

- 852838

高等学校教材

5081

7772

现代控制理论引论

周凤岐 强文鑫 阙志宏



国防工业出版社

ISBN 7-118-00068-X/TP7

定价 3.80 元

现代控制理论引论

周凤岐 强文鑫 阙志宏

国防工业出版社

内 容 简 介

本书对现代控制理论的基本内容进行比较全面系统、深入浅出的介绍，全书包括线性系统理论、最优控制理论、最优估计理论、系统辨识、自适应控制等五篇，共十五章。

本书是为工科高等院校自动控制类专业高年级学生及非自动控制类专业研究生编写的教材，亦可供广大工程科技人员及其它大专院校师生自学现代控制理论时参考。

现代控制理论引论

周凤岐 强文鑫 周志宏

责任编辑 王祖佩

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张 23 529千字

1988年7月第一版 1988年7月第一次印刷 印数：0,001—2,700册

ISBN 7-118-00068-X/TP7 定价：3.80元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986~1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按电子工业部制定的工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划,由全国高等学校工科电子类《计算机与自动控制》专业教材编审委员会《自动控制》教材编审小组评选审定并推荐出版的。

随着我国社会主义现代化事业的发展,自动控制技术在国民经济、航空航天、军事技术等各部门获得广泛应用,对现代控制理论技术的研究应用已有迫切的需求。在教材编审委员会主任、上海交通大学张钟俊教授倡议下,要求在总结过去教学实践经验的基础上,编写一本适合于控制类专业本科生、非控制类专业研究生的现代控制理论教材。本教材由西北工业大学周凤岐、强文鑫、阙志宏三同志合编,北京工业学院吴沧浦教授任责任编辑,西安交通大学陈辉堂教授任主审。

本书内容分五篇共十五章。线性系统理论篇中介绍状态空间分析法、可控性与可观测性、状态反馈与状态观测器、李雅普诺夫稳定性理论概述。最优控制篇中介绍变分法、极小值原理、动态规划、二次型性能指标的最优控制问题,对奇异最优控制问题做了概述。最优估计理论篇中介绍几种常用的估计方法,推导了卡尔曼滤波基本方程,并考虑噪声、输入信号诸问题。系统辨识篇中介绍线性系统的经典辨识方法、最小二乘法辨识与极大似然法辨识。自适应控制篇中介绍自校正控制及模型参考自适应控制的基本理论与方法。各章均附有习题。

编写本教材时,力求对现代控制理论的基本内容进行全面系统、深入浅出的介绍,以最低限度的数学工具、适当的物理浅释、通俗易懂的语言,引导和帮助读者尽快掌握基本理论的概貌,以便继续深入探讨有关的理论和实践问题。

使用本教材时,可根据专业的不同侧重要求及教学计划安排的可能,选学其中部分内容,其余可供自学,以便进一步开拓知识时参考。第一至第五篇内容(按顺序)的参考学时建议分别为 32、22、20、16、10 学时左右。

本书第一篇由阙志宏编写,第二、五篇由强文鑫编写,第三、四篇由周凤岐编写。编写过程中,张钟俊、吴沧浦、陈辉堂、胡保生(西安交通大学)各位教授提出了许多宝贵的带指导性的意见,周其节教授(华南工学院)、陈新海教授(西北工业大学)、王广雄教授(哈尔滨工业大学)、李瑞棠副教授(西北电讯工程学院)、吴慎言副教授(西北纺织学院)审阅了书稿,他们为本书提出了许多宝贵的修改意见。在此,一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在缺点和错误,敬请读者批评指正。

编 者

一九八七. 三.

目 录

第一篇 线性系统理论

概述	1
第一章 状态空间分析法	2
第一节 基本概念	2
第二节 定常连续系统状态空间表达式的建立 (标准形最小实现问题)	6
第三节 定常连续系统状态方程的解	16
第四节 传递函数矩阵及其实现	23
第五节 时变系统状态空间表达式的建立及其解	30
第六节 离散系统状态空间表达式的建立及其解	35
习题	41
第二章 可控性和可观测性	44
第一节 定常系统的可控性	44
第二节 定常系统的可观测性	60
第三节 可控性、可观测性与传递函数 (矩阵) 的关系	68
第四节 对偶原理	76
第五节 时变系统的可控性和可观测性	77
第六节 线性定常系统的典范分解	82
习题	87
第三章 状态反馈与状态观测器	89
第一节 状态反馈与极点配置	89
第二节 输出反馈与极点配置	93
第三节 状态观测器	95
第四节 分离特性	97
第五节 降维观测器	99
第六节 工程应用举例	103
习题	111
第四章 李雅普诺夫稳定性理论概述	113
第一节 李雅普诺夫对稳定性的有关定义	113
第二节 线性系统稳定性判据	115
第三节 李雅普诺夫第二法稳定性定理	116
第四节 线性系统的李雅普诺夫分析	120
习题	124

第二篇 最优控制

概述	125
----------	-----

第五章 变分法在最优控制中的应用	128
第一节 无约束条件的泛函极值问题	128
第二节 有约束条件的泛函极值问题	135
第三节 变分法解最优控制问题	137
习题	142
第六章 极小值原理	144
第一节 连续系统的极小值原理	144
第二节 连续系统极小值原理的证明	145
第三节 状态变量受不等式约束时的极小值原理	148
第四节 离散系统的极小值原理	149
第五节 极小值原理解最短时间控制问题	151
第六节 奇异最优控制概述	157
习题	161
第七章 动态规划法	163
第一节 动态规划法的基本概念	163
第二节 动态规划法解离散系统的最优控制问题	167
第三节 动态规划法解离散线性二次型问题	169
第四节 动态规划法解连续系统的最优控制问题	171
习题	174
第八章 二次型性能指标的线性系统最优控制	175
第一节 线性连续系统状态调节器问题	176
第二节 $t_f = \infty$ 时线性定常连续系统状态调节器问题	179
第三节 线性连续系统输出调节器问题	182
第四节 线性连续系统跟踪器问题	183
第五节 离散系统状态调节器	186
习题	188

第三篇 最优估计理论

概述	190
第九章 参数估计方法	191
第一节 线性最小方差估计	191
第二节 最小二乘法估计	193
第三节 加权最小二乘法估计	197
第四节 递推最小二乘法估计	199
第五节 极大似然法估计	204
习题	207
第十章 最优线性预测与滤波的基本方程	209
第一节 维纳滤波	209
第二节 卡尔曼滤波问题的提法	211
第三节 离散系统卡尔曼最优预测基本方程的推导	215
第四节 离散系统卡尔曼最优滤波基本方程的推导	223
第五节 连续系统卡尔曼滤波基本方程的推导	228

第六节	系统噪声与观测噪声相关的卡尔曼滤波	234
第七节	具有输入控制信号的卡尔曼滤波	238
第八节	滤波的稳定性概念和滤波的发散问题	242
习题		247

第四篇 系统辨识

概述		249
第十一章	线性系统的经典辨识方法	251
第一节	脉冲响应的确定方法——相关法	251
第二节	伪随机二位式序列——M序列的产生及其性质	253
第三节	用M序列辨识线性系统的脉冲响应	259
第四节	由脉冲响应求传递函数	264
第五节	用M序列辨识多输入-多输出系统	266
习题		270
第十二章	最小二乘法辨识	271
第一节	最小二乘法辨识	271
第二节	递推最小二乘法辨识	276
第三节	辅助变量法辨识	278
第四节	递推辅助变量法辨识	280
第五节	多步最小二乘法辨识	281
习题		289
第十三章	极大似然法辨识	291
第一节	极大似然法辨识	291
第二节	递推极大似然法辨识	297
第三节	模型阶的确定	301
习题		304

第五篇 自适应控制

概述		307
第十四章	自校正控制	308
第一节	最小方差控制律	309
第二节	最小方差自校正调节器	312
第三节	最小方差自校正控制器	316
第四节	极点配置自校正调节器	318
第十五章	模型参考自适应控制	321
第一节	按局部参数最优化设计自适应控制的方法	322
第二节	基于李雅普诺夫稳定性理论按对象状态信息设计自适应控制的方法	326
第三节	基于李雅普诺夫稳定性理论按对象输入输出信息设计自适应控制的方法	330
第四节	用超稳定性及正性概念设计自适应控制的方法	338
附录		344
附录一	矩阵求逆引理	344
附录二	矩阵许瓦茨不等式	344
附录三	随机变量与随机过程的基本概念	345
附录四	正交定理	353
参考文献		356

第一篇 线性系统理论

概 述

尽管任何实际系统都含有非线性因素，但在一定条件下，许多实际系统可以用线性模型充分地加以描述，加之在数学上处理线性系统又较为方便，因此，现代控制理论与经典控制理论一样，线性系统理论首先得到研究发展，已形成较完整较成熟的一般理论。现代控制理论的许多分支，如最优控制、最优估计与滤波、系统辨识、自适应控制等，均以线性系统理论为基础。基于这些理论，工程上已出现许多性能优良的系统。

对系统采用状态变量形式进行数学描述，建立适合于多变量、时变系统的一般分析方法，是现代的线性系统理论的重要标志。尽可能采用数字计算机技术，处理复杂大量的信息，实现实时控制，是构造现代控制系统的重要标志。不必怀疑经典控制理论在分析设计单变量控制系统方面所具有的优越性，今后它仍将继续发挥重大作用；也不必怀疑正是由于航天航空、军事技术、国民经济高技术的发展，推动了现代控制理论的形成，并且在工程中的应用将逐渐推广到各部门。

本篇将系统介绍线性系统理论的主要内容。第一章主要介绍如何建立状态变量形式的定常和时变、连续和离散线性系统的数学模型，以及它们的解法。第二章深入地揭示出采用状态变量描述以后，系统固有的两种基本特性：“状态可控性”和“状态可观测性”，并建立起一整套分析这些特性的判据。第三章介绍基于可控性和可观测性，如何进行状态反馈、状态观测器的设计来改善系统性能问题，这是一种新的设计方法。其中列举的单级倒置摆这一工程应用实例，分析了从建立数学模型到设计状态反馈，设计全维、降维观测器的基本过程，将有助于读者建立一个较为完整的概念，并可领会到在解决某些工程问题中，现代的理论和方法的优越之处。第四章介绍李雅普诺夫稳定性理论的概貌，这是关于稳定性的更一般的理论，它不但适用于线性定常系统，还适用于多变量、时变线性系统以及非线性系统。李雅普诺夫稳定性理论在最优化设计以及自适应控制领域的应用正在不断发展。鉴于本篇主题，在非线性系统应用方面的卓著成果便不涉及了。

第一章 状态空间分析法

系统一般可用常微分方程在时域内描述,对复杂系统要求解高阶微分方程,这是相当困难的。经典控制理论中采用拉氏变换法在复频域内描述系统,得到联系输入-输出关系的传递函数,基于传递函数用试探法设计单输入-单输出系统极为有效,可从传递函数的零点、极点分布得出系统定性特性,并已建立起一整套图解分析设计法,至今仍得到广泛成功地应用。但传递函数对处于内部的中间变量不便描述,对某些内部变量还不能够描述;且忽略了初始条件。因此传递函数不能包含系统的所有信息。由于六十年代以来,控制工程向高性能方向发展,所需利用的信息不局限于输入量、输出量、误差等,还希望掌握并利用系统内部的状态变化规律,加之可能利用数字计算机进行分析设计及实时控制,因而需要并可能处理复杂的时变、非线性、多输入-多输出系统的问题,但传递函数法在这新领域的应用受到很大限制。于是采用了新的描述系统的方法——状态空间分析法。

第一节 基本概念

状态变量 指确定系统状态的一组独立(数目最少的)变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统含有 n 个独立变量,当求得 n 个独立变量随时间变化的规律时,系统状态可完全确定。若变量数目多于 n ,必有变量不独立;若少于 n ,又不足以描述系统状态。因此,当系统能用最少的 n 个变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 完全确定系统状态时,则称这 n 个变量为系统的状态变量。

选取状态变量应满足以下条件:给定 $t=t_0$ 时刻的初始值 $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$,以及 $t \geq t_0$ 的输入值 $u(t)$,可唯一确定系统将来的状态 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 。而 t_0 时刻的状态表示 t_0 时刻以前的系统运动的历史总结,故状态变量是对系统过去、现在和将来行为的描述。

状态变量的选取具有非唯一性,即可用某一组、也可用另一组数目最少的变量。状态变量不一定要象系统输出量那样,在物理上是可测量或可观察的量,但在实用上毕竟还是选择容易测量的一些量,以便满足实现状态反馈、改善系统性能的要求。

状态向量 把描述系统状态的 n 个状态变量 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 看作向量 $x(t)$ 的分量,则 $x(t)$ 称为状态向量,记以 $x(t)=[x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$,上标 T 为矩阵转置记号。

若状态向量由 n 个分量组成,则称 n 维状态向量。一旦给定 $t=t_0$ 时的初始状态向量 $x(t_0)$ 及 $t \geq t_0$ 的输入向量 $u(t)$,则 $t \geq t_0$ 的状态由状态向量 $x(t)$ 唯一确定。

状态空间 以状态变量作为坐标轴所组成的空间称状态空间。系统在任一时刻的状态由状态空间中一点表示,例如二阶系统的状态可由 x_1 轴、 x_2 轴组成的状态平面(即相平面)中一点来表示;三阶系统的状态可由 x_1 轴、 x_2 轴、 x_3 轴组成的三维状态空间中一点来表示; n 阶系统的状态则由 x_1 轴, $\dots$, x_n 轴组成的 n 维状态空间中一点来表示。

初始时刻 t_0 的状态 $x(t_0)$ 在状态空间中为一初始点, 随着时间推移, 系统状态在变化, 便在状态空间中描绘出一条轨迹, 称状态轨迹。

状态方程 状态变量的一阶导数与状态变量、输入变量关系的数学表达式称为状态方程。由于 n 阶系统有 n 个独立状态变量, 于是状态方程是 n 个联立的一阶微分方程或差分方程。当系统用高阶微(差)分方程或传递函数表示时, 可以转化为状态方程。状态方程是状态空间分析法的基本数学方程。

设单输入定常连续系统, 其状态变量为 $x_1(t), \dots, x_n(t)$, 则一般形式的状态方程写作:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中常系数 $a_{11}, \dots, a_{nn}; b_1, \dots, b_n$ 与系统特性有关。方程 (1-1) 可写成向量矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (1-2)$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$ 称系统矩阵 (系数矩阵, 状态阵), $\mathbf{b}$ 称输入矩阵 (在此为列矩阵)。

应指出, 在数字机上求解一阶微(差)分方程组比求解相当的高阶方程要容易, 把状态方程写成向量矩阵形式简化了方程组的表示形式。

对同一系统, 由于所选状态变量不同, 可建立起不同的状态方程, 因此, 描述系统的状态方程也具有非唯一性。

根据微分方程理论中解的存在性及唯一性定理 (意为当给定输入时, 微分方程满足初始条件的解是唯一确定的), 要求 u 应分段连续⁽¹⁷⁾。但是, 当状态方程中含有某些 u 如 $u(t) = 1(t)$ 的导数项 $\dot{u}(t) = \delta(t)$ 时并不分段连续, 此时便不满足微分方程解的存在性和唯一性条件, 故状态方程中要求不含有输入变量的导数。在以后分析中可看到, 许多实际系统的微分方程中的确存在输入导数项, 但可通过状态变量的适当选取, 使状态方程中不出现输入变量的导数。

输出方程 系统输出量与状态变量、输入变量关系的数学表达式称输出方程。单输出定常连续系统的输出方程一般形式为:

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \quad (1-3)$$

式中常系数 $c_1, \dots, c_n, d$ 与系统特性有关。输出方程是一个代数方程, 可写成向量矩阵形式:

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t) \quad (1-4)$$

式中 $c=[c_1, c_2, \dots, c_n]$ 为输出矩阵 (在此为行矩阵), d 为直接联系输入量、输出量的前向传递 (前馈) 系数。

状态空间表达式 状态方程与输出方程的组合称状态空间表达式, 又称动态方程。

状态空间分析法 在状态空间中以状态向量或状态变量描述系统的方法称状态空间分析法或状态变量法。它具有如下优越性: 便于在数字机上求解; 便于采用向量矩阵记号简化数学描述; 容易考虑初始条件; 能了解系统内部状态的变化特性; 可适用于描述时变、非线性、离散、随机、多变量等各类系统; 便于应用现代设计方法实现最优控制、自适应控制等。

例1-1 设 RLC 网络如图 1-1 所示, 试列写电路方程; 选择几组状态变量, 建立对应的状态空间表达式; 并对状态变量之间的关系进行讨论。

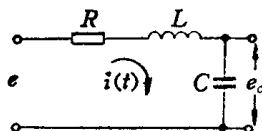


图1-1 RLC 网络

解 据电路定律列出方程:

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad (1)$$

电路输出量 $y(t)$ 为:

$$y(t) = e_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (2)$$

设状态变量为:

$$x_1 = i(t), \quad x_2 = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

则状态方程为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} e \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C} x_1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

输出方程为:

$$y = x_2 \quad (4)$$

写成向量矩阵形式:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e \\ y &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

状态空间表达式简记为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + be \\ y &= cx \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 1]$$

若设状态变量为: $x_1 = i(t)$, $x_2 = \int i(t) dt$

则状态方程为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}e \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

输出方程为: $y = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} x_2 \quad (8)$

写成向量矩阵形式:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

又若设状态变量为: $x_1 = \frac{1}{C} \int i(t) dt + R i(t)$, $x_2 = \frac{1}{C} \int i(t) dt$

则 $x_1 = x_2 + R i(t)$, $L \frac{di}{dt} = -x_1 + e$

故状态方程为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_2 + R \dot{i} = \frac{1}{RC}(x_1 - x_2) + \frac{R}{L}(-x_1 + e) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C} i = \frac{1}{RC}(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

输出方程为: $y = x_2 \quad (11)$

写成向量矩阵形式:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \\ 1 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

可以看出, 所选状态变量不同, 状态空间表达式是不同的, 但它们都描述了同一系统。

下面来研究两组状态变量之间的关系。设 $x_1 = i(t)$, $x_2 = \frac{1}{C} \int i(t) dt$,

$\bar{x}_1 = i(t)$, $\bar{x}_2 = \int i(t) dt$, 则有:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 \\ x_2 &= \frac{1}{C} \bar{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

写成向量矩阵形式:

$$\dot{x} = P\bar{x}$$

⑭

式中

$$x = [x_1, x_2]^T; \quad \bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T; \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

上式说明, 经满秩线性变换矩阵 P 的变换, 可将状态变量 x_1, x_2 变换为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 。若取任意满秩的 P 阵, 便可变换出无穷多组状态变量, 这进一步证实了状态变量的非唯一性, 但通常毕竟仍选容易测量的量作为状态变量。

第二节 定常连续系统状态空间表达式的建立(标准形最小实现问题)

这里所研究的不是根据物理、化学基本定律或试验方法来建立状态方程、输出方程问题, 而是已知系统高阶微分方程或传递函数如何来导出状态方程、输出方程的问题, 常称为实现问题, 借以了解系统的内部结构、内部状态, 便于用模拟计算机或数字计算机排队实现, 以致构成硬件系统。

由于选择不同状态变量会得出不同的状态方程和输出方程, 故实现方法便有多种, 但是导出某些标准形式的实现方法有很大意义, 因为它们能揭示出系统的重要的结构特性(如可控性、可观测性、极点分布等), 便于对系统进行理论分析及工程应用。

从传递函数的结构组成来看, 传递函数存在零、极点对消(传递函数分子分母可约)及不存在零、极点对消(传递函数分子分母不可约)两种情况, 它们虽在输入至输出的外部特性上相同, 但它们隐含着不同的内部结构性质。我们研究传递函数的实现时, 从不可约传递函数的实现入手, 因为这类传递函数既代表了一类基本的系统, 又足以揭示出系统的基本结构特性, 并且在实现时所用的积分器数目最少, 是实现问题中最基本但是最重要的情况。至于可约传递函数的实现, 所采用的实现方法也是相同的, 至于实现中所揭示的系统内部特性, 我们将在第二章进行专门研究。通常把不可约传递函数的实现称为最小实现, 这是从输入-输出特性相同的意义上来说的, 因为这时其特征方程的阶次最低, 状态变量的数目最少, 各个矩阵的维数最小, 排队或构造硬件系统时所需积分器个数最少, 故下面所讨论的都是最小实现问题, 并分别对单输入-单输出系统和多输入-多输出系统进行研究。

一、单输入-单输出系统

设单输入-单输出线性定常连续系统的微分方程具有如下一般形式:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y \\ = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中 y 为输出量, u 为输入量; $a_{n-1}, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0$ 是表征系统的常系数。

对应的传递函数为:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (1-6)$$

应用综合除法分解为:

$$G(s) = b_n + \frac{\beta_{n-1} s^{n-1} + \beta_{n-2} s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} = b_n + \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1-7)$$

式中 b_n 为直接联系输入、输出量的前馈系数；当 $G(s)$ 分母阶数大于分子阶数时， $b_n = 0$ 。 $N(s)/D(s)$ 为严格有理真分式，其分母阶数大于分子阶数，其系数对应为：

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= b_0 - a_0 b_n \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 b_n \\ &\vdots \\ \beta_{n-2} &= b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

我们可集中考虑严格有理真分式 $N(s)/D(s)$ 的实现问题，因若存在 b_n 时，只需在输入、输出量之间增加一条前馈通道，即在输出量中增加一项 $b_n u$ 即可。

$N(s)/D(s)$ 的实现方法有多种，下面来分别介绍。

(一) $N(s)/D(s)$ 的可控标准形实现

将 $N(s)/D(s)$ 分解为如下两部分相串联，并引入中间变量 $z(s)$ ，见图 1-2。

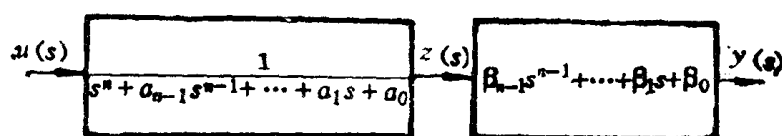


图1-2 $N(s)/D(s)$ 的串联分解

$z(t)$ 、 $y(t)$ 满足下列微分方程：

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{z} + a_0z = u \quad (1-9)$$

$$y = \beta_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + \beta_1\dot{z} + \beta_0z \quad (1-10)$$

可定义如下一组状态变量：

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad x_3 = \ddot{z}, \quad \dots, \quad x_n = z^{(n-1)} \quad (1-11)$$

则状态方程为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0z - a_1\dot{z} - \dots - a_{n-1}z^{(n-1)} + u = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

写成向量矩阵形式

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (1-13)$$

式中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

输出方程为：

$$y = \beta_0x_1 + \beta_1x_2 + \dots + \beta_{n-1}x_n \quad (1-15)$$

写成向量矩阵形式：

$$y = cx \quad (1-16)$$

式中

$$\mathbf{c} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}] \quad (1-17)$$

若状态方程中的 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 矩阵形如式 (1-14)，则称为可控标准形实现。

输出矩阵 $\mathbf{c}$ 是 $(1 \times n)$ 维矩阵，其元素是按顺序排列的传递函数分子的系数。当 $\beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$ 时， $N(s) = \beta_0$ ， $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 形式不变，唯 $\mathbf{c} = [\beta_0, 0, \dots, 0]$ 。

当 $G(s) = b_n + [N(s)/D(s)]$ 时， $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 形式不变，唯 $y = \mathbf{c}\mathbf{x} + b_n u$ 。

熟知以上规则，可对任意传递函数（或微分方程）直接写出可控标准形实现。

状态空间表达式可用状态变量图来图解地表示。状态变量图中只包含积分器、比例器、加法器三种基本元件及一些连接线，它是一种特殊形式的结构图或信号流图。根据式 (1-12)、(1-15) 可绘出可控标准形实现的状态变量图，见图 1-3。

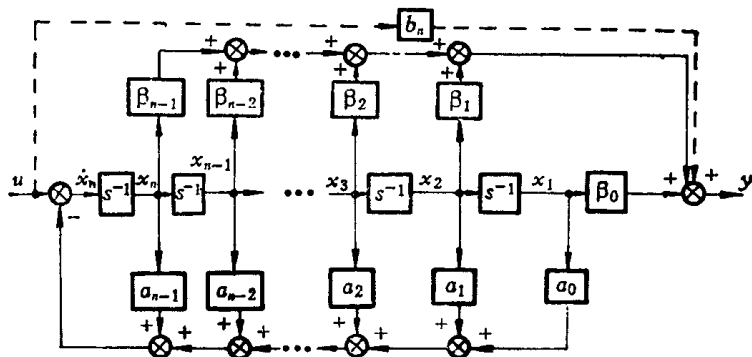


图1-3 可控标准形实现状态变量图

状态变量图不但是一种表示状态空间表达式的方法，还是一种直接用来根据传递函数确定状态变量、列写状态空间表达式的方法。当 $N(s)/D(s)$ 具有式 (1-7) 所示的一般形式时，将 $D(s)$ 中的公因子 s^n 提出，于是有：

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{-1} + \beta_{n-2}s^{-2} + \dots + \beta_1s^{-(n-1)} + \beta_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + a_{n-2}s^{-2} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n}} \quad (1-18)$$

与梅逊增益公式的分母相比较，可知该传递函数所描述的系统含有 n 个独立回路，其增益分别为 $a_{n-1}s^{-1}$ ， $\dots$ ， a_0s^{-n} ，且各回路均互相接触；与梅逊增益公式的分子相比较，可知含有 n 条前向通路，其增益分别为 $\beta_{n-1}s^{-1}$ ， $\dots$ ， β_0s^{-n} ，且每条前向通路与 n 个回路都互相接触。这里所谓的接触是指在信号流图中的回路、通路间至少含有一个公共的节点，或者在状态变量图中指含有公共的引出点或综合点或传递部分。据以上分析，构成可控标准形实现的状态变量图的具体方法如下：

(1) 将输入量 u 置于左端，输出量 y 置于右端，将 n 个积分器自左至右逐个排列在前向通路中，积分器依次输出状态变量 $x_n, \dots, x_1$ ；

(2) 将传递函数分母诸系数置于负反馈通路，对应 $x_n, \dots, x_1$ 依次经系数 $a_{n-1}, \dots, a_0$ 与 u 综合为 $\dot{x}_n$ ；

(3) 将传递函数分子诸系数置于前向通路，对应 $x_n, \dots, x_1$ 依次经系数 $\beta_{n-1}, \dots, \beta_0$ 综合为 y ，便可绘出图 1-3。图中虚线表示存在 b_n 时应有的一条前馈通道。

状态变量图中，每个积分器的输出都是状态变量，每个积分器的输入都是状态变量的导数，每个积分器的输入-输出关系，以及输入端的综合关系，都表出一个状态方程，输出量为状态变量以及输入量（若存在 b_n ）的线性组合。