

結構分析

(計算機解法)

(修訂版)

原著者 F W. Beaufait W H. Rowan, Jr.

P G. Hoadley R M. Hackett.

譯述者 何 浩 銘

科技圖書股份有限公司

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書名：結構分析（計算機解法）

譯述者：何浩銘

發行人：趙國華

總經銷：科技圖書股份有限公司

台北市博愛路185號二樓

電話：3110953

郵政劃撥帳號15697

六十九年九月修訂三版

特價新台幣120元

原 序

本書設計成爲一教學工具，用於大學高級專業課程，或研究所第一年課程，以及作爲結構工程師的實用參考書。本書經由作者等自編講義，發展成爲一系列的短期課程，在過去幾個暑期中提供從業結構工程師與研究生——大學土木工程系的課程。這些資料的試用，證明其在應用與實際上均有很高的成果，就因而鼓勵作者將這些資料編成課本。

作者曾嘗試使本書成爲一自修課本，因此，其講述內容無需提出重複資料，但可自由引伸這些資料。由於本書企圖達成這項目標，讀者必須自動地儘可能仔細研讀每一語句並細察每一例題。

本書主旨：本書所涉及的線性、彈性的結構系統分析，由承受規定的擾動作用而產生的作用力與變化，分別計算出來。要研究這些單獨結構系統，只有一個方向的載重傳達至支點的元件組合而成，即是梁元件。這種系統的类型是框架結構，包括在內的計有連續梁、平面框架、立體框架、格子梁、平面桁架及立體桁架等。

應用數位電算機有效地執行常規的計算，工程師必須熟悉這些技術，最好是符合電算機作業，不論其爲發展他自己的電算機程式計劃，或用商業化程式計劃去解決其問題。因此，本書涉及結構分析方法的導致，是適合於編成電算機的程式。用兩種基本方法來分析超定結構系統，即韌性法與勁性法，經導出並使其公式化以供電算機使用。但其重點在於勁性法，此法被考慮成爲最佳而適合電算機程式計劃用的。

先決條件：從事研究本書之前，讀者應有一些關於基本結構力學與材料力學的知識。雖然並不絕對需要，但希望讀者對分析超定框架結構有一前導知識。讀者在研究八與九章所提出的高級課程之前，須具備些初級微積分與微分方程知識。而且在研究第十、十一、十二與十三章之先，至少熟悉某些電算機程式計劃語言，最好是複傳肆(FORTRAN IV)。以上各章要牽涉到用電算機程式來分析結構系統的。

初級矩陣代數在本書中是用以導出分析方法，應用在數位電算機中；因此，讀者在從事研究分析之先，必須熟諳這一門學科。對於不大諳熟初級矩陣代數或需要重溫的讀者，可參閱附錄A中所提供之矩陣代數一些簡易項目。

綱要：如書名所示，本書涉及之結構分析是符合使用數位電算機的。第一至

第九章所討論的是關於算學工具與分析框架結構理論的誘導。第十至十三章，是關於電算機程式用以分析結構系統的誘導方法。

第一章導出兩種分析方法的基本概念，即韌性法與勁性法。着手於這些方法較詳細誘導之先，讀者應對某些簡單超定結構的完全分析方法，有一明晰的瞭解。由兩種方法作比較，藉以指出勁性法對電算機的使用具有較高的潛在性能。

第二章給讀者介紹一些解聯立方程式的技巧。在本章裏提出的資料，並不企圖深入研究數學理論；僅使讀者獲得分析結構系統的必需數學工具，許多討論到的項目均是直接為電算機所能應用的。

第三章導出韌性法的基本概念以分析平面的超定框架結構。該法係由一項初步觀點使讀者重行認識。由於韌性法本身不能使其能良好的符合電算計程式計劃，故該法不予深入研究。

第四章建立矩陣的基本方程式作為分析框架結構之用，並討論其方法作為分析平面的、正交的結構而導出不同的矩陣。構件勁性矩陣，被解成為一項平面的、正交的框架之典型梁元件僅考慮其撓性變形。韌性法的分析，被用作一項工具以計算稜體與非稜體的梁元件所需的矩陣。

第五章是引伸勁性法分析，將第四章所發展的概念去分析平面的、非正交的結構系統。其構件勁性矩陣為典型的平面框架梁元件，並考慮其軸向變形與彈性變形，再予說明。還有，在勁性分析中，其不同的矩陣被發展成為若干不同型式的梁元件。

第六章是擴大勁性法以分析三因次（立體的）結構。需要一些矩陣來陳述梁元件的行為，經被發展成為一項立體剛架、立體桁架、與格梁系統的標準構件。

第七章是關於大型結構系統將其劃分成為區域或次結構。計算一項梁元件的構件勁性矩陣與固定端作用力，並將用於次結構的概念也予討論。

第八章引伸勁性法使包括軸載重加於平面框架的撓曲行為與由其所變的軸載重，基於平面結構系統的彈性穩定以決定其臨界載重。

第九章是介紹能量概念用於勁性方程式的發展。固定位能原理之介紹與用於由梁元件發展其構件勁性矩陣，以及對於完全結構系統的結構勁性矩陣。

第十章討論發展勁性分析電算計程式以分析結構系統的哲理。導出一項帶狀結構勁性矩陣觀念並研究其優點。

第十一、十二與十三章是陳述用複傳肆（FORTRAN IV）來發展電算機程式分別分析平面、正交框架；一般平面、非正交系統，和一般立體結構。這些程式撰寫出來，使其能適用在大多數的數位電算計中，只需予以些微的修正即可。這些程式完全文書化，使用者可配合其所需要而修正之。完整的程式分別載於附錄

C, D, 與E 各章中。

依作者意見，由第一至第六章所包含的主要教材，可用作大學課程。雖然第七、第八與第九章是為大學課程而寫，在這些章節中一直到第十至十三章均可找到較適於研究第一年的課程。但，在第七至十三章中任何一項教材，亦可用於第一至六章中的大學課程中。

FRED W. BEAUFAIT	鮑發德
WILLIAM H. ROWAN, JR.	羅 汪
PETER G. HOADLEY	霍特蘭
ROBERT M. HACKETT	赫克德

目 錄

	頁數
第一章 超定結構分析概念	1
第一節 引 言.....	1
第二節 超定性.....	2
第三節 韌性分析法.....	4
第四節 勁性分析法.....	7
第五節 分析法之選擇.....	12
第二章 線性方程式組之解法	12
第一節 矩陣方程式.....	12
第二節 用逆矩陣解線性方程式組.....	13
第三節 用高斯消去法解線性方程式組.....	19
第四節 用選代表解線性方程式組.....	24
第五節 矩陣分隔.....	26
第六節 用柯累斯基法解對稱方程式組.....	36
第七節 習 題.....	41
第三章 韌性分析法導論：平面結構	44
第一節 引 言.....	44
第二節 用虛功法求變位.....	45
第三節 韌性分析之基本方程式.....	52
第四節 多項載重情況的韌性方程式.....	60
第五節 彈性支點之韌性方程式.....	62
第六節 韌性方程式的穩定性改善.....	66
第七節 結 論.....	72
第八節 習 題.....	72
第四章 勁性分析法：平面正交結構	78
第一節 符號慣例.....	78

第二節	梁元件	78
第三節	矩陣之誘導	94
第四節	連續梁之分析	118
第五節	多項載重情況	129
第六節	剛架分析	130
第七節	習題	138
第五章	勁性分析法：平面、非正交結構	143
第一節	引言	143
第二節	符號慣例	145
第三節	梁元件	145
第四節	座標系統之轉移	151
第五節	剛架結構之分析	153
第六節	平面桁架系統分析	174
第七節	特殊梁元件	189
第八節	平面框架具彈性支點之分析	197
第九節	習題	210
第六章	勁性分析法：三因次結構	218
第一節	引言	218
第二節	符號慣例	219
第三節	梁元件	220
第四節	座標系統的轉移	230
第五節	剛架結構之分析	246
第六節	立體桁架結構	271
第七節	平面格子梁結構	277
第八節	說明	285
第九節	習題	286
第七章	用次結構分析結構系統	296
第一節	引言	296
第二節	基本概念	297
第三節	次結構之分析	300

第四節	平面框架之分析	304
第五節	構件勁性矩陣與固定端作用力之決定：特殊梁元件	331
第六節	習題	339
第八章	平面結構系統之穩定性	342
第一節	導言	342
第二節	歐拉載重	342
第三節	穩定函數	345
第四節	橫向載重函數	352
第五節	平面構架之分析	362
第六節	臨界載重	373
第七節	摘要	382
第八節	習題	383
第九章	能量法	387
第一節	固定位能原理	387
第二節	應變能	389
第三節	外部位能	397
第四節	範例	400
第五節	構件勁性及結構勁性矩陣	406
第六節	習題	412
第十章	電算機程式導論	415
第一節	引言	415
第二節	電算機程式的範圍	416
第三節	勁性分析的帶狀矩陣	418
第四節	帶狀矩陣方程式解法	421
第五節	習題	425
第十一章	平面正交構架程式	428
第一節	引言	428
第二節	編號計劃	428
第三節	構件載重符號慣例	430

第四節	輸入資料編製	430
第五節	程式說明	436
第六節	平面正交框架的電算機分析	439
第十二章	平面框架與桁架程式	448
第一節	引言	448
第二節	編號計劃	448
第三節	構件載重符號慣例	451
第四節	輸入資料編製	451
第五節	程式陳述	457
第六節	電算機分析平面構架	458
第十三章	立體框架與桁架程式	465
第一節	導言	465
第二節	編號計劃	465
第三節	構件載重符號慣例	468
第四節	輸入資料編製	468
第五節	程式陳述	473
第六節	立體框架的電算機分析	473
附錄A	矩陣代數與行列式	478
A—1節	基本定義及記號	478
A—2節	矩陣演算	479
A—3節	特殊矩陣	481
A—4節	正方矩陣之行列值	485
A—5節	矩陣的初等行轉換	488
A—6節	矩陣之級	488
A—7節	矩陣之逆	490
附錄B	穩定性與載重函數	491
附錄C	平面正交框架程式	495
C—1節	重要記號的陳述	495

C—2 節	誤差診察	497
C—2 節	複傳電碼	497
附錄D	平面框架與桁架程式	510
D—1 節	重要記號的陳述	510
D—2 節	複傳電碼	511
附錄E	立體框架與桁架程式	520
E—1 節	重要記號的陳述	520
E—2 節	複傳電碼	522
問題選答		532

第一章

超定結構分析概念

第一節 引言

在從事任何物理系統 (physical system) 的算學分析中，第一需要列出該系統的理想算學模式 (idealized mathematical model)。許多結構系統也許適用某種代表模式，用靜力平衡方程式得解。是為靜力確定結構 (簡稱靜定結構) 模式 (statically determinate structural model)。由於需要確實代表範圍廣泛的結構系統，有極多拘束 (constraints) 要列出某種算學模式，如受到許多拘束而不能單獨用靜力方程式求解的，是為靜力超定結構 (簡稱超定結構) 模式 (statically indeterminate structural model)。

要成立一項超定結構系統用之彈性分析模式的許多技術中可綜合成兩種基本方法：(1) 韌性法 (flexibility method)，將該處作用力 (剪力、軸向力與彎矩) 被視作分析中方程式之未知量；(2) 勁性法 (stiffness method)，係就其變位 (displacement) (位移與轉動) 作為其未知量。在分析這些超定結構，不論其採用韌性法或勁性法，必先成立以一組未知量 (作用力或變位) 為項的獨立聯立方程式以求解。

分析方法之誘導，係假設結構所承受之載重與其結果變位間存在着線性關係，並假定重疊原則 (principle of superposition) 為真。因此結構材料必須依虎克定律，即應力與其應變成正比，且其應力不超過其彈性極限。這些基本假

設，也包含了平衡方程式中應用不撓的幾何結構模式。其所起的變形，假定幾何的改變與其原來之幾何模式相較可以忽略的。

第二節 超定性 (Indeterminacy)

與兩種基本分析法相隨伴的兩項超定性的型式，可用來描述某一結構系統：
(1)靜力超定性 (static indeterminacy) 與 (2)動力超定性 (kinematic indeterminacy)。靜力超定性，有關外來或內在的作用力 (剪力、軸向力、彎矩) 的數量，必須被釋放，使結構轉變成穩定的靜定系統 (stable, statically determinate system)。亦即一項結構分析就其可以獨自成立的平衡方程式與按構造的特徵條件另行成立方程式。某一系統的靜力超定度，被解釋為其所釋放作用力之數量。指定其特別獨立方程式的數量，必須以其釋放作用力為項，用韌性法分析其系統。這些方程式的誘導觀點是，當結構系統要恢復的連續性被移去後，將成為一靜定結構。

第二種型式的超定性結構系統為動力超定性。關於結點變位 (Joint displacement) (位移與轉動) 的獨立分量 (independent components) 數，對某規定座標軸組，描述其在任意載重情況下，該系統所起之回應 (response)。該結構必需被人為箝制，使轉變成動力確定結構 (kinematically determinate structure)。即結構的所有結點都被箝制着。動力超定度，被解釋為結點變位無箝制 (unrestrained) 分量之數量。若用勁性法分析，指定其特別獨立方程式；必需以結點變位無箝制分量為項。這些方程式之誘導是建立在結構上的人為結點箝制被釋放時，結構的個別結點為平衡之觀點上。

不同結構系統的靜力和動力超定度的示例如圖 1-1。例如，就圖 1-1 (b) 的結構。因其有五個支點反力未知量的分量和僅有三個可用的靜力方程式，兩項支點反力必須被釋放才能成為一靜定結構，因此，該系統之靜力超定度為貳。相反，該系統動力超定度為肆，是由於其有四個無箝制結點變位分量的事實。當略視其個別構件 (member) 的軸向變形。

結構	反力分量	結點變位分量	超定度	
			靜力的	動力的
(a)			1	3*
(b)			2	4*
(c)			3	0
(d)			0	2*
(e)			3	9

* 略視軸向變形

圖 1-1 超定度示例

瞭解某一結構系統的靜力和動力超定度是很重要的。可使被分析的系統要採用韌性法或勁性法，很便利地指出其計算的工作量。

第三節 韌性法分析

爲示範一項用韌性法分析超定結構系統之基本概念，分析如圖 1-2 (a) 所示的兩孔連續梁爲例。

分析任何系統的初步工作，是清楚地說明其各項模式，如幾何圖形、邊界條件、材料性質、和載重等。圖 1-2 (a) 的連續梁計有兩孔長度爲 L_1 與 L_2 ，在結點 1 與 2 爲輻支點，結點 3 爲固定支點。該系統的元件 (element) 可能具一變動的或常數的慣性矩貫及全長。材料之彈性模數，在該系統中可能是變動的。結構的一般載重均經指出如圖。

在應用韌性法分析超定結構系統時，第一點要求其結構爲穩定靜定系統。因此，該已知結構的靜力超定度必須成立與一項對應釋放作用力數量來產生靜定的模式，亦即釋放結構 (released structure)。關於圖 1-2 (a) 所示之連續梁，該結構的靜力超定度爲貳，其支點反力的五個分量如圖 1-2 (b) 所示，必須算出的只有三個獨立方程式可以應用。所以其中兩項分量必須被釋放才能建立靜定結構模式。但因兩項作用力的組合有若干種可以移去而成釋放結構。本節討論，選擇作用力 A_1 與 A_2 爲贅作用力 (redundant actions) (簡稱贅力)。結果，得靜定結構如圖 1-2 (c) 所示。現在本問題成爲一組以贅力爲項而建立一組獨立聯立方程式，如將贅力算出，則超定結構系統的分析便得完成。

該釋放結構由於承受載重而發生變形，將與實際超定結構的行爲一致。但，由於作用力等於其釋放作用力，其釋放結構之變形與其實際系統是一致的。在釋放結構分析中，其在作用點上之變位與沿該線上每一贅力的變位，必須分別算出。參照圖 1-2 (e) 的結構，結點 1 與 2 的變位，在釋放結構中，由於承受載重情況，分別指定其爲 δ_1 與 δ_2 ，如圖 1-2 (d) 所示。

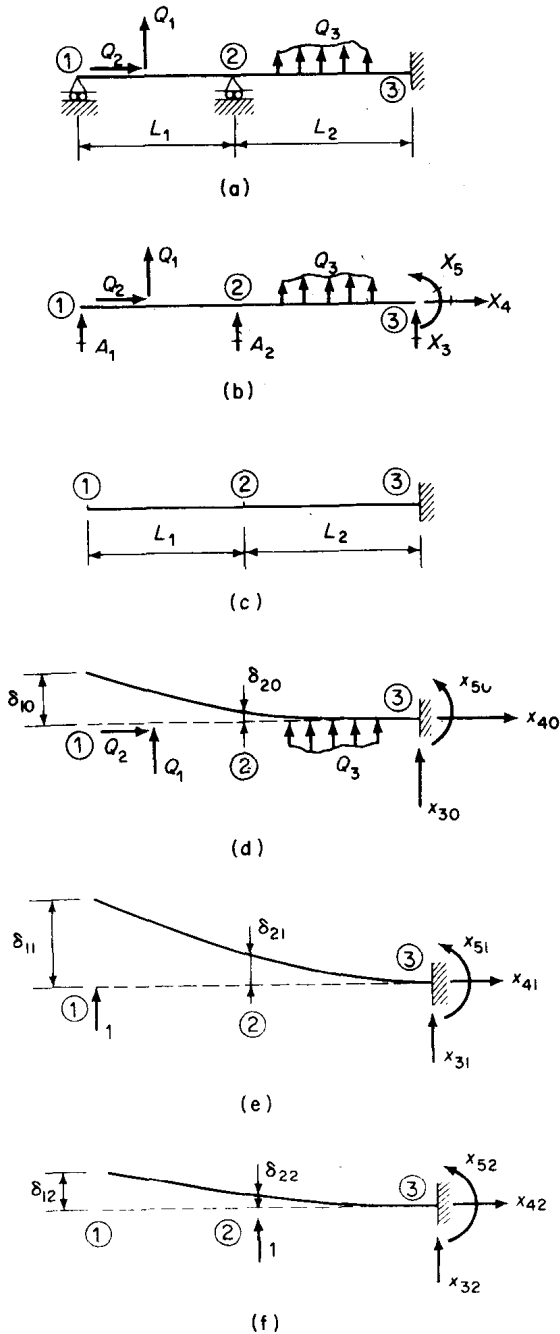


圖 1-2 韌性分析法示例；
 (a)結構；(b)反力確認；
 (c)釋放結構；
 (d)釋放結構—由載重的變位；
 (e)釋放結構—由 A_1 的變位；
 (f)釋放結構—由 A_2 的變位；
 註：所示作用力與變位均定為正號情況。

該項贅力的大小與方向在現階段中雖為未知。該結構的每一贅力，可由假定承受一單位值而被分析出來。對於每一承受贅力點的變位，沿贅力的作用力線，必須算出。最後，考慮該釋放結構之每一贅力作用點的變位，是由承受載重情況與個別單位贅力兩者所發生。一組獨立，聯立方程式可以列出以描述其在原來超定結構中在承受贅力的每一點之實際要求變位。解這些方程式以導出該系統的連續性之每一贅力之大小與方向。在討論中之連續梁，由於承受一單位值 A_1 ，而在結點 1 與 2 上所起之變位分別指定如圖 1-2 中的 δ_{11} 與 δ_{21} ，以及由於承受一單位值 A_2 ，而在結點 1 與 2 的變位分別指定如圖 1-2 (f) 中的 δ_{12} 與 δ_{22} 。現在，兩種情形的一組線型函數如圖 1-2 (e) 與 1-2 (f) 所示，可合併成為圖 1-2 (a) 所描述的情形，使釋放結構的結果變形，將與原來超定結構相配合。就結點 1 與 2 被箝制以抵抗沿有關贅力作用線的變位，〔即 δ_{11} 與 δ_{22} ，每一項均等於零〕方程式的相合性 (compatibility) 所控制的三項情形，疊加起來則可寫成

$$\delta_{10} + \delta_{11}A_1 + \delta_{12}A_2 - \delta_{s1} = 0 \quad (1-1a)$$

與

$$\delta_{20} + \delta_{21}A_1 + \delta_{22}A_2 - \delta_{s2} = 0 \quad (1-1b)$$

又可寫成矩陣型式如

$$\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-1c)$$

這些方程式陳述其實際超定結構的變位， δ_{1i} 等於其釋放結構的對應變位， δ_{10} 等於由承受載重情況加於釋放結構的對應變位， δ_{1i} 等於個別加上之單位贅力乘所需有關贅力 A_i 的大小。用這一組方程式解出其未知量，即為其所釋放的作用力。

一旦贅力算出，超定結構的任何作用力或變位，可由該釋放結構的作用力與變位疊加之即得，這些作用力與變位，是由其所承受的載重情況，與每一贅力個別施於釋放結構的結果之對應作用力與變位。例如，超定結構的反力 X_s 〔圖 1-2 (a)〕被計算作

$$X_s = x_{s0} + x_{s1}A_1 + x_{s2}A_2 \quad (1-2)$$

此處 x_{s0} ，是釋放結構反力與所承載重的支點反力 X_s 相對應，而 x_{s1} 是由一個

單位釋放作用力 A_1 對應於支點 X_5 的釋放結構支點反力，又 x_{52} 是由於一項單位釋放作用力 A_2 對應於支點反力 X_5 的釋放結構支點反力。

第四節 勁性法分析

現在，以圖 1-2 (a) 的連續梁用勁性法分析。為便利計，該結構再在圖 1-3 (a) 中繪出。如前所述分析之第一步是明白表明該結構的幾何圖形、邊界條件、材料性質與載重情況。

採用勁性法分析超定結構，首先將該結構改成動力確定系統 (kinematically determinate system)。因此，該結構的結點變位分量，由外在情況的非箝制

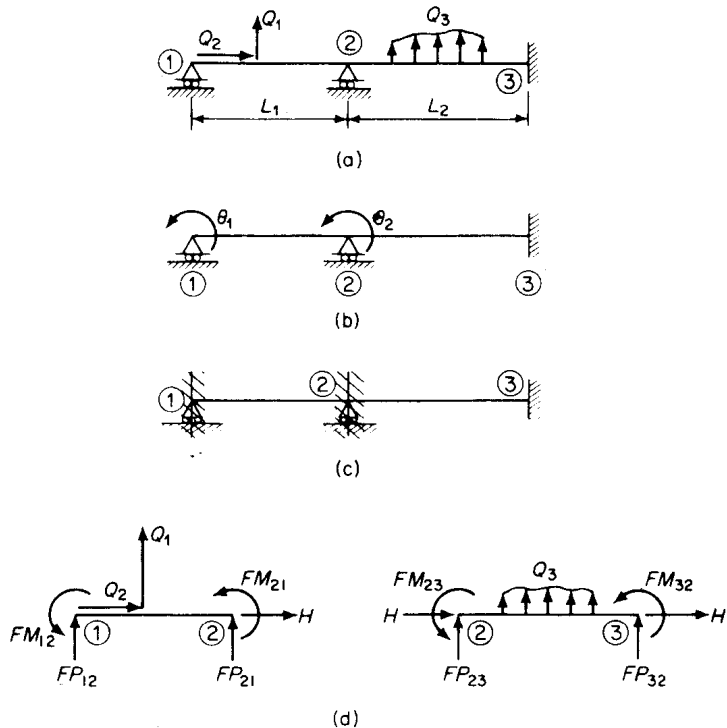


圖 1-3 勁性分析法示例；(a)結構；(b)非箝制變位的認定；(c)箝制結構；(d)固定端作用力。