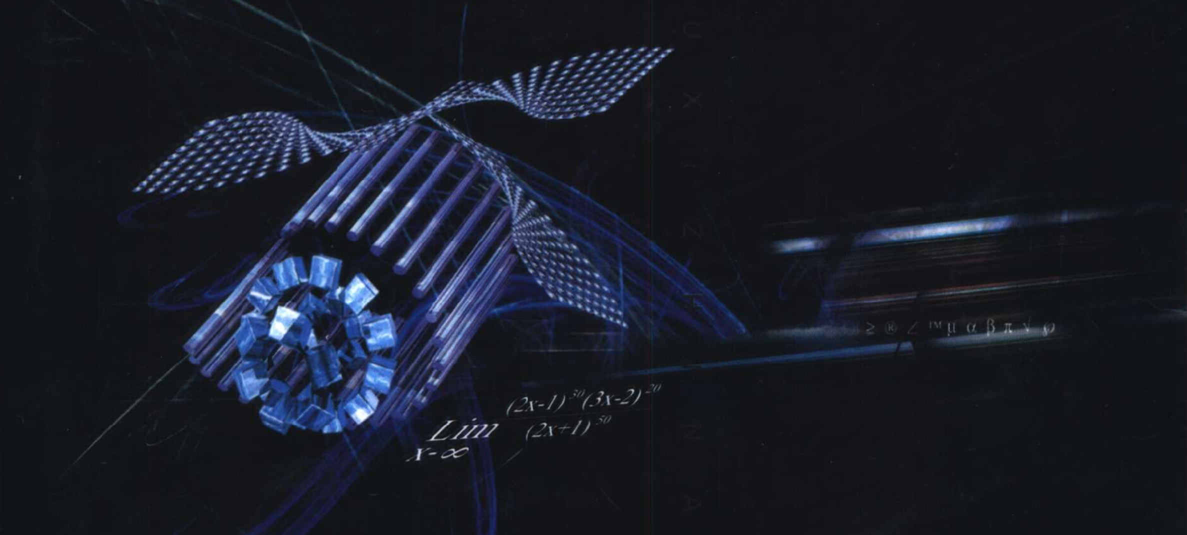
同济大学新编数学辅导丛书

主　编　凌明娟
副主编　张震峰　钱晓明

硕士研究生入学考试

微积分复习指南

（数学三、数学四考生适用）



同济大学出版社

同济大学新编数学辅导丛书

硕士研究生入学考试

微积分复习指南

（数学三、数学四考生适用）

主　编　凌明娟

副主编　张震峰　钱晓明

同济大学出版社

内容提要

本书根据国家教育部最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学三、数学四考试大纲，结合编者对历年硕士研究生入学考试的深入研究和教学实践编写而成。主要内容有函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，多元函数微积分学，微分方程与差分方程简介，无穷级数和微积分在经济中的应用7章，每章由考试要求、复习要点和典型例题、练习题、历年试题等内容构成.

本书力求紧扣考研大纲，资料完整，内容简明，重点突出，解题思路清晰，可使读者在较短的时间内高效率地掌握“考试大纲”的要求，熟悉考试题型及近年来命题的最新动态，提高应试能力. 本书是财经类、管理类硕士研究生入学考试数学(三)、(四)应试复习的指导书，也可作为财经类、管理类相关专业本科生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试微积分复习指南/凌明娟主编.
上海:同济大学出版社,2003.7
(同济大学新编数学辅导丛书)
ISBN 7-5608-2598-2

Ⅰ. 硕… Ⅱ. 凌… Ⅲ. 微积分—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 019071 号

同济大学新编数学辅导丛书
硕士研究生入学考试
微积分复习指南(数学三、数学四考生适用)

主　编　凌明娟　副主编　张震峰　钱晓明
责任编辑　李炳钊　责任校对　徐　栩　封面设计　永　正

出版发行　同济大学出版社
(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)
经　销　全国各地新华书店
印　刷　江苏启东印刷厂印刷
开　本　787mm×960mm　1/16
印　张　13.75
字　数　275000
印　数　1—4000
版　次　2003 年 7 月第 1 版　　2003 年 7 月第 1 次印刷
书　号　ISBN 7-5608-2598-2/O·233
定　价　14.50 元

同济大学
新编数学辅导丛书
编委会

前　言

本书根据国家教育部最新颁布的全国硕士研究生入学考试数学三、数学四考试大纲，结合编者对历年研究生入学考试试卷的深入研究和教学实践编写而成．本书力求紧扣大纲，内容简明，重点突出，解题思路清晰，资料完整，以便读者在较短的时间内高效率地掌握“考试大纲”的要求，熟悉考试题型以及近年来命题的最新动态，提高应试能力．

本书的特点如下：

1．引导学生在全面复习的过程中，比较系统地理解考试大纲所规定的基本概念、基本理论，掌握基本的思维方法和运算技巧．

2．精选技巧性、综合性较强的典型例题．

3．每章配有练习题和数学三、数学四的历年试题，且附有较详尽的答案与提示．这些试题展示了统考以来数学三、数学四考试的全貌，又蕴含着命题专家在《考试大纲》要求下的命题思想和具体要求，是广大考生和教师了解、分析数学三、数学四最直接、最宝贵的资料．

4．根据历年试卷的结构、知识点和难度分布，对某些问题加以专题讨论，如“极限的计算”、“有关变上限函数”、“微积分在经济中的应用”、“各类证明题举例”等等，使读者对前后相关的知识融汇贯通，迅速地提高考生的综合解题能力、逻辑思维能力、运算能力以及分析和解决实际问题的能力．

本书主要内容有函数、极限、连续，一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、常微分方程与差分方程简介、无穷级数和微积分在经济中的应用等七章，每章由考试要求、复习要点和典型例题、练习题（附答案与提示）和历年试题（附答案与提示）四部分构成。书中带“ * ”号的章、节仅适用于数学三的考生，对数学四的考生不作要求．

本书是财经类、管理类硕士研究生入学考试数学三、数学四应试复习的指导书，也可作为财经类、管理类相关专业本科生的教学参考用书．

本书由凌明娟主编，张震峰、钱晓明为副主编，参加编写的有魏枫、张震峰、竺曼莉、钱晓明等．

本书在使用过程中征求了王健老师和部分学生的意见，在此表示衷心的感谢。

限于水平和时间关系，书中不当和错误之处恳请读者批评指正．

编　者

2003 年 3 月

目　　录

前　言
第一章　函数、极限、连续
一、考试要求 …… (1)
二、复习要点和典型例题 …… (1)
三、练习题 …… (20)
四、历年试题 …… (23)
第二章　一元函数微分学
一、考试要求 …… (27)
二、复习要点和典型例题 …… (27)
三、练习题 …… (50)
四、历年试题 …… (53)
第三章　一元函数积分学
一、考试要求 …… (61)
二、复习要点和典型例题 …… (61)
三、练习题 …… (98)
四、历年试题 …… (103)
第四章　多元函数微积分学
一、考试要求 …… (118)
二、复习要点和典型例题 …… (118)
三、练习题 …… (142)
四、历年试题 …… (147)
*第五章　微分方程与差分方程简介
一、考试要求 …… (154)
二、复习要点和典型例题 …… (154)
三、练习题 …… (163)
四、历年试题 …… (166)
*第六章　无穷级数
一、考试要求 …… (170)
二、复习要点和典型例题 …… (170)
三、练习题 …… (185)
四、历年试题 …… (192)

第七章 微积分在经济中的应用
一、复习要点和典型例题 …………………………………………………… (195)
二、练习题 …………………………………………………………………… (202)
三、历年试题 ………………………………………………………………… (204)

第一章 函数、极限、连续

一、考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念.

5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

6. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念.

7. 了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的性质及四则运算法则，会应用两个重要极限.

9. 会用洛必达法则求极限.

10. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续).

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性. 了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

二、复习要点和典型例题

(一) 函数的概念及其几何特性

1. 函数

设 D 是一个数集，如果对于 D 中的任一 x 值，变量 y 按照一定的对应法则有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 自变量的取值范围称为**定义域**，记作 D_f；y 的取值范围称为函数的**值域**，记作 $Z_f=\{y|y=f(x),x\in D_f\}$.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f，如果对于 Z_f 中任一 y，存在唯一的 $x\in D_f$，使 $f(x)=y$，则得到一个定义在 Z_f 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z_f$，称为 $y=f(x)(x\in D_f)$ 的**反函数**.

习惯上用 x 作自变量，写成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$.

$y=f(x)$ 称为**直接函数**.

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像对称于直线 $y=x$.

反函数的定义域 $D_{f^{-1}}=Z_f$(直接函数的值域).

反函数的值域 $z_{f^{-1}}=D_f$(直接函数的定义域).

反函数存在定理：如果 $y=f(x)(x\in D_f)$ 是单调函数，则它一定存在反函数 $x=f^{-1}(y)(y\in$

Z_f)且也是单调函数.

$y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数.

$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$与 $y=\arcsin x$ 互为反函数.

$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$与 $y=\arccos x$ 互为反函数.

$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$与 $y=\arctan x$ 互为反函数.

$y=\cot x$，$x\in(0,\pi)$与$=\operatorname{arccot} x$ 互为反函数.

例 1 (1) 已知 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，$g(x)$与$f(x)$的图形对称于直线 $y=x$，求 $g(x)$；

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$，写出 $f(x)$反函数的表达式.

(1) **分析** $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像对称于直线 $y=x$，$g(x)$与 $f(x)$的图像也对称于直线 $y=x$，所以，$g(x)=f^{-1}(x)$.

解 (1) 由 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$解得 x：

令 $x+\sqrt{x^2+1}=e^y$，$-y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

$-x+\sqrt{x^2+1}=e^{-y}$，故 $x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$.

再换变量可得：$g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

(2) 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2\Rightarrow x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$，$y<-1$；

当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$；

当 $x>2$ 时，$y=12x-16\Rightarrow x=\dfrac{y+16}{12}$，$y>8$.

所以，$f(x)$的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} & x<-1,\\ \sqrt[3]{x} & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12} & x>8.\end{cases}$$

3. 复合函数

如果 $y=f(u)$，$u\in D_f$，$u=\varphi(x)$，$x\in D_\varphi$，且 $D_f\cap Z_\varphi\neq\Phi$，则称 $y=f[\varphi(x)]$为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的**复合函数**. x 称为**自变量**，u 称为**中间变量**.

4. 函数定义中的两个要素——定义域与对应法则

(1) 定义域的求法

应用题中函数的定义域由变量的实际意义而定.

用解析式表示的函数,其定义域应使解析式在实数范围内有意义.

偶次根式要求被开方数大于、等于零.

分式要求分母不等于零.

对数函数要求真数大于零,底数大于零且不等于 1.

反三角函数也有特殊限定,例如,$\arcsin f(x)$,$\arccos f(x)$要求$|f(x)|\leqslant 1$.

三角函数　$\tan x,\sec x,D_f:x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\quad k\in Z$;

$\cot x,\csc x,D_f:x\neq k\pi\quad k\in Z$.

分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

多项函数的定义域是每一项函数定义域的交集.

反函数的定义域是直接函数的函数值域.

复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域应使 $u=\varphi(x)$的值域包含于 $y=f(u)$的定义域.

例 2　求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\ln(2^x-4)+\arcsin\frac{2x-1}{7}$;

(2) $f(x)=g(x^2)+g(3+x)$.

其中,$g(x)=\begin{cases}2x & 0<x\leqslant 1\\ x+1 & 1<x\leqslant 4.\end{cases}$

解　(1) $\begin{cases}2^x-4>0\\ \left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x>4\\ -1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>2\\ -3\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

所以,$D_f=(2,4]$.

(2) 分段函数的定义域是各个定义区间的并集,所以,$g(x)$的定义域 $D_g=(0,1]\cup(1,4]$表示 $g(\quad)$中自变量的取值范围为$(0,4]$,$g(x^2)$的自变量是 x^2,$g(3+x)$的自变量是$(3+x)$,所以

$g(x^2)$的定义域:$0<x^2\leqslant 4\Leftrightarrow[-2,0)\cup(0,2]$.

$g(3+x)$的定义域:$0<x+3\leqslant 4\Leftrightarrow(-3,1]$.

$f(x)$的定义域是上述两个定义域的交集,所以

$D_f:\{[-2,0)\cup(0,2]\cap(-3,1]\}=[-2,0)\cup(0,1]$.

(2) 对应法则

函数 $y=f(x)$中的记号 $f(\quad)$是表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系.

例 3　已知 $z=f(2x+y)+2y-4x$,且当 $y=1$ 时 $z=4x^2$,求 f 和 z.

解　将 $y=1$ 时 $z=4x^2$ 代入原式得

$$4x^2=f(2x+1)+2-4x\Rightarrow f(2x+1)=4x^2+4x-2=(2x+1)^2-3$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2-3\Rightarrow z=f(2x+y)+2y-4x=(2x+y)^2-3+2y-4x.$$

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$,求　(1) $f(-x)$;(2) $f[f(x)]$.

解　(1) $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2 & (-x)\leqslant 0\\ (-x)^2-x & (-x)>0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ x^2-x & x<0.\end{cases}$

(2) 由于 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x^2+x & x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f(x)\geqslant 0.$

故　$f[f(x)]=[f(x)]^2+f(x)=\begin{cases}x^4+x^2 & x\leqslant 0\\ (x^2+x)^2+(x^2+x) & x>0.\end{cases}$

比较两个函数,当且仅当定义域和对应法则都相同时才表示同一函数.

5. 初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数等六种函数称为**基本初等函数**.

基本初等函数经过有限次四则运算和复合,且只能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

分段函数不是初等函数.此外还有隐函数(在多元函数微积分中详细讨论)和无穷级数.

设 $y=f(x)^{g(x)}$,其中,$f(x)>0$,称为幂指函数.

由于 $y=[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$,当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是初等函数时,$y=f(x)^{g(x)}$ 也是初等函数.

$1+x+\cdots+x^n$ 是初等函数,但是 $1+x+\cdots+x^n+\cdots$ 不是初等函数.

6. 函数的几何特性

(1) **单调性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对 I 中任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 是区间 I 上的单调增(减)函数.区间 I 称为单调增(减)区间.

(2) **奇偶性**

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义,若对于 $\forall x\in I$(“$\forall$”表示“任给”),恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若对于 $\forall x\in I$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像对称于原点;偶函数的图像对称于 y 轴.

奇函数的反函数是奇函数,但偶函数不存在反函数.

常见的奇函数: x^{2n+1}(n 为整数), $\dfrac{1}{x}$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $xf(x^2)$, $f(x)-f(-x)$.

常见的偶函数: x^{2n}, $|x|$, $\cos x$, $f(x^2)$, $f(x)+f(-x)$.

(3) **有界性**

若存在 $M>0$,使对任意 $x\in I$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数,否则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

几个常见的有界函数:

$|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$, $x\in(-\infty,+\infty)$

$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $|\arccos x|\leqslant\pi$, $x\in[-1,1]$

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$, $|\text{arccot}\,x|<\pi$, $x\in(-\infty,+\infty)$

$\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$，$\left((|x|-1)^2\geqslant 0,\ x^2+1\geqslant 2|x|\ \left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1\right)$　$x\in(-\infty,+\infty)$

(4) **周期性**

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在常数 $T>0$，对 $\forall x\in I$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$的周期.

几个常见的周期函数及其周期：

$$\sin(ax+b),\quad \cos(ax+b),\quad T=\frac{2\pi}{|a|}.$$

$$\tan(ax+b),\quad \cot(ax+b),\quad |\sin(ax+b)|,\quad T=\frac{\pi}{|a|}.$$

周期函数的运算性质：

若 $f(x)$，$g(x)$是以 T 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$也是以 T 为周期的周期函数.

若 $f(x)$，$g(x)$的周期分别为 T_1，$T_2(T_1\neq T_2)$，则 $f(x)\pm g(x)$也是周期函数，其周期 T 是 T_1，T_2 的最小公倍数.

（二）极限

1. 极限的概念

(1) 数列$\{a_n\}$收敛于 $a\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$(自然数)$N$，当 $n>N$ 时，恒有$|a_n-a|<\varepsilon$("$\forall$"表示"任给"，"$\exists$"表示"存在").

(2) 函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，当$|x|>M$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称 x 趋近于无穷大时 $f(x)$的极限为 A.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称 x 趋近于 x_0 时 $f(x)$的极限为 A.

(3) **右极限**：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

(4) 无穷小量

若 $\lim\limits_{x\to(\ )}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$当 $x\to(\quad)$时是无穷小量(极限过程 $x\to(\quad)$，是指 $x\to x_0$，或 $x\to x_0^-$，或 $x\to x_0^+$，或 $x\to\infty$，或 $x\to+\infty$，或 $x\to-\infty$). 无穷小量实际上就是以零为极限的量.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|<\varepsilon$.

(5) 无穷大量

如果 $\lim\limits_{x\to(\ )}f(x)=\infty$，则称 $x\to(\quad)$时 $f(x)$为无穷大量. $x\to x_0$ 时，$f(x)$为无穷大量$\Leftrightarrow\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|>M$ 成立.

$x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大量$\Leftrightarrow\forall M>0,\exists M_1>0$，当$|x|>M_1$时，恒有$|f(x)|>M$.

注意 无界变量与无穷大量的区别：无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无穷大量.

例 5 当$x\to 0$时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是无界变量，但不是无穷大量.

解 设$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$，因为取$x=x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时，$f(x_n)=n^2\pi^2\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{x_n\to 0}f(x_n)\not\to\infty$，故$f(x)$不是无穷大量.

取$x=x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$f(x_n)=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2\sin\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2\to\infty$，故$f(x)$是无界变量.

(6) 无穷小量的比较

设$\alpha(x),\beta(x)$是同一极限过程$x\to(\quad)$中的两个无穷小量.

若$\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$较高阶无穷小量，记作$\alpha=O(\beta)$；

若$\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\ (A\neq 0,A\neq 1)$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小量，记作$\alpha=O(\beta)$；

若$\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小量，记作$\alpha\sim\beta$；

若$\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的低阶无穷小量；

若$\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A(A\neq 0)$，$k>0$，则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小量.

常用的等价无穷小量：

当$x\to 0$时

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，　$\arctan x\sim x$，　$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，　$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{x}{n}$，　$a^x-1\sim x\ln a$.

例 6 当$x\to 0$时，下列函数哪一个是其他三个的高阶无穷小(　　)?

(A) x^2　(B) $x-\sin x$　(C) $\ln(1+x^2)$　(D) $1-\cos 2x$

解 因为$x\to 0$时，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$1-\cos 2x\sim\dfrac{(2x)^2}{2}=2x^2$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$. 所以答案是(B).

2. 极限的性质

(1) 数列极限的性质

① **唯一性** 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，则$a=b$.

② **有界性**　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则数列$\{a_n\}$有界.

例$\left\{n\sin\dfrac{1}{n}\right\}$有界$\left(\text{因为 }\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=1\right)$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow$对于$\{a_n\}$的**任一子序列**$\{a_{n_k}\}$**有** $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$.

④ **单调有界数列必有极限.**

⑤ **夹挤定理**　设三个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，如果 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

(2) 函数极限的性质

① **极限存在的充要条件**

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A.\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A\Leftrightarrow$每一列 $x_n\to x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

② **局部有界性**

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)$在 x_0 的去心邻域 $U(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$内有界. 即$\exists\delta>0$，$M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|\leqslant M$.

③ **唯一性**　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

④ **保号性**　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，若 $A>0$，则$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$；反之，若在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$.

⑤ **夹挤定理**　若在 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注意　设对任意 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不一定存在.

例 7　满足上述条件的 $\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$分别为

$\varphi(x)=x$，$f(x)=x+e^{-|x|}$，$g(x)=x+2e^{-|x|}$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^{-|x|})=\infty$；

$\varphi(x)=0$，$f(x)=e^{-|x|}$，$g(x)=2e^{-|x|}$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}e^{-|x|}=0$.

⑥ **极限的四则运算法则**

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\ \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

⑦ **有极限的量与无穷小量的关系**

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

⑧ **无穷小量的运算性质**

ⓐ 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

ⓑ 有限个无穷小量的积是无穷小量.

ⓒ 无穷小量与有界量的积是无穷小量．

ⓓ $x \to x_0$ 时，$f(x)$是无穷小量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量；

$x \to x_0$ 时，$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量.

ⓔ 等价无穷小代换定理：

设当 $x \to x_0$ 时，$\alpha(x), \beta(x), \alpha_1(x), \beta_1(x)$是无穷小量，若 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$，若 $\alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x)$，则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

3. 极限的计算

(1) **代入法**——利用函数的连续性.

(2) **对函数进行初等变换，去掉零因子或去掉无穷大因子**. 然后利用极限的四则运算法则.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ \infty & n > m; \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^s P_1(x)}{(x-a)^t Q_1(x)} = \begin{cases} 0 & s > t \\ \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} & s = t \\ \infty & s < t. \end{cases}$$

其中，$P_1(a) \neq 0, Q_1(a) \neq 0$.

① **分子、分母同时除以最高阶的无穷大量**

例 8 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^3 - n^2} - n}$.

分析 分子、分母都是无穷大的运算，必须除以最高阶的无穷大量 n(即 n 的最高次幂)才能去掉无穷大因子.

解 原式$= \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} - 1} = -2.$

② **分子(或分母)有理化**

例 9 已知 $x \to +\infty$时，$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} - \alpha x - \beta$ 是无穷小量，求 α, β.

解 $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2+bx+c} - \alpha x - \beta) = 0.$

因为$0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \alpha x - \beta}{x} = \sqrt{a} - \alpha$，所以 $\alpha = \sqrt{a}$.

$$\beta = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x} = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

（3）**利用两个重要极限**

$\lim\limits_{(\ )\to 0}\dfrac{\sin(\ \ )}{(\ \ )}=1$，$\lim\limits_{(\ )\to 0}[1+(\ \ )]^{\frac{1}{(\ )}}=\mathrm{e}$.（　）中的变量可以是 x，也可以是 x 的函数.

例 10　求下列极限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}$；　　(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$；

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解　(a) 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{2}{x}\to 0$，所以

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\ \frac{2}{x}\ \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=\frac{6}{5}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^6$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n^2}n}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

（4）**利用"无穷小量与有界量之积仍为无穷小量"**

例 11　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

分析　当 $x\to+\infty$ 时，$\sin\sqrt{x+1}$ 和 $\sin\sqrt{x}$ 都无限振荡，极限不存在，由和差化积公式可化为无穷小量与有界量之积.

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.\ \left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$.

注意　重要极限 $\lim\limits_{(\ )\to 0}\dfrac{\sin(\ \ )}{(\ \ )}=1$ 与"有界量和无穷小量的积是无穷小量"的应用条件的区别：一般地，正弦（或余弦）符号后面的变量是无穷小量，用重要极限求解；正弦（或余弦）符号后面的变量是无穷大量，往往用"有界量与无穷小量的乘积".

（5）**利用等价无穷小代换定理**

当 $x\to(\ \ )$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，则 $\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to(\ )}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$，即在求两个无穷小量之比的极限时，可用等价无穷小代换以简化计算.但必须注意的是：在利用等价无穷小代换时，一般在乘、除运算时可以，但在加、减运算时不能轻易使用.因这时往往会改变无穷小的阶而造成错误.

例 12 求(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$；(b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

解 (a) 先作恒等变形，再作等价无穷小量替换.

$$x\to 0\text{ 时},\quad \ln(1+x)\sim x.$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin^2 x}{e^x}+1\right)}{\ln\left(\dfrac{x^2}{e^{2x}}+1\right)}\xlongequal[\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{2x}}=0]{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^x}=0}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{e^x}}{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}=1.$$

$$\text{(b) 原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x^2}{2}}{x\,\dfrac{x}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(6) **利用三角或代数中的某些公式**

例 13 求下列极限：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)\right]\quad n=1,2,\cdots.$

解 (a) 分子、分母同乘因子 $2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$，并用倍角公式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{2^{n-1}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\left(2\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}\right)}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{2^{n-2}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\left(2\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{x}{2^n}\sim\dfrac{x}{2^n}$，

所以原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\,\dfrac{x}{2^n}}=\dfrac{\sin x}{x}$.

(b) 分子、分母同乘因子 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=\frac{\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\right]\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}$$