

781531

# 数学分析习题课讲义

(多元函数部分)

刘隆复 马驹良 陈守东 编

吉林大学出版社

# 数学分析习题课讲义

(多元函数部分)

刘隆复 马驹良 陈守东 编

吉林大学出版社

# 数学分析习题课讲义

(多元函数部分)

刘隆复 马驹良 陈守东 编

吉林大学出版社出版

吉林省新华书店发行

吉林工学院印刷厂印刷

787×1092 32开 19.25印张 466,000字

1986年9月第1版

1986年9月第1次印刷

印数：1—7,000册

统一书号：13323·17 定价：3.45元

# 前 言

习题课是数学分析教学的一个重要环节。搞好习题课教学，有助于加强学生的基本功训练，培养和提高数学演算能力、逻辑推理能力和几何直观能力。为了给低年级学生提供一本习题课教材，同时也为高年级学生报考研究生时提供一本复习参考资料，在吉林大学数学系领导的重视和督促下，我们于1983年编写了本讲义的初稿，并在吉林大学数学系开始试用。两年来，在教学实践的基础上，吸取各方面的意见，经过修改和补充，形成了现在这本讲义。

本讲义共分十一章，每章分四部分：基本概念和主要结果，讨论，例题，思考题与习题。第一部分是该章的主要概念和结果的简单概述。核心是第二部分，分专题对主要概念、主要定理和主要方法，从正反两个方面展开讨论，并对于作题中常见的典型误证进行了一些分析。第三部分，一方面是对讨论的补充，另一方面也包含了一些综合性的题目。第四部分，思考题与习题，分(A)、(B)题。(A)题比较基本，(B)题难度较大或略偏一些。这两种题中都有相当一部分是讨论和例题的进一步深化和补充。讲义末尾，对于各章思考题与习题的绝大部分给了简单提示和解答。但务请读者不要过早查阅，尽量养成独立完成习题的习惯，以不断提高自己的分析问题与解决问题的能力。

另外，考虑到向数学分析现代化的过渡，以及与一些后续课程的联系，讲义中介绍了单位分解定理、算子及其弗雷格导数、算子形式的隐函数定理以及微分形式等内容，并尽

量采用了较初等的证明和叙述方法。

在讲义编写过程中，得到诸多老师和同志的大力支持。江泽坚教授和李荣华教授，于繁忙之中认真审阅了初稿，并提出了修改的建议。吴智泉教授和欧维义、邹承祖、严子谦、潘吉勋、孙玉柏等同志提出了很多宝贵的意见。王师同志，在组织讲义的编写、审查和修改的整个过程中，作了大量的工作。在讲义出版之际，我们对以上各位致以衷心的感谢。

编 者

1985年3月1日

## 常用数学符号

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| <u>def.</u>                    | 定义恒等  |
| $x \in A$                      | $x$ 是集合 $A$ 的一个元素                                 |
| $x \notin A$                   | $x$ 不是集合 $A$ 的一个元素                                |
| $A \subset B$                  | 集合 $A$ 被集合 $B$ 包含                                 |
| $A \not\subset B$              | 集合 $A$ 不被集合 $B$ 包含                                |
| $A \cup B$                     | 集合 $A$ 与 $B$ 的并                                   |
| $A \cap B$                     | 集合 $A$ 与 $B$ 的交                                   |
| $\cup A_i, \Sigma A_i$         | 所有集合 $A_i$ 的并                                     |
| $\cap A_i, \Pi A_i$            | 所有集合 $A_i$ 的交                                     |
| $\phi$                         | 空集  |
| $\bar{A}$                      | 集合 $A$ 的闭包  |
| $A^\circ$                      | 集合 $A$ 的内域, 即 $A$ 的所有内点的集合                        |
| $A^c$                          | 集合 $A$ 的余集  |
| $A \setminus B$                | 集合 $A$ 与集合 $B$ 的差                                 |
| $\{x; p(x)\}$                  | 具有性质 $p$ 的所有 $x$ 组成的集合                            |
| $\{x_1, x_2, \dots\}, \{x_n\}$ | 以 $x_n$ 为元素的集合, $n$ 为任意整数                         |
| $f^{-1}(A)$                    | $A$ 的原像集合, 即 $\{x; f(x) \in A\}$                  |
| $f(A)$                         | 集合 $A$ 通过 $f$ 的像, 即 $\{y; y = f(x), x \in A\}$    |
| $X \times Y$                   | 笛卡尔乘积, 由所有 $(x, y)$ 所组成的集合, 其中 $x \in X, y \in Y$ |
| $\forall$                      | 任意给定  |
| $\exists$                      | 存在  |
| $\Rightarrow$                  | 推出  |

|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| $\Rightarrow$                   | 不能推出   |
| $\rightarrow$                   | 趋于   |
| $\nrightarrow$                  | 不趋于  |
| $\Leftrightarrow$               | 当且仅当   |
| $R_m$                           | $m$ 维欧氏空间  |
| $S^n$                           | $n$ 维球   |
| $Y \sim X$                      | 变量 $Y$ 与变量 $X$ 等价, 即 $\lim \frac{Y}{X} = 1$  |
| $Y = o(X)$                      | 变量 $Y$ 是比 $X$ 高阶的无穷小, 即 $\lim \frac{Y}{X} = 0$   |
| $Y = O(X)$                      | $ \frac{Y}{X} $ 是有界量   |
| $\operatorname{sgn} x$          | 符号函数: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ |
| $e^x, \exp x$                   | 指数函数   |
| $[x]$                           | $x$ 的整数部分  |
| $\ x\ $                         | $x$ 的范数或模  |
| $\max_{x \in X} f(x)$           | 当 $x$ 在集合 $X$ 中时 $f(x)$ 的最大值   |
| $\min_{x \in X} f(x)$           | 当 $x$ 在集合 $X$ 中时 $f(x)$ 的最小值   |
| $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ | 当 $x$ 从右方趋于 $a$ 时 $f(x)$ 的极限   |
| $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ | 当 $x$ 从左方趋于 $a$ 时 $f(x)$ 的极限   |
| $\lim, \operatorname{limsup}$   | 上极限  |
| $\lim, \operatorname{liminf}$   | 下极限  |
| $\sup$                          | 上确界  |
| $\inf$                          | 下确界  |

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $f(x) \uparrow a$     | $f(x)$ 递增趋于极限 $a$                        |
| $f(x) \downarrow a$   | $f(x)$ 递减趋于极限 $a$                        |
| $n!$                  | $n$ 的阶乘, 即 $1 \cdot 2 \cdots n$          |
| $(2n)!!$              | $2n$ 的双阶乘, 即 $2 \cdot 4 \cdots (2n)$     |
| $(2n+1)!!$            | $2n+1$ 的双阶乘, 即 $1 \cdot 3 \cdots (2n+1)$ |
| $C_n^k, \binom{n}{k}$ | 二项式系数 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$              |
| $C^0(X), C(X)$        | 定义于 $X$ 上的全体连续函数                         |
| $C^\infty(X)$         | 在 $X$ 上具有无穷阶连续导数的函数之全体                   |



# 目 录

## 第一章 多元函数的极限与连续性

|                           |        |
|---------------------------|--------|
| 基本概念和主要结果                 | ( 1 )  |
| 讨 论                       | ( 2 )  |
| 1. 重极限、累次极限、方向极限的关系       | ( 2 )  |
| 2. 点集基本定理的讨论              | ( 7 )  |
| 3. 多元函数连续性与一元函数连续性<br>的关系 | ( 12 ) |
| 例题                        | ( 20 ) |
| 思考题与习题                    | ( 27 ) |

## 第二章 偏导数与全微分

|                              |        |
|------------------------------|--------|
| 基本概念和主要结果                    | ( 35 ) |
| 讨 论                          | ( 38 ) |
| 1. 可微和弱可微、偏导数存在、连续性<br>之间的关系 | ( 38 ) |
| 2. 中值定理的应用                   | ( 43 ) |
| 3. 连锁规则 and 全微分基本定理          | ( 49 ) |
| 4. 梯度                        | ( 50 ) |
| *5. 算子及其弗雷协导数                | ( 52 ) |
| 例题                           | ( 58 ) |
| 思考题与习题                       | ( 62 ) |

### 第三章 多元函数的极值与高阶偏导数

|                          |        |
|--------------------------|--------|
| 基本概念和主要结果                | ( 70 ) |
| 讨论                       | ( 72 ) |
| 1. 极大(小)值和最大(小)值的讨论      | ( 72 ) |
| 2. 高阶偏导数及 $C^\infty$ 类函数 | ( 81 ) |
| 3. 多元泰勒公式                | ( 87 ) |
| 例题                       | ( 90 ) |
| 思考题与习题                   | ( 98 ) |

### 第四章 隐函数

|                   |         |
|-------------------|---------|
| 基本概念和主要结果         | ( 105 ) |
| 讨论                | ( 107 ) |
| 1. 隐函数存在定理的讨论     | ( 107 ) |
| 2. 隐函数的微分法        | ( 114 ) |
| 3. 条件约束下的最大(小)值讨论 | ( 123 ) |
| *4. 算子形式的隐函数定理    | ( 131 ) |
| 例题                | ( 138 ) |
| 思考题与习题            | ( 150 ) |

### 第五章 重积分

|              |         |
|--------------|---------|
| 基本概念和主要结果    | ( 159 ) |
| 讨论           | ( 162 ) |
| 1. 可积性的讨论    | ( 162 ) |
| 2. 化重积分为累次积分 | ( 166 ) |
| 3. 变量替换的选取   | ( 172 ) |
| 4. 积分不等式     | ( 187 ) |
| 例题           | ( 193 ) |
| 思考题与习题       | ( 204 ) |

## 第六章 第一型曲线积分与第一型曲面积分

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| 基本概念和主要结果                  | (219) |
| 讨论                         | (221) |
| 1. 第一型曲线积分与曲线方向的无<br>关性    | (221) |
| 2. 第一型曲面积分在正交变换下的<br>形式不变性 | (225) |
| 例题                         | (232) |
| 思考题与习题                     | (236) |

## 第七章 第二型曲线积分

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 基本概念和主要结果                 | (240) |
| 讨论                        | (242) |
| 1. 第二型曲线积分与第一型曲线积<br>分的关系 | (242) |
| 2. 格林公式                   | (244) |
| 3. 保守场                    | (254) |
| 例题                        | (258) |
| 思考题与习题                    | (264) |

## 第八章 第二型曲面积分

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 基本概念和主要结果                 | (271) |
| 讨论                        | (275) |
| 1. 第二型曲面积分与第一型曲面积<br>分的关系 | (275) |
| 2. 奥-高公式及格林第一、第二公式        | (278) |
| 3. 斯托克斯公式与算子符号 $\nabla$   | (286) |
| *4. 微分形式                  | (292) |
| 例题                        | (308) |

|                        |         |
|------------------------|---------|
| 思考题与习题·····            | ( 316 ) |
| <b>第九章 广义积分</b>        |         |
| 基本概念和主要结果·····         | ( 324 ) |
| 讨论·····                | ( 326 ) |
| 1. 广义积分与无穷级数收敛性的关系 ··· | ( 326 ) |
| 2. 收敛判别法的应用 ·····      | ( 332 ) |
| 3. 瑕积分和定积分的关系 ·····    | ( 337 ) |
| 4. 广义积分的第二积分中值定理 ····· | ( 339 ) |
| 例题·····                | ( 340 ) |
| 思考题与习题·····            | ( 348 ) |
| <b>第十章 带参变量的积分</b>     |         |
| 基本概念和主要结果·····         | ( 359 ) |
| 讨论·····                | ( 365 ) |
| 1. 带参变量的定积分 ·····      | ( 365 ) |
| 2. 带参变量的广义积分 ·····     | ( 374 ) |
| 3. 两个无穷积分的换序 ·····     | ( 391 ) |
| 4. 欧拉积分 ·····          | ( 398 ) |
| 5. 付里叶变换 ·····         | ( 404 ) |
| 例题·····                | ( 410 ) |
| 思考题与习题·····            | ( 430 ) |
| <b>第十一章 变分法</b>        |         |
| 基本概念和主要结果·····         | ( 442 ) |
| 讨论·····                | ( 445 ) |
| 1. 变分学基本引理 ·····       | ( 445 ) |
| 2. 拉格郎日方法 ·····        | ( 449 ) |
| 例题·····                | ( 460 ) |
| 思考题与习题·····            | ( 465 ) |

提示与解答..... ( 467 )

附录

附录 I 常用不定积分表..... ( 555 )

附录 II 常用定积分和广义积分表..... ( 569 )

附录 III 常用幂级数展开式..... ( 575 )

附录 IV 常用付里叶级数展开式..... ( 582 )

附录 V 常用付里叶变换..... ( 590 )

# 第一章 多元函数的极限与连续性

## 基本概念和主要结果

### 1. 聚点、开集、闭集

$R_m$  中两点  $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$  和  $Y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$  之间的距离定义为

$$\|X-Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$$

设点集  $E \subset R_m$ .

称  $X_0$  为  $E$  的聚点, 如果  $\forall \epsilon > 0, \exists X \in E$ , 使  $0 < \|X - X_0\| < \epsilon$ .  $E$  的所有聚点的集合, 称为  $E$  的导集, 记为  $E'$ .

称  $E$  为开集, 如果对任意  $X_0 \in E$ , 存在  $\delta > 0$ , 使邻域  $U_\delta = \{X; \|X - X_0\| < \delta\} \subset E$ , 亦即  $E$  中每点均为  $E$  的内点.

一般地, 称  $E$  的所有内点的集合为  $E$  的内部, 记为  $E^\circ$ .

称  $E^\circ = \{X; X \in E\}$  为  $E$  的余集. 称  $\bar{E} = E \cup E' = \{X; X \in E \text{ 或 } X \in E'\}$  为  $E$  的闭包.

称  $E$  为闭集, 如果  $E$  的聚点都属于  $E$ , 亦即  $E = \bar{E}$ .

### 2. 多元函数的极限、连续性

称  $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = A$ , 如果  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < \|X - X_0\| < \delta, X \in E$  时,

$$|f(X) - A| < \varepsilon$$

如果上述  $A=f(X_0)$ , 则称  $f(X)$  于  $X_0$  点连续. 若任意  $X \in E$  均是  $f(X)$  的连续点, 则称  $f(X)$  于  $E$  上连续.

### 3. 连续函数的基本性质

1° 如果  $f(X)$  在有界闭集  $E$  上连续, 则  $f(X)$  在  $E$  上:

(i) 有界, (ii) 达到上、下确界, (iii) 一致连续.

2° 如果  $f(X)$  在区域  $E$  上连续,  $X_1, X_2 \in E$ , 则对介于  $f(X_1)$  和  $f(X_2)$  之间的任何数  $\mu$ , 必有  $X_0 \in E$ , 使  $f(X_0) = \mu$ .

### 4. 点集的基本定理

聚点原则: 若  $E \subset R_n$  是有界无穷点集, 则  $E$  至少有一个聚点.

收敛子序列定理: 有界点列必有收敛的子序列.

闭集套定理: 设  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$  是一串非空有界闭集, 则有  $X_0 \in E_n (n=1, 2, \dots)$ .

有限复盖定理: 设  $E$  是有界闭集,  $\mathfrak{M}$  是一族开集, 完全复盖  $E$ , 则  $\mathfrak{M}$  中必有有限个开集, 它们便可复盖  $E$ .

## 讨 论

### 1. 重极限、累次极限、方向极限的关系

我们已经看到, 由于距离概念的恰当推广, 多元函数极限从定义、柯西准则到基本性质与一元函数极限理论基本上是平行的. 另一方面, 由于空间结构的变化, 又显示出多元函数极限与一元函数极限的本质差异. 这些差异, 首先表现

在重极限、累次极限、方向极限的关系上。

以二元函数  $f(x, y)$  为例，在  $(x_0, y_0)$  点的两个累次极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

以及沿  $e = (\cos \alpha, \cos \beta) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  的方向极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta)$$

虽然都是由二元函数  $f(x, y)$  引出的，但它们实质上仍然是一元函数的极限。累次极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  刻划的极限过程，

是先固定每个  $x$ ，把  $f(x, y)$  看成一元函数，令  $y \rightarrow y_0$  取极限（从定义域上看，就是先沿着平行于  $y$  轴的诸方向取极限），然后再对极限值  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ （关于  $x$  的一元函数）令  $x \rightarrow x_0$  取

极限。方向极限刻划的则是动点  $(x, y)$  沿射线趋于  $(x_0, y_0)$  时  $f(x, y)$  的极限过程（它是关于  $\rho$  的一元函数的极限）。而重极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$  刻划的是动点  $(x, y)$  在定义域内

按任意方式趋向  $(x_0, y_0)$  时的极限过程。仔细分析上述不同的极限过程，便不难理解它们之间的差异，也就不难构造表现这些差异的反例。

我们已经知道：

重极限存在  $\Rightarrow$  各方向极限存在，且等于重极限。

重极限存在且内层极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  均存

在  $\Rightarrow$  两个累次极限存在且等于重极限，从而累次极限可以换序。

但是反过来：

各方向极限存在且相等  $\Rightarrow$  重极限存在。例如在  $(0, 0)$  点



### 考查函数

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

两个累次极限存在且相等 $\Rightarrow$ 重极限存在. 例如在 $(0, 0)$ 点考查函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

重极限存在 $\Rightarrow$ 累次极限存在. 例如在 $(0, 0)$ 点考查函数

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

应该指出, 我们不能停留在这些现成的例子上, 而应该自己动手构造出各种例子.

#### 例1 考查函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } y = x^2, x > 0 \\ 0, & \text{当 } y \neq x^2 \text{ 或 } x \leq 0 \end{cases}$$

易见, 它在 $(0, 0)$ 点, 各方向极限均存在且等于0, 两个累次极限也存在且等于0, 但重极限不存在(见图1-1).

例2 试构造在一点处各方向极限存在且相等, 而两个累次极限存在但不相等的例子.

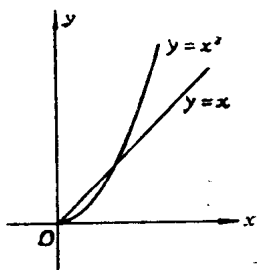


图 1-1

#### 考查函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |y| \leq x^2, y \neq 0 \\ 0, & \text{当 } |y| > x^2 \text{ 或 } y = 0 \end{cases}$$

(请读者构造另外的例子).