数学分析习题课讲义

（多元函数部分）

刘隆复 马驷良 陈守东 编

吉林大学出版社

数学分析习题课讲义

（多元函数部分）

刘隆复 马驷良 陈守东 编

吉 林 大 学 出 版 社

数学分析习题课讲义

（多元函数部分）

刘隆复　马驷良　陈守东　编

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行

吉林工学院印刷厂印刷

787×1092　32开　19.25印张　466,000字

1986年9月第1版　　1986年9月第1次印刷

印数：1—7,000册

统一书号：13323·17　　定价：3.45元

前　　言

习题课是数学分析教学的一个重要环节．搞好习题课教学，有助于加强学生的基本功训练，培养和提高数学演算能力、逻辑推理能力和几何直观能力．为了给低年级学生提供一本习题课教材，同时也为高年级学生报考研究生时提供一本复习参考资料，在吉林大学数学系领导的重视和督促下，我们于1983年编写了本讲义的初稿，并在吉林大学数学系开始试用．两年来，在教学实践的基础上，吸取各方面的意见，经过修改和补充，形成了现在这本讲义．

本讲义共分十一章，每章分四部分：基本概念和主要结果，讨论，例题，思考题与习题．第一部分是该章的主要概念和结果的简单概述。核心是第二部分，分专题对主要概念、主要定理和主要方法，从正反两个方面展开讨论，并对于作题中常见的典型误证进行了一些分析．第三部分，一方面是对讨论的补充，另一方面也包含了一些综合性的题目．第四部分，思考题与习题，分(A)、(B)题：(A)题比较基本，(B)题难度较大或略偏一些．这两种题中都有相当一部分是讨论和例题的进一步深化和补充．讲义末尾，对于各章思考题与习题的绝大部分给了简单提示和解答．但务请读者不要过早查阅，尽量养成独立完成习题的习惯，以不断提高自已的分析问题与解决问题的能力．

另外，考虑到向数学分析现代化的过渡，以及与一些后续课程的联系，讲义中介绍了单位分解定理、算子及其弗雷协导数、算子形式的隐函数定理以及微分形式等内容，并尽

量采用了较初等的证明和叙述方法.

在讲义编写过程中，得到诸多老师和同志的大力支持. 江泽坚教授和李荣华教授，于繁忙之中认真审阅了初稿，并提出了修改的建议. 吴智泉教授和欧维义、邹承祖、严子谦、潘吉勋、孙玉柏等同志提出了很多宝贵的意见. 王师同志，在组织讲义的编写、审查和修改的整个过程中，作了大量的工作. 在讲义出版之际，我们对以上各位致以衷心的谢意.

编　者

1985年3月1日

常用数学符号

$\underline{\underline{\mathrm{def.}}}$	定义恒等
$x\in A$	x是集合A的一个元素
$x\overline{\in} A$	x不是集合A的一个元素
$A\subset B$	集合A被集合B包含
$A\not\subset B$	集合A不被集合B包含
$A\cup B$	集合A与B的并
$A\cap B$	集合A与B的交
$\cup A_i$, ΣA_i	所有集合A_i的并
$\cap A_i$, ΠA_i	所有集合A_i的交
ϕ	空集
$\overline{A}$	集合A的闭包
A°	集合A的内域，即A的所有内点的集合
A^c	集合A的余集
$A\setminus B$	集合A与集合B的差
$\{x;p(x)\}$	具有性质p的所有x组成的集合
$\{x_1,x_2\cdots\}$, $\{x_n\}$	以x_n为元素的集合，n为任意整数
$f^{-1}(A)$	A的原像集合，即$\{x;f(x)\in A\}$
$f(A)$	集合A通过f的像，即$\{y;y=f(x),x\in A\}$
$X\times Y$	笛卡尔乘积，由所有(x,y)所组成的集合，其中$x\in X$，$y\in Y$
$\forall$	任意给定
$\exists$	存在
$\Rightarrow$	推出

$\nRightarrow$	不能推出
$\rightarrow$	趋于
$\nrightarrow$	不趋于
$\Leftrightarrow$	当且仅当
R_m	m维欧氏空间
S^n	n维球
$Y \sim X$	变量Y与变量X等价，即$\lim \frac{Y}{X}=1$
$Y=o(X)$	变量Y是比X高阶的无穷小，即 $\lim \frac{Y}{X}=0$
$Y=O(X)$	$\left\lvert \frac{Y}{X} \right\rvert$是有界量
$\operatorname{sgn} x$	符号函数：$\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$
$e^x, \exp x$	指数函数
$[x]$	x的整数部分
$\lVert x \rVert$	x的范数或模
$\max\limits_{x \in X} f(x)$	当x在集合X中时$f(x)$的最大值
$\min\limits_{x \in X} f(x)$	当x在集合X中时$f(x)$的最小值
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	当x从右方趋于a时$f(x)$的极限
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	当x从左方趋于a时$f(x)$的极限
$\overline{\lim}$, $\limsup$	上极限
$\underline{\lim}$, $\liminf$	下极限
$\sup$	上确界
$\inf$	下确界

$f(x)\uparrow a$	$f(x)$递增趋于极限a
$f(x)\downarrow a$	$f(x)$递减趋于极限a
$n!$	n的阶乘，即$1\cdot 2\cdots n$
$(2n)!!$	$2n$的双阶乘，即$2\cdot 4\cdots(2n)$
$(2n+1)!!$	$2n+1$的双阶乘，即$1\cdot 3\cdots(2n+1)$
$C_n^k,\binom{n}{k}$	二项式系数$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$C^0(X),C(X)$	定义于X上的全体连续函数
$C^\infty(X)$	在X上具有无穷阶连续导数的函数之全体

目　　录

第三章　多元函数的极值与高阶偏导数

第四章　隐函数

第五章　重积分

第一章　多元函数的极限与连续性

基本概念和主要结果

1. 聚点、开集、闭集

R_m 中两点 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$和 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 之间的距离定义为

$$\|X-Y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2}$$

设点集 $E\subset R_m$.

称 X_0 为E 的聚点，如果$\forall\varepsilon>0$，$\exists X\in E$，使$0<\|X-X_0\|<\varepsilon$. E 的所有聚点的集合，称为 E 的导集，记为 E'.

称 E 为开集，如果对任意 $X_0\in E$, 存在 $\delta>0$, 使邻域 $U_\delta=\{X;\|X-X_0\|<\delta\}\subset E$, 亦即 E 中每点均为 E 的内点.

一般地，称 E 的所有内点的集合为 E 的内部，记为E°. 称 $E^c=\{X;X\overline{\in} E\}$ 为 E 的余集. 称 $\overline{E}=E\cup E'=\{X;X\in E$或$X\in E'\}$为 E 的闭包.

称 E 为闭集，如果 E 的聚点都属于 E，亦即 $E=E$.

2. 多元函数的极限、连续性

称 $\lim\limits_{X\to X_0}f(X)=A$, 如果$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<\|X-X_0\|<\delta$, $X\in E$ 时,

$$|F(X)-A|<\varepsilon$$

如果上述 $A=f(X_0)$，则称 $f(X)$ 于 X_0 点连续．若任意 $X\in E$ 均是 $f(X)$的连续点，则称 $f(X)$于 E 上连续．

3． 连续函数的基本性质

1° 如果 $f(X)$在有界闭集E上连续，则$f(X)$在E上：(i)有界，(ii)达到上、下确界，(iii)一致连续．

2° 如果 $f(X)$在区域E上连续，$X_1,X_2\in E$，则对介于$f(X_1)$和 $f(X_2)$ 之间的任何数 μ，必有 $X_0\in E$，使 $f(X_0)=\mu$．

4． 点集的基本定理

聚点原则：若 $E\subset R_m$ 是有界无穷点集，则 E 至少有一个聚点．

收敛子序列定理：有界点列必有收敛的子序列．

闭集套定理：设 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$ 是一串非空有界闭集，则有 $X_0\in E_n(n=1,2,\cdots)$．

有限复盖定理：设 E 是有界闭集，$\mathfrak{M}$ 是一族开集，完全复盖 E，则$\mathfrak{M}$中必有有限个开集，它们便可复盖 E．

讨　　论

1． 重极限、累次极限、方向极限的关系

我们已经看到，由于距离概念的恰当推广，多元函数极限从定义、柯西准则到基本性质与一元函数极限理论基本上是平行的．另一方面，由于空间结构的变化，又显示出多元函数极限与一元函数极限的本质差异．这些差异，首先表现

在重极限、累次极限、方向极限的关系上.

以二元函数 $f(x,y)$为例，在(x_0,y_0)点的两个累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

以及沿 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向极限

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta)$$

虽然都是由二元函数 $f(x,y)$引出的，但它们实质上仍然是一元函数的极限. 累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$刻划的极限过程，是先固定每个 x，把 $f(x,y)$看成一元函数，令 $y\to y_0$ 取极限（从定义域上看，就是先沿着平行于 y 轴的诸方向取极限），然后再对极限值 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$（关于 x 的一元函数）令 $x\to x_0$取极限. 方向极限刻划的则是动点(x,y)沿射线趋于(x_0,y_0)时 $f(x,y)$的极限过程（它是关于 ρ 的一元函数的极限）. 而重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 刻划的是动点(x,y)在定义域内按任意方式趋向(x_0,y_0)时的极限过程. 仔细分析上述不同的极限过程，便不难理解它们之间的差异，也就不难构造表现这些差异的反例.

我们已经知道：

重极限存在⇒各方向极限存在，且等于重极限.

重极限存在且内层极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$均存在⇒两个累次极限存在且等于重极限，从而累次极限可以换序.

但是反过来：

各方向限极存在且相等⇏重限极存在. 例如在(0,0) 点

考查函数

$$f(x,y)=\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$$

两个累次极限存在且相等$\nRightarrow$重极限存在.例如在(0,0)点考查函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

重极限存在$\nRightarrow$累次极限存在．例如在(0，0)点考查函数

$$f(x,\ y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

应该指出，我们不能停留在这些现成的例子上，而应该自己动手构造出各种例子.

例1　考查函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 当y=x^2,\ x>0\\ 0, & 当y\neq x^2或x\leqslant 0\end{cases}$$

易见，它在(0，0)点，各方向极限均存在且等于0，两个累次极限也存在且等于0，但重极限不存在（见图1-1）.

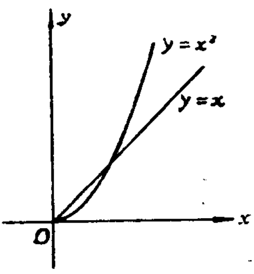

图　1-1

例2　试构造在一点处各方向极限存在且相等，而两个累次极限存在但不相等的例子.

考查函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 当|y|\leqslant x^2,\ y\neq 0\\ 0, & 当|y|>x^2 或 y=0\end{cases}$$

（请读者构造另外的例子）.