增儒主编的《高中数学奥林匹克》配套，内容包括了三部分。

第一部分是《高中数学奥林匹克》各讲的习题解答。当初为了给读者留下思考的空间，同时也限于篇幅，我们只给了选择题、填空题的结论，读者在使用中有的找不出结论、有的猜不透过程，学习与辅导都极为不便。正是根据实际的需要，我们对每道选择题、填空题都作了讲解，但这只是参考意见，并不妨碍读者提出更多、更好的解法。

第二部分是模拟试题，其目的是为读者提供一个解题能力实际检验与强化提高的机会，同时，也为考试经验的积累与考试心理的调整提供一个环境。其内容，部分选自笔者主编的《高中数学竞赛模拟试题》，该书的仿真性、实用性与长久训练价值都曾获好评；另一部分内容选自1997年高中数学联赛改革后，笔者为有关刊物、有关竞赛提供的训练题，在指导思想上，依然追求仿真环境、训练价值与新颖性，既保留了《高中数学竞赛模拟试题》的优点，又补充了竞赛命题研究的新成果。

第三部分是最新的高中数学联赛试题，以便于读者把握数学竞赛的最新动向。

鉴于疏漏在所难免，而更好的解法又肯定会层出不穷，我们重申，无意以“请读者原谅”作为遁词，而是诚请各地师生毫不客气地指

正。借此机会,我们要衷心感谢,几年来曾就“数学奥林匹克丛书”提过批评与建议的读者,他们的智慧已使新的“奥林匹克金牌之路丛书”减少了一些愚蠢。

罗增儒

2001 年 5 月

目　　录

第一部分　竞赛训练题详解

高一分册

第二部分　模拟套题及解答

第三部分　全国高中数学竞赛试题及解答

第一部分　竞赛训练题详解

高一分册

第一讲　技巧方程

习题 1－1(P.14)

(一) 选择题

1.若 x_1, x_2 是二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根，则 $|x_1-x_2|$ 与判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的关系适合(　　).

A. $|x_1-x_2|>\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$　　　B. $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

C. $|x_1-x_2|<\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$　　　D. 不能确定

●**解法 1**　由求根公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

相减得　$|x_1-x_2|=\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

答案选 B.

●**解法 2**　由韦达定理，有

$$\begin{aligned}|x_1-x_2|&=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}}\\&=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}\\&=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.\end{aligned}$$

【发散思考】 由此得到一个恒等式

$$b^2-4ac=a^2(x_1-x_2)^2.$$

2. 若方程$\sqrt{x-p}=x$有两个不相等的实根,则实数p的取值范围是(　　).

A. $p\leqslant 0$　　　　B. $p<\frac{1}{4}$

C. $0\leqslant p<\frac{1}{4}$　　　　D. $p\geqslant\frac{1}{4}$

●**解法 1**　已知方程等价于

$$\begin{cases}x-p=x^2\geqslant 0,\\x\geqslant 0.\end{cases}$$

即二次方程$x^2-x+p=0$有两个不相等的非负实根,得

$$\begin{cases}\Delta=1-4p>0,\\x_1+x_2=1>0,\\x_1x_2=p\geqslant 0.\end{cases}$$

得$0\leqslant p<\frac{1}{4}$. 选 C.

●**解法 2**　已知方程即

$$(\sqrt{x-p})^2-\sqrt{x-p}+p=0.$$

解得

$$0\leqslant\sqrt{x-p}=\frac{1\pm\sqrt{1-4p}}{2},$$

有 $\begin{cases}1-4p>0,\\1-\sqrt{1-4p}\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $0\leqslant p<\frac{1}{4}$.

【引申探究】 此题为1994年初中联赛试题，当年陕西抽样表明，有56%的考生选B，39%的考生选C，说明超过半数的考生没有注意到 $x\geqslant 0$ 的隐含条件。

3. 设命题 P：方程的未知数范围扩大；命题 Q：方程产生增根. 则 P,Q 之间的关系适合(　　).

A. $P\Rightarrow Q$ 但 $Q\nRightarrow P$　　B. $P\nRightarrow Q$ 但 $Q\Rightarrow P$

C. $P\Rightarrow Q$ 且 $Q\Rightarrow P$　　D. $P\nRightarrow Q$ 且 $Q\nRightarrow P$

●解 A. 不成立。方程的未知数范围扩大有可能产生增根，但并非必然产生增根，如方程

$$\sqrt{x-1}=0 \tag{①}$$

的未知数范围取 $x\geqslant 1$，平方后，得

$$x-1=0, \tag{②}$$

未知数范围扩大为全体实数，但方程并不产生增根.

B也不成立. 产生增(减)根的根本原因在于方程变形不保持同解，即使不扩大未知数的范围，也会产生增根，比如，对方程①两边乘以 $x-2$，得

$$(x-2)\sqrt{x-1}=0, \tag{③}$$

虽然此时的未知数仍取 $x\geqslant 1$，但已增根 $x=2$，

综上得，A，B，C. 均不真，取D.

【发散思考】 最容易产生的误解是选B，把未知数范围扩大看成是方程产生增根的必要而不充分条件.

4. 设 $M=\{x\mid f(x)=0\}\neq\varnothing$,

$N=\{x\mid g(x)=0\}\neq\varnothing$,

$P=\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}$.

则集合 P 恒满足的关系为(　　).

A. $P=M\cup N$　　　B. $P\subseteq M\cup N$

C. $P\neq\varnothing$　　　D. $P=M\cap N$

●解　取 $a\in P$,则

$$f(a)g(a)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(a)=0 & \Rightarrow a\in M,\\ \text{或 } g(a)=0 & \Rightarrow a\in N.\end{cases}$$

即　$a\in M\cup N$.

有　$P\subseteq M\cup N$.

取 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,　$g(x)=\dfrac{x-1}{x}$,有

$$M=\{0\},\quad N=\{1\},\quad P=\varnothing.$$

这可否定 A,C.

又由 $f(x)g(x)=0$ 与 $\begin{cases}f(x)=0\\ g(x)=0\end{cases}$ 不等价知 D 不真. 故选 B.

【发散思考】　此题最容易产生的误选是 A. 其实方程 $f(x)g(x)=0$ 等价于

$$\begin{cases}f(x)=0,\\ g(x)\text{有意义}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}f(x)\text{有意义},\\ g(x)=0.\end{cases}$$

(二)填空题

1. 观察,找出方程 $x^{x^2}=2$ 的一个解为______.

●解　设 $x^2=y$,则 $x=y^{\frac{1}{2}}$(找一个正根),原方程为

$$y^{\frac{y}{2}}=2,$$

即　$y^y=2^2$.

有一个解 $y=2$,即 $x=\sqrt{2}$.

2. 方程 $\sqrt[3]{5-x}+\sqrt{x-4}=1$ 的实数解为______.

●解　设 $y=\sqrt[3]{5-x}$,有 $y^3=5-x$,即 $x=5-y^3$,得

$$\sqrt{x-4}=\sqrt{1-y^3}.$$

原方程可变为

$$y+\sqrt{1-y^3}=1,$$

有 $$\sqrt{(1-y)(1+y+y^2)}=\sqrt{(1-y)(1-y)}.$$

得 $$1-y=0, \quad ①$$

或 $$1+y+y^2=1-y; \quad ②$$

解①得 $y_1=1$,从而 $x_1=4$.

解②得 $y_2=0, y_3=-2$,从而 $x_2=5, x_3=13$.

3. 方程 $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=4$ 的实数解为____.

●**解** 设 $y=\sqrt{x+\frac{1}{4}}\geqslant 0$,则 $x=y^2-\frac{1}{4}$,代入原方程,有

$$y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}+y}=4.$$

即 $$y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}=4,$$

有 $$y^2+y+\frac{1}{4}=4(y\geqslant 0),$$

即 $$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4,$$

得 $$y+\frac{1}{2}=2(y\geqslant 0),$$

即 $$\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2},$$

得 $$x=2.$$

4. 方程 $\begin{cases}\sqrt{x+y-3}+\sqrt{x+\frac{1}{y}}=3\\ y^2+2xy+1-8y=0\end{cases}$ 共有______个实数解.

●**解** 由第 2 个方程知 $y\neq 0$,且可变形为

$$(x+y-3)+\left(x+\frac{1}{y}\right)=5.$$

设 $u=\sqrt{x+y-3}$，$v=\sqrt{x+\frac{1}{y}}$，则原方程为

$$\begin{cases}u+v=3,\\u^2+v^2=5.\end{cases}$$

可解得$\begin{cases}u_1=1,\\v_2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}u_2=2,\\v_2=1.\end{cases}$

代入得

$$\begin{cases}\sqrt{x+y-3}=1,\\\sqrt{x+\frac{1}{y}}=2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=5,\\y_1=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=3,\\y_2=1.\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}\sqrt{x+y-3}=2,\\\sqrt{x+\frac{1}{y}}=1;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_3=4+\sqrt{10},\\y_3=3-\sqrt{10};\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=4-\sqrt{10},\\y_4=3+\sqrt{10}.\end{cases}$$

共有 4 个实数解．

（三）对于 x 的哪些实数值，下列等式成立？

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}.$$

●解 左边$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2x-1}+1\right)+\left|\sqrt{2x-1}-1\right|\right]$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\\sqrt{2}\sqrt{2x-1}, & x>1.\end{cases}$$

故当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时，等式成立．

（四）解方程组

$$\begin{cases} y=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}, \\ x=\sqrt{y-\dfrac{1}{y}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{y}}. \end{cases}$$

解 由第1个方程有

$$2x-2y=2x-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

$$=\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0,$$

得 $x\geqslant y$.

同理，由第2个方程又得 $y\geqslant x$，从而 $x=y$，仿例3，得

$$x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

（五）解方程组求正数解

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=1, \\ y^2+z^2+yz=3, \\ z^2+x^2+zx=4. \end{cases}$$

解法1 如图1-1，作 Rt△ABC，使 $AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AC=2$，在三角形内取点 O，使 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$，由余弦定理知，$OA=x$，$OB=y$，$OC=z$ 是原方程组的一个正数解．

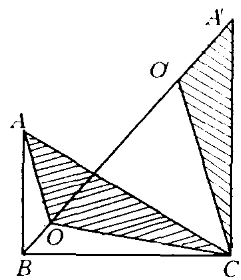


图1-1

将△AOC 绕 C 点旋转 60°（参见高二分册第2讲），得△$A'O'C$，则 A'，O'，O，B 共线，且

$$x+y+z=OA+OB+OC$$
$$=A'B.$$

在 Rt△$A'BC$ 中，有