

— 高等学校教材 —

画法几何

(1965 年刪訂本)

大連工学院工程画教研室編

高等教育出版社



何 几 法 画

(1965 年刪訂本)

大連工学院工程画教研室編

高 等 教 育 出 版 社

本书系大连工学院工程画教研室編“画法几何学”(人民教育出版社1963年第二版)一书的刪訂本。主要是对第二版作了必要的刪减,压缩了篇幅,突出了主干内容。

本书包括緒論、正投影法的建立、直綫、平面、投影变换、曲綫与曲面、几何体的表示法、平面与立体相交、两立体相交、立体的表面展开及軸測投影图等十一章。

本书可作为高等工业学校机械类各专业的試用教科书。

本书曾經高等工业学校画法几何及制图課程教材編审委员会褚士荃委員审閱。

画 法 几 何

(1965年刪訂本)

大连工学院工程画教研室編

北京市书刊出版业营业許可証出字第119号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

上海市印刷五厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K15010·1178 开本 787×1092 $\frac{1}{16}$ 。印张 5 $\frac{2}{5}$ 。

字数 107,000 印数 0,001—5,500 定价(7) ¥0.55

1965年7月第1版 1965年7月上海第1次印刷

1965 年刪訂本序

近年來，全國各高等工業學校深入貫徹了黨的教育方針，在教學上進一步貫徹了“少而精”的原則，就本門課程的內容和教法上都作了不少改進。顯然，本書的 1963 年第二版已遠不能滿足當前教學的需要，有進一步修訂的必要。但由於我們領會毛主席的教育思想不深，且尚無足夠的教學改革的實踐基礎，目前只能暫時保持原書體系不變，而刪去其中一部分內容，以克服原書篇幅過多的缺點，刪訂付印，解決有無問題。

這次刪訂，仍以 1962 年審訂的高等工業學校機械类专业適用的“画法几何及机械制图教學大綱(試行草案)”為基礎，進一步明確了画法几何的任務主要是為機械制圖服務，為機械制圖提供理論基礎，并把研究圖示法作為主要任務。

與第二版相比，主要的刪減情況為：正投影法只要第一角；刪去直角三角形法求綫段實長；刪去一般位置平面的迹綫表示法；刪去直綫與平面平行、兩平面平行及綫、面相對位置的綜合性問題；刪去繞平行軸旋轉法，只要繞垂直軸旋轉求綫段實長；平面與立體相交，只要特殊位置平面；刪去直綫與立體相交；刪去平面立體與曲面立體相貫；軸測投影的參數不加推導。

本書共分十一章。

第一、二章，介紹画法几何的任務、投影法及建立正投影法。

第三、四、六、七章，主要討論直綫、平面、曲綫、曲面及立體的圖示法。這四章是本書的核心內容。

第八、九章，平面與立體相交及兩立體相交。這部分內容有利於培養學生對形體的微觀分析能力，對提高畫圖及讀圖能力有直接關係。雖屬圖解法，但仍作主要內容處理。

第五章，投影變換。包括更換投影面法和求綫段實長的旋轉法。它們是画法几何中較典型和較為實用的圖解法。建議試行放在第七章或第九章以後講，使第三、四、六、七諸章一氣呵成，或有利於突出圖示法這一主要內容。

第十章，立體的表面展開。由於某些专业僅需作一般介紹，故全章用小號字排印。

第十一章，軸測投影圖。

由於我們對黨的方針政策學習不夠，總結經驗也不夠，內容取舍不當及錯誤之處可能還有很多。請廣大讀者及老師們批評指正。

大連工學院工程畫教研室

1965 年 3 月

目 录

1965年删订本序	iv	第六章 曲线与曲面	37
第一章 绪论	1	§ 6-1. 曲线	37
§ 1-1. 画法几何的任务	1	§ 6-2. 曲面	39
§ 1-2. 关于投影法的基本概念	1	复习题	43
第二章 正投影法的建立	4	第七章 几何体的表示法	44
§ 2-1. 两投影面体系中中点的投影	4	§ 7-1. 平面立体的表示法	44
§ 2-2. 三投影面体系中中点的投影	5	§ 7-2. 曲面立体的表示法	45
复习题	7	复习题	49
第三章 直线	8	第八章 平面与立体相交	51
§ 3-1. 直线的投影	8	§ 8-1. 平面与平面立体相交	51
§ 3-2. 特殊位置的直线	8	§ 8-2. 平面与曲面立体相交	52
§ 3-3. 直线与点的相对位置·分割线段成定比	10	复习题	57
§ 3-4. 两直线的相对位置	11	第九章 两立体相交	58
复习题	14	§ 9-1. 两平面立体相交	58
第四章 平面	15	§ 9-2. 两曲面立体相交	59
§ 4-1. 平面的表示法	15	复习题	65
§ 4-2. 在平面上取点和直线	16	第十章 立体的表面展开	67
§ 4-3. 特殊位置的平面	18	第十一章 轴测投影图	72
§ 4-4. 直线与平面的交点及两平面的交线	21	§ 11-1. 概述	72
§ 4-5. 一边平行于投影面的直角的投影·直线与平面垂直	24	§ 11-2. 正轴测投影图	73
复习题	26	§ 11-3. 斜轴测投影图	77
第五章 投影变换	28	复习题	79
§ 5-1. 更换投影面法	28	附录	81
§ 5-2. 旋转法求线段实长	34	一、椭圆的画法	81
复习题	35	二、椭圆的近似画法——四心扁圆法	81

第一章 緒論

§ 1-1. 画法几何的任务

凡是建筑物和机器,都必须按照图样进行建造。在任何工程技术部門中,图样都是最重要的技术文件之一。

“画法几何及机械制图”是一門以实践为主的課程,它培养学生制图和讀图的能力。画法几何部分的任务主要为机械制图服务,为机械制图提供理論基础。

画法几何的研究对象:第一,它研究空間的各种几何要素(点、綫、面)和空間的物体在平面上的表示方法;第二,它研究在平面上用几何作图的方法来解决空間的几何問題。所以,画法几何是研究空間形体的图示法和空間几何問題图解法的学科。

图示法是机械制图的主要理論基础,因此本书以图示法为主要研究对象,而对图解法只作一般的介紹。

在学习图示法和图解法的过程中,能逐步提高和发展空間想象力。因此应该注意培养这方面的能力,作为学习画法几何的附带任务。

§ 1-2. 关于投影法的基本概念

1. 画法几何的基础是投影法。投影法通常分为两大类,即中心投影法和平行投影法。

設在空間有定平面 P 和不在該平面上的定点 S (图 1-1)。另外任取一点 A ,连接 SA 并延长之,使交平面 P 于一点 a 。我們称:点 a 为空間点 A 在平面 P 上的中心投影;点 S 为投影中心,平面 P 为投影面,直綫 SA 为投影綫。这种投影法称为中心投影法。

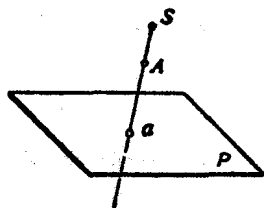


图 1-1

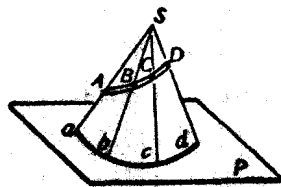


图 1-2

綫可以看作点的集合。为了求出曲綫 $ABCD$ 的中心投影(图 1-2),可先取属于此綫上的一系列点,并按上述方法一一求出其投影 a, b, c, d 各点;然后依次连接 $abcd$,即得所求曲綫的中心投影。

如果設想把图 1-2 中的 S 点移至无穷远处,显然,所有投影綫 $SA, SB, \dots$ 将趋于平行,如图 1-3 所示。这些平行的投影綫与投影面 P 的交綫 $abcd$ 就称为曲綫 $ABCD$ 的平行投影。当投影綫都是相互平行时,这种投影法称为平行投影法。

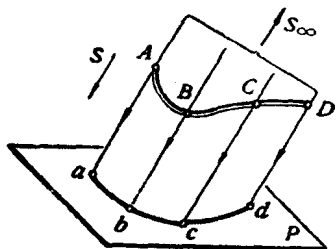
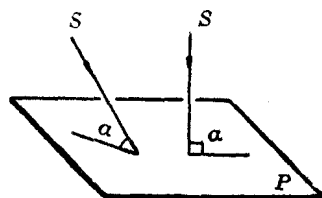


图 1-3



斜投影法 直角投影法
 $\alpha \neq 90^\circ$ $\alpha = 90^\circ$

图 1-4

平行投影法按投射方向又可分为直角投影法和斜投影法两种。投射方向垂直于投影面 P 的称为直角投影法，不垂直的统称为斜投影法，如图 1-4 所示。

2. 投影法研究空间各种几何要素(点、线、面)经过投影后保留不变的几何特性。这些不变的特性就是画法几何用来进行作图的依据。

首先，指出对中心投影法和平行投影法都存在的两个基本投影特性：

(1) 直线的投影仍为直线，特殊情况成为一点。如图 1-5，直线 AB 在以点 S 为中心、平面 P 为投影面的条件下，其投影 ab 仍为直线。但当 S 、 C 和 D 三点共线时，直线 CD 的投影 cd 积聚于一点。又从图 1-6 来看，在平行投影法的条件下上述特性也是存在的。

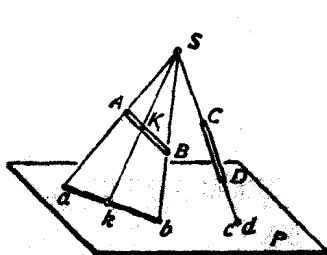


图 1-5

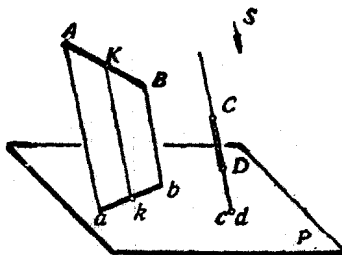


图 1-6

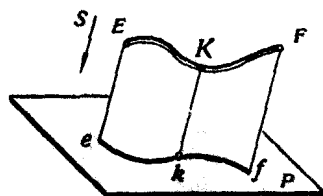


图 1-7

(2) 设一点在某条线上，则点的投影必定在该线的投影上。如图 1-5 和 1-6，点 K 是直线 AB 上的点，那末点 K 的投影 k 必在直线 AB 的投影 ab 上。当点 K 在一条曲线上时，结果也是一样，如图 1-7 所示。

其次，指出仅仅对平行投影法才存在的一些投影特性：

(1) 一直线上两线段之比等于其投影之比。如图 1-8，设点 A 、 K 、 B 都在直线 AB 上，其投影为 a 、 k 、 b ，则 $AK:KB = ak:kb$ 。

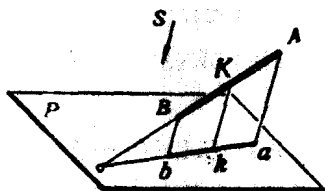


图 1-8

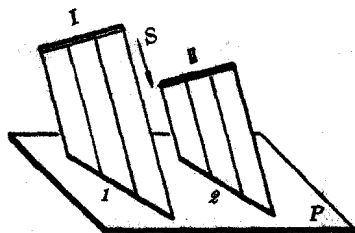


图 1-9

(2) 两平行直线的投影, 仍互相平行。如图 1-9, 设平行两直线 I 和 II , 则它们的投影 I' 和 II' 仍互相平行。

所有上述投影特性都可用初等几何的知识得到证明。

事实上, 上述特性只说明了有可能利用这些投影特性来进行作图。这仅仅是从空间到平面的问题, 而更基本和更重要的是从平面到空间的问题, 即能否根据投影所得的平面图样确定其对应的空间几何要素间的几何关系呢? 下面就来讨论这个问题。

3. 从图 1-1 可以看出: 一个空间点具有唯一确定的投影。因为每一条确定的投射线与给定的投影面只能交于一点。

现在反过来研究。设在给定投影面及投影中心(或投影方向)的条件下, 求出空间一点 A 的投影为 a , 然后移去点 A , 如图 1-10。试问是否可以从点 S 和 a 重新确定点 A 的原位置呢? 显然在直线 Sa 上的一切点, 如图 1-11 中点 $A_1, A_2, \dots$ 等, 都有同一的投影 a 。因此得不到肯定的答案, 这样就得出按照点的一个投影不能确定该点的空间位置的结论。

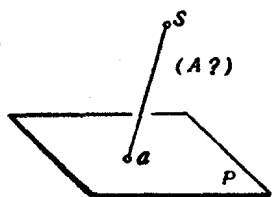


图 1-10

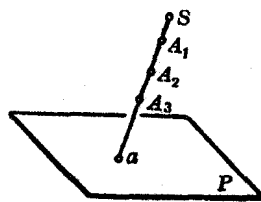


图 1-11

任何几何体都可看作某些点的集合。根据上述结论, 仅有几何体的一个投影, 还不能确定该几何体的真实形状。如图 1-12, a 投影面 P 上是几何体 I 的投影图。但这个投影图所对应的空间几何体是不确定的(图 1-12, b)。它所表示的可能是 I , 可能是 II , 也可能是其他形状的几何体。

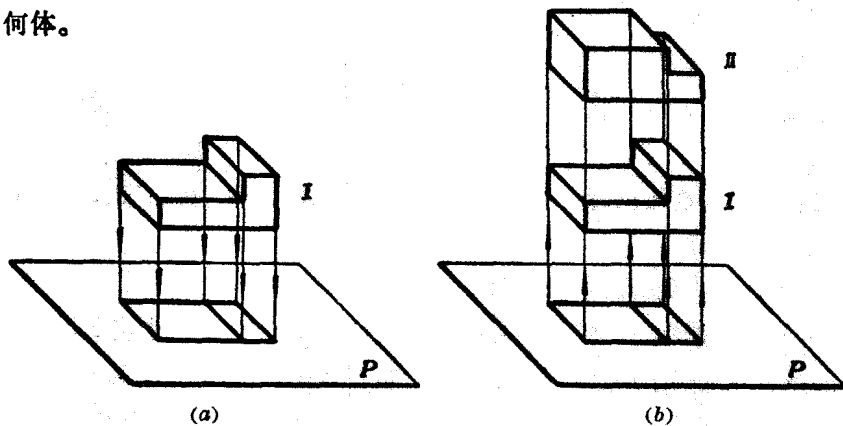


图 1-12

因此, 要使一张投影图能确切表示空间唯一的几何形体, 还须引入一定条件。

附加的条件可以是各种形式的。由于附加条件形式的不同, 构成各种不同的图示法。根据机械工程的实际需要, 最常用的图示方法有正投影法和轴测投影法两种。后续各章均讨论正投影法, 最后一章讨论轴测投影法。

第二章 正投影法的建立

上章已提出,按照几何形体的一个投影不能确定该形体的空间位置及形状。正投影法便是采用相互垂直的两个或两个以上投影面,在每个投影面上用直角投影法获得几何形体的投影。由这些投影便能完全确定该形体的位置和形状。

一切几何形体都可看作某些点的集合。所以下面仍先以点来说明正投影法的建立及其基本原理。

§ 2-1. 两投影面体系中点的投影

两投影面体系是由互相垂直的水平投影面 H 和 正立投影面 V 组成(图 2-1)。它们的交线 OX 称为投影轴。

用直角投影法由空间一点 A , 分别引垂直于投影面 H 和 V 的投射线 Aa 和 Aa' , 得到水平投影 a 和正面投影 a' ①。若移去点 A , 从投影 a 及 a' 完全可以确定点 A 的原来位置。

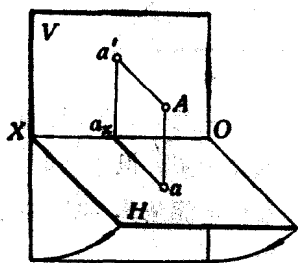
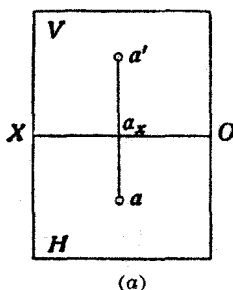
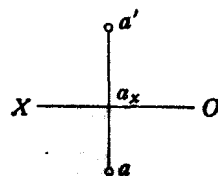


图 2-1



(a)



(b)

图 2-2

为使两个投影 a 和 a' 画在同一平面(图纸)上, 规定将 H 面绕 OX 轴按图示箭头方向旋转 90° , 使与 V 面重合。这样就得到如图 2-2, a 所示点 A 的正投影图。根据这种投影图足以想象出点 A 在空间的确定位置。投影面可以认为是无限大的, 通常在投影图上不画出 H 和 V 面的范围(图 2-2, b)。

由上两图, 可以得出投影图上的下列规律:

(1) 一点的水平投影和正面投影的连线垂直于 OX 轴。因为投射线 Aa 和 Aa' 构成了一个平面 $Aaa'a'$, 它垂直于 H 面, 交线为 aa_x ; 它也垂直于 V 面, 交线为 $a'a_x$ 。显然, 平面 $Aaa'a' \perp OX$, $a'a_x \perp OX$ 和 $aa_x \perp OX$ 。当 a 跟着 H 面旋转而重合于 V 面时, $aa_x \perp OX$ 的关系不变。因此投影图上的 a, a_x, a' 三点共线, 且 $aa' \perp OX$ 。

(2) 一点的水平投影到 OX 轴的距离(aa_x)反映了该点到 V 面的距离(Aa'); 其正面投影

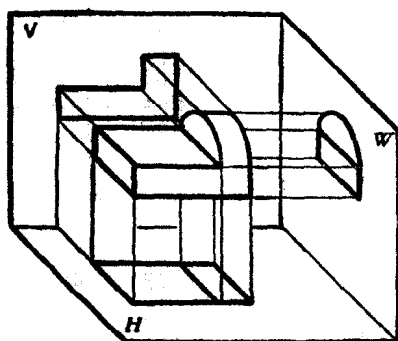
① 本书关于空间点及其投影的标记: 空间点用大写字母, 例如 $A, B, C, \dots$ 等; 水平投影用相应的小写字母, 如 $a, b, c, \dots$ 等; 正面投影用相应的小写字母加一撇, 如 $a', b', c', \dots$ 等。

到 OX 轴的距离($a'a_x$)反映了该点到 H 面的距离(Aa)。

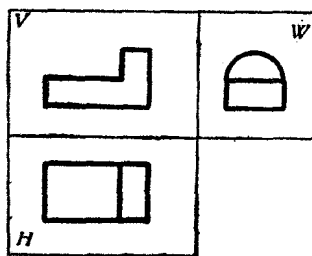
因为 Aaa_xa' 是一个矩形, 因此得到 $aa_x = Aa'$ 和 $a'a_x = Aa$ 。

§ 2-2. 三投影面体系中点的投影

1. 由上节可知, 一点的两个投影已能确定该点的空间位置。但为更清楚地表达某些几何形体, 还须采用三面投影图。例如图 2-3 所示几何体的投影图中, 若不标注符号或不加说明, 则根据 H 和 V 面上的两个投影, 还不能完全肯定该几何体的形状。若画出其第三面投影。由三个投影便能确定其形状了。



(a)



(b)

图 2-3

2. 三投影面体系, 是在 H 、 V 两投影面的基础上, 加入与它们都垂直的侧立投影面 W 而构成(图 2-4)。 W 面与原两投影面分别交于投影轴 OY 和 OZ 。三投影轴交于一点 O 。

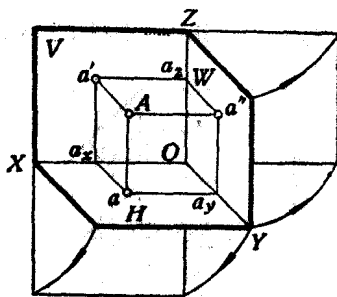


图 2-4

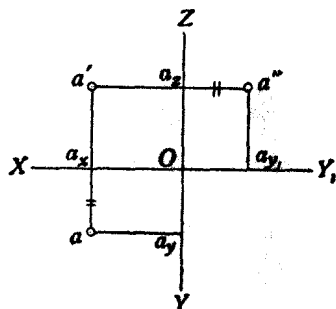


图 2-5

由点 A 引垂直于 W 面的投射綫 Aa'' , 得到侧面投影 a'' ①。继将 H 和 W 面按图示箭头方向分别绕 OX 和 OZ 轴旋轉(H 向下, W 向右), 使都重合于 V 面, 就得到点 A 的三面投影图(图 2-5)。应该注意, 投影轴 OY 旋轉后, 在投影图上表现为 OY 轴及 OY_1 轴两处。设想 OY 是随 H 面重合到 V 面上的, 而 OY_1 是随 W 面重合到 V 面上的。

点的三面投影图有下列规律:

(1) 一点的水平投影和正面投影的連綫垂直于 OX 轴。即 $aa' \perp OX$ 。这在上节已证得。

① 今后点的侧面投影均用相应的小写字母加两撇表示。

(2) 一点的正面投影和侧面投影的连线垂直于 OZ 轴。即 $a'a'' \perp OZ$ 。由于 V 面与 W 面的关系相当 V 面与 H 面的关系, 故证法同上。

(3) 一点的水平投影到 OX 轴的距离 (aa_x) 等于侧面投影到 OZ 轴的距离 ($a''a_z$), 同时反映了点到 V 面的距离。即 $aa_x = a''a_z$ 。为使作图时便于实现这个关系, 可自点 O 向右下方作 45° 的辅助线, 如图 2-6 所示。

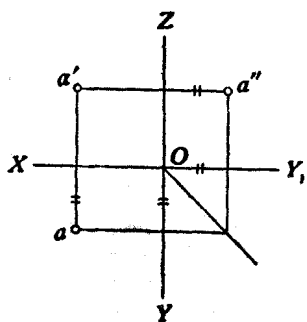


图 2-6

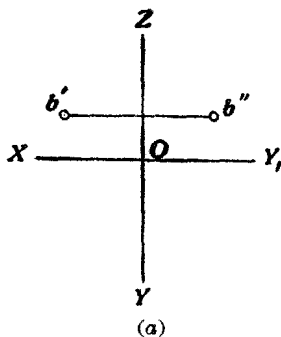
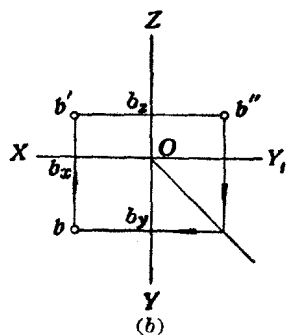


图 2-7



对一点来说, 三个投影既有上述相互关系, 则根据其中任二投影, 便能求出唯一的第三投影来。这也再一次说明, 点的两个投影是完全可以确定该点的空间位置的。

例 2-1. 已知点 B 的正面投影 b' 及侧面投影 b'' , 试求其水平投影 b (图 2-7, a)。

解: 由于 b 与 b' 的连线一定垂直于 OX 轴, 所以 b 一定在过 b' 而垂直于 OX 轴的直线上。由于 b 至 OX 轴的距离必等于 b'' 至 OZ 轴的距离, 故取 bb_x 等于 $b''b_z$, 便定出了 b 的位置。作图过程见图 2-7, b。

例 2-2. 已知 A, B 两点的投影图, 试判断该两点在空间的相对位置 (图 2-8, a)。

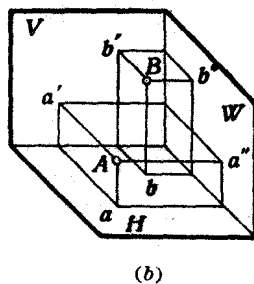
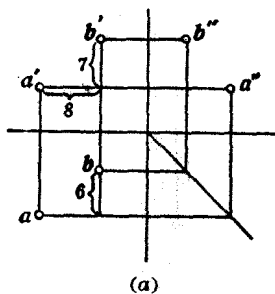
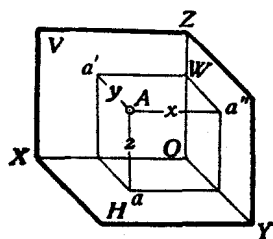


图 2-8

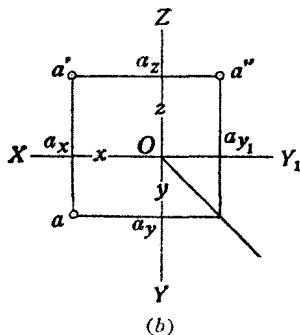
解: 由正面投影或水平投影均可定出点 A 在点 B 的左方 8 毫米。正面投影反映点至水平投影面的距离, 可定出点 A 比点 B 低 7 毫米。水平投影反映点至正立投影面的距离, 可定出点 A 在点 B 的前方 6 毫米。从侧面投影同样可以定出两点的高低及前后位置。图 2-8, b 是它们的直观图。

3. 点的三面投影和直角坐标: 若将三投影面体系当作笛卡尔直角坐标系, 以点 O 为原点, 投影轴为坐标轴。则空间一点 A 至三个投影面的距离可以用直角坐标 (x, y, z) 表示 (图 2-9, a)。在投影图上, 也可用坐标 (x, y, z) 定出三投影 (a, a', a'') 的位置 (图 2-9, b)。其对应关系如下:

$$\begin{aligned}x &= Aa'' = aa_y = a'a_z; \\y &= Aa' = aa_x = a''a_z; \\z &= Aa = a'a_x = a''a_y.\end{aligned}$$



(a)



(b)

图 2-9

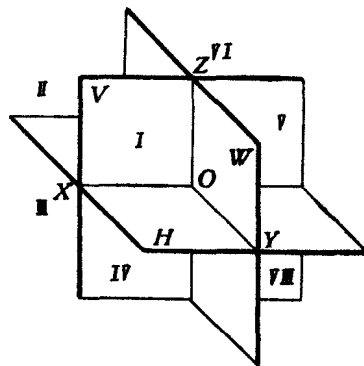


图 2-10

4. 由于设定了三面体系，可以设想把整个空间划分为八个角。通常以图 2-10 所示次序称呼之。国际上常用第一角和第七角(通称第三角)的位置取得物体的投影图。我国采用第一角。故本书均讨论第一角位置的投影图。

复 习 题

1. 证明在投影图上一点的两个投影的连线必定垂直于投影轴。
2. 已知 A、B 两点的投影图(图 2-11)。问该两点上下、前后和左右相差距离各多少？

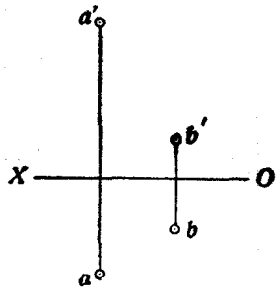


图 2-11

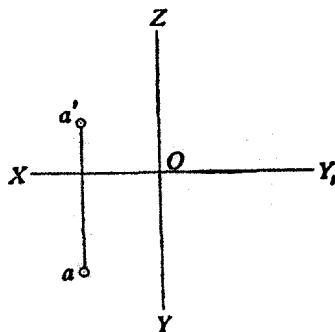


图 2-12

3. 已知点 A 的两面投影(图 2-12)，并知点 B 在点 A 的正上方 15 mm 处。试作全这两点的三面投影图。

第三章 直線

§ 3-1. 直線的投影

我們知道，直線的位置可由該直線上任意兩點來確定。緒論中已提出了直線投影的一個基本特性，即：直線的投影仍是直線。因此直線的投影可由直線上任意兩點的投影來決定。假如已知直線 AB 上 A 和 B 兩點的三面投影圖，如圖 3-1, a 。則引直線連接兩點的同名投影，即連 ab 、 $a'b'$ 和 $a''b''$ ，就得到直線 AB 的水平投影、正面投影和側面投影(圖 3-1, b)。

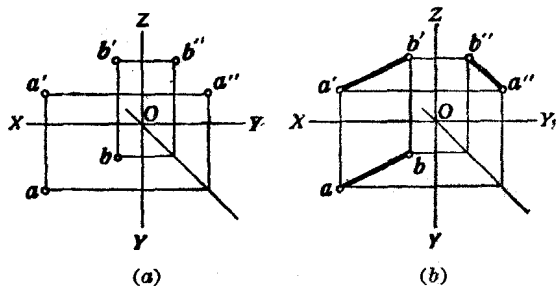


圖 3-1

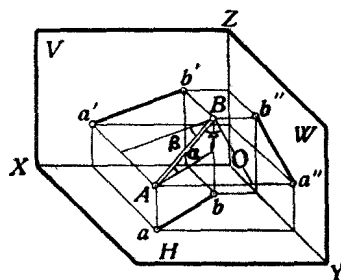


圖 3-2

從圖 3-1 可以看出： A 和 B 兩點對每個投影面的距離都不相等，因此直線 AB 不平行於任何投影面。這種直線稱為一般位置直線。

設某條一般位置直線與 H 、 V 、 W 三投影面所成角度分別用 α 、 β 、 γ ^① 表示(圖 3-2)。按直線與平面所成角度的定義^② 可知：

$$\cos \alpha = \frac{ab}{AB}, \text{ 即 } ab = AB \cos \alpha;$$

$$\cos \beta = \frac{a'b'}{AB}, \text{ 即 } a'b' = AB \cos \beta;$$

$$\cos \gamma = \frac{a''b''}{AB}, \text{ 即 } a''b'' = AB \cos \gamma.$$

由上列關係式可以作出結論：一般位置線段的三個投影都小於線段本身的實長，因為 α 、 β 、 γ 都不為 0。根據線段的投影圖求線段的實長問題在 § 5-2 中討論。

§ 3-2. 特殊位置的直線

直線與投影面的相對位置，可以分為三類：(1)一般位置直線；(2)平行於一個投影面的直線；(3)垂直於一個投影面的直線。後面兩類統稱為特殊位置的直線，本節分別分析這兩

① 以後如不加說明， α 、 β 、 γ 分別表示一般位置直線與 H 、 V 、 W 三投影面所成的角度。

② 直線和它在已知平面上的投影所成的銳角，叫做此直線和該平面的夾角。

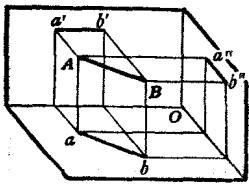
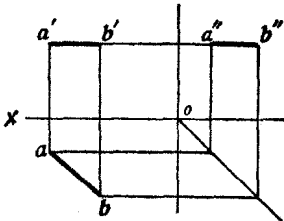
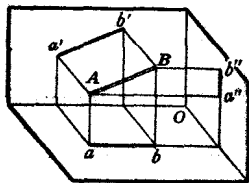
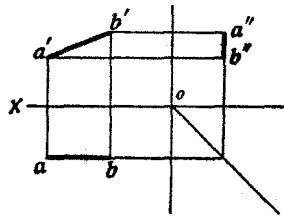
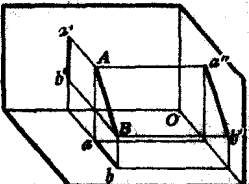
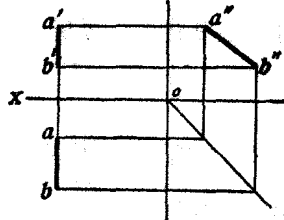
类直线的投影特性。

1. 平行于一个投影面的直线，统称为投影面平行线。平行于 H 面的称为水平线；平行于 V 面的称为正平线；平行于 W 面的称为侧平线。

以水平线为例，按定义该直线平行于 H 面，因此它与 H 面的角度 $\alpha=0$ ，且线上任何点与 H 面的距离都相同。这就决定了它的投影具有下列特性(参看表 3-1)：

- (1) 正面投影平行于 OX 轴，即 $a'b' \parallel OX$ ；
- (2) 水平投影反映线段实长，即 $ab = AB$ 。

表 3-1

直线的位置	直线在空间的位置	投影图	特 性
平行于 H 平面 (水平线)			① $a'b' \parallel OX$ ② $ab = AB$
平行于 V 平面 (正平线)			① $ab \parallel OX$ ② $a'b' = AB$
平行于 W 平面 (侧平线)			① $a'b' \perp OX$ $ab \perp OX$ ② $a''b'' = AB$

对于正平线和侧平线也可作同样分析而得到类似的特性。读者可参照表 3-1 自己进行分析。

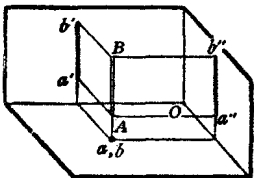
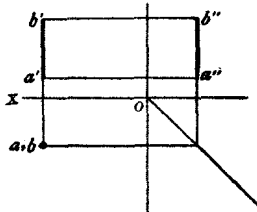
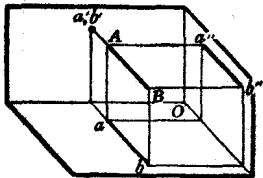
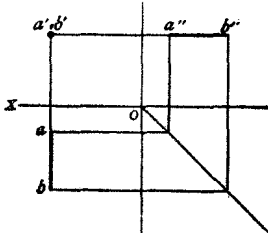
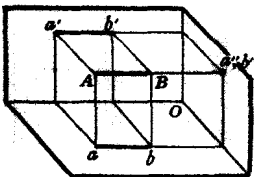
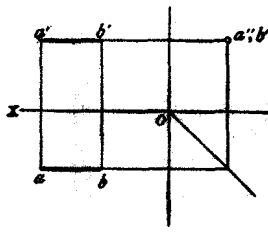
2. 垂直于一个投影面的直线统称为投射线。垂直于 H 面的称为铅射线；垂直于 V 面的称为正射线；垂直于 W 面的称为侧射线。

以铅射线为例，按定义它既垂直于 H 面，同时又平行于 V 面和 W 面，因此是正平线和侧平线的特例。它的投影具有下列特性(参看表 3-2)：

- (1) 水平投影 ab 积聚为一点；
- (2) 正面投影和侧面投影分别垂直相应的投影轴，即 $a'b' \perp OX$ 和 $a''b'' \perp OY_1$ ；

(3) 正面投影和側面投影反映綫段實長, 即 $a'b' = AB$ 和 $a''b'' = AB$ 。

表 3-2

直綫的位置	直綫在空間的位置	投 影 圖	特 性
垂直于 H 平面 (鉛射綫)			① ab 积聚成一點 ② $a'b' \perp OX$ $a''b'' \perp OY_1$ ③ $a'b' = a''b'' = AB$
垂直于 V 平面 (正射綫)			① $a'b'$ 积聚成一點 ② $ab \perp OX$ $a''b'' \perp OZ$ ③ $ab = a''b'' = AB$
垂直于 W 平面 (側射綫)			① $a''b''$ 积聚成一點 ② $ab \perp OY$ $a'b' \perp OZ$ ③ $ab = a'b' = AB$

對於正射綫和側射綫也可作同樣分析而得到類似的特性。讀者可參照表 3-2 自己進行分析。

§ 3-3. 直綫與點的相對位置 · 分割綫段成定比

1. 直綫與點的相對位置分為：點在直綫上和點不在直綫上兩種情況。

從 § 1-2 提出的基本特性，容易得到結論：點在直綫上，則點的各投影必定都在該直綫的同名投影上。反過來，點的各投影都在直綫的同名投影上，則該點一定在直綫上。

圖 3-3 中，點 A 的水平投影 a 在直綫 BC 的水平投影 bc 上，正面投影 a' 在直綫的正面投影 $b'c'$ 上 ($aa' \perp OX$)，因此點 A 在直綫 BC 上。而點 E 只有水平投影 e 在直綫 BC 的水平投影 bc 上，因此點 E 不在直綫 BC 上。(請讀者想出點 E 與直綫 BC 在空間的相對位置。)

點是否在直綫上，一般只要觀察兩面投影就可確定。但在圖 3-4 所示側平綫的情況下，單靠兩面投影就不能直接觀察決定了。這時，決定點 K 是否在直綫 AB 上，取決於它們的側面投影。如圖 3-4, b ，雖然 k 在 ab 上， k' 在 $a'b'$ 上，但 k'' 不在 $a''b''$ 上，因此，點 K 不在直綫 AB 上。

現在我們研究，圖 3-3 和 3-4 兩種情況的主要區別。前者， BC 是一般位置直綫(圖 3-5)，凡是有正面

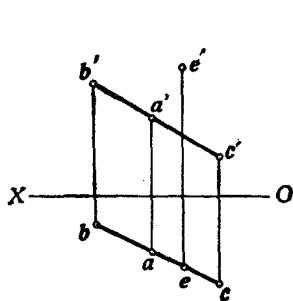
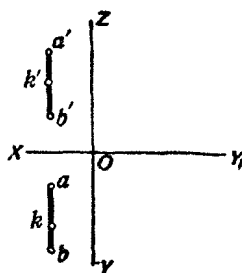
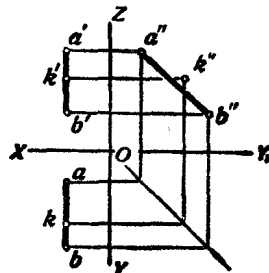


图 3-3



(a) 题给



(b) 解答

图 3-4

投影在 $b'c'$ 上的点, 其位置在投射綫形成的 P 平面上; 凡是有水平投影在 bc 上的点, 其位置在投射綫形成的 Q 平面上; 而点的两投影都在 BC 的同名投影上时, 点的位置就在 P, Q 两平面交綫上, 亦即在 BC 上, 如图中点 A 。而后者則不然, AB 是侧平綫(图 3-6), 由 ab 及投射綫形成的平面 P 和是由 $a'b'$ 及投射綫形成的平面 Q 重合的, P 和 Q 沒有确定的交綫。因此, 有两投影在直綫 AB 的同名投影上的点, 都是重合平面 P, Q 上的点, 它們不一定在直綫 AB 上, 如图 3-6 中点 K 即是。

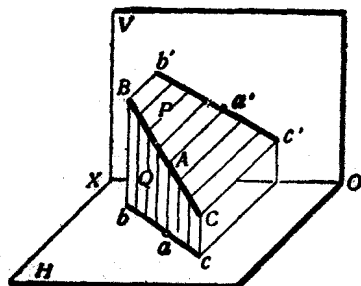


图 3-5

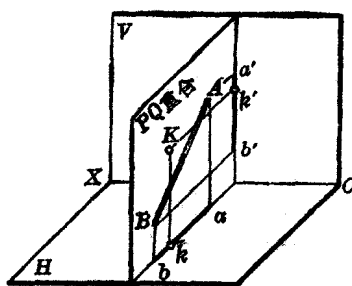


图 3-6

2. 当点 C 在綫段 AB 上时, 它把綫段分为 AC 和 BC 两部分。按 § 1-2 提出的基本特性, 綫段及其投影的关系是 $AC:CB = ac:cb = a'c':c'b'$ 。因此我們可以在投影图上按定比分割空間綫段。

例 3-1. 把已知綫段 AB 分成 2:3, 求分点 C 的投影(图 3-7)。

解: 直接用初等几何作图方法先将 ab (或 $a'b'$) 分成 2:3 而定出点 c , 然后按点在直綫上的特性求出 c' 。

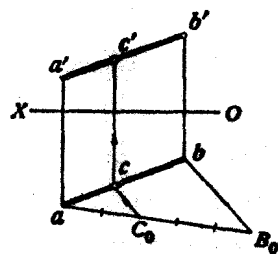


图 3-7

§ 3-4. 两直线的相对位置

两直线的相对位置可以归纳为三种情况: 平行的、相交的和交叉的。其中交叉两直线(立体几何中称为异面两直线)是既不平行又不相交的两直线。

1. 平行两直线 在 § 1-2 中已提出了两平行直线的投影仍互相平行。在正投影体系中为了更明确起见, 可叙述为: 平行两直线的水平投影互相平行; 正面投影互相平行(图 3-8); 侧面投影互相平行。

对于一般位置两直綫, 如果任何两对同名投影互相平行时, 就可决定該两直綫在空間是平行的(讀者可按图 3-8 自己証明)。因此, 只要檢驗两直綫的两面投影图就能判定两直綫是否平行。例如图 3-9, $AB \parallel CD$, 而 $CD \nparallel EF$ 。

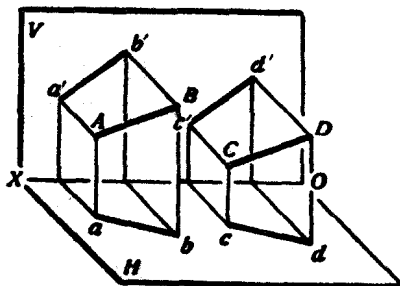


图 3-8

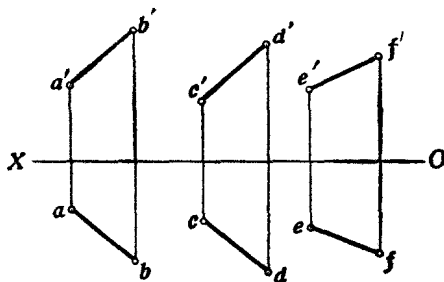


图 3-9

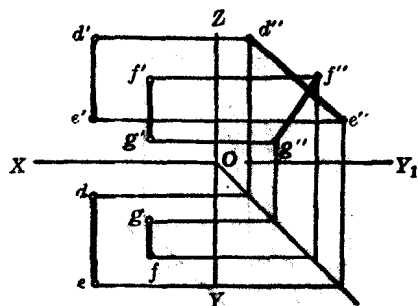


图 3-10

但是, 两直綫同时平行于某一投影面时, 要确定該两直綫是否平行, 就唯一地决定于: 与两直綫平行的那个投影面上的投影是否互相平行。

例如图 3-10 給出兩側平綫 DE 和 FG , 它們的正面投影和水平投影是互相平行的($d'e' \parallel f'g'$, $de \parallel fg$), 但是还不能确定两直綫是否平行, 这时可檢查側面投影是否平行。我們看出, 两直綫的側面投影($d''e'' \nparallel f''g''$)是不平行的, 所以两直綫(DE 和 FG)不平行。

2. 相交两直綫 相交两直綫的交点为該两直綫的共有点, 在投影图上有下列特性:

- (1) 两直綫的同名投影必相交;
- (2) 同名投影的交点連綫必垂直于投影軸。

設两直綫 AB 和 CD 相交于点 K , 則点 K 就是两直綫的共有点(图 3-11)。为此, 点 K 的水平投影 k 就是两直綫水平投影 ab 和 cd 的交点; 同样 k' 就是 $a'b'$ 和 $c'd'$ 的交点, 而且同名投影的交点(k, k')必須符合空間一点(K)的投影特性, 即 $kk' \perp OX$ 。

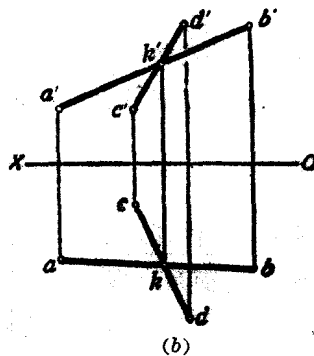
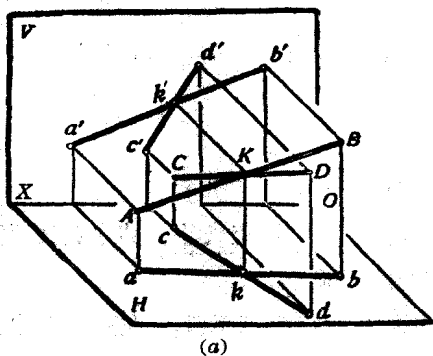


图 3-11

又如圖 3-12, a, 从所給 AB 和 CD 两直綫的两面投影图来看很象是相交两直綫。如果把两对同名投影