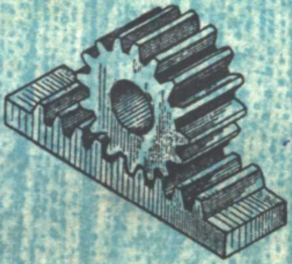
齒輪刀具的理論基礎

樂兌謙　林其駿編譯



上海機電圖書出版社

齒輪刀具的理論基礎

欒兌謙　林其駿　編譯

上海機電圖書出版社

一九五五年二月・上海

齒輪刀具的理論基礎 定價：7,400

編譯者： 欒兌讓 林其駿

出版者： 上海機電圖書出版社
上海中山東二路九號四四室
上海市書刊出版業營業許可證出073號

排版者： 華成印刷公司
上海延安中路一二二八號

印刷者： 信誠印刷廠
上海黃陂南路四一二弄六號

總經售： 上海圖書發行公司
上海山東中路一二八號

書號：2-014 787x1092 1/25・4.08印張・51頁・73千字
印數：1-2,000 1955年2月第一版第一次印刷

本書係根據蘇聯齒輪刀具的專業書編譯而成，對於齒輪刀具（包括梳齒刀、插齒刀及滾齒刀）切製齒輪的基本理論和設計齒輪刀具的基本知識都作了詳細的敍述，適合於工業大學機械製造系本科和專修科有關專業學生閱讀，並供齒輪製造工作者參考。

序

本書主要是根據蘇聯 A. H. 格魯賓等所著的 ЗУБОРЕЗНЫЙ ИНСТРУМЕНТ (齒輪刀具)及 И. И. 謝明欽柯所著的 РЕЖУЩИЙ ИНСТРУМЕНТ (切削刀具)編譯的。全書共二章，內容爲齒輪刀具(包括梳齒刀、插齒刀及滾齒刀)切製齒輪的基本理論和設計齒輪刀具的基本知識。

編譯本書的目的，是爲工業大學機械製造系本科及專修科有關專業學生們以及齒輪製造工作者供獻一本參考讀物，因爲目前關於齒輪方面的書籍，尙屬不多。並因計算的需要，在附錄中附有漸開線函數表。

我們希望這本小册子能對讀者們有些幫助，並誠懇地請求讀者批評指教。

本書編譯過程中，承朱立三同志協助繪圖，特此致謝。

樂兌謙　林其駿

一九五四年十二月於交通大學

目　　録

第一章

漸開線圓柱齒輪的嚙合理論的基本概念

§1 圓柱齒輪的分類

圓柱齒輪的用途，是在兩個平行軸或交錯軸* 之間均勻地傳遞旋轉運動，在後者情形中的圓柱齒輪，稱爲螺旋齒輪。圓柱齒輪的**傳動比** i，是主動齒輪的角速度 ω_1 對從動齒輪的角速度 ω_2 的比值，卽

$$i=\frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{1}$$

圓柱齒輪的嚙合，分**外嚙合**和**內嚙合**二種：前者的傳動齒輪均有外齒，後者的傳動齒輪中，一個有外齒而另一個有內齒。

外嚙合的一對齒輪，旋轉方向相反；內嚙合的一對齒輪，旋轉方向相同。

內嚙合的螺旋齒輪，實際上用得不多。

圓柱齒輪，按其齒的方向，可分爲**圓柱直齒輪**和**圓柱斜齒輪**；前者齒的方向與齒輪的軸線平行；後者齒的方向與齒輪的軸線斜成某一角度 β.

所謂**人字齒輪**，就是斜齒輪的一種個別類型：這種齒輪，在其**齒輪寬度**的個別部分上，角 β 改變了方向。因此，人字齒輪可以認爲是兩個或幾個斜齒輪組合而成的，它們的齒，依次改變着方向。

* 在空間既不平行也不相交的兩個軸，稱爲交錯軸。

圓柱齒輪的**齒廓**，有漸開線和擺線兩種形狀。以後我們所討論的，祇爲具有漸開線齒廓的齒輪，卽所謂**漸開線齒輪**。因爲這種齒廓，與擺線相比較，有很多優點，所以近代機器製造中一般祇採用漸開線齒輪；它們的優點爲：

(1) 在切齒或裝配中，當軸間距離(簡稱**軸距**)改變時，其傳動的均勻性不受影響。

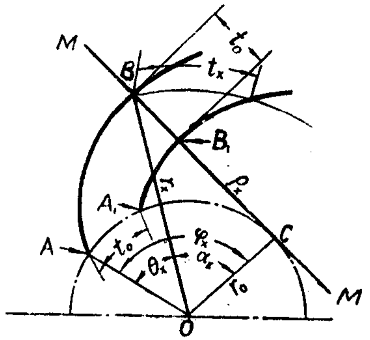
(2) 能使切齒刀具的齒廓簡化。

(3) 能使齒輪的幾何尺寸準確度的檢驗簡化。

§ 2 外嚙合的圓柱直齒輪

A. 漸開線及其性質

若在半徑爲 r_0 (圖 1) 的固定圓上，滾動*(不能滑動)一直線 MM，則此直線上的一點 B 的軌跡 AB，稱爲**漸開線**。這時半徑爲 r_0 的圓，稱爲**漸開線的基圓**，而滾動的直線 MM 稱爲**發生線**。



〔圖 1〕 齒輪的漸開線齒廓

圖 1 中表示出發生線的一個位置 MCM。漸開線上任一點 B 的位置，可用極座標決定：卽漸開角 θ_x 和向徑 r_x。基圓半徑 OA 和 OC 間的角(φ_x)，稱爲**漸開線展開角**；向徑 OB 和基圓半徑 OC 間的角 (α_x)，稱爲**壓力角**。

由圖 1 可知，漸開線上每一點的壓力角是各不相同的：在漸開線的

---

* 無滑動的滾動，又稱爲純滾動。

開始點(卽漸開線在基圓圓周上的一點,如 A 點),其壓力角等於零;離基圓圓周愈遠的點,其壓力角愈大。

因爲 C 點是發生線相對於基圓運動時的瞬時中心,所以線段 BC 爲漸開線上 B 點的曲率半徑 (ρ_x);因而 BC 的方向和漸開線在 B 點的法線的方向相重合,也就是說,漸開線的法線是和基圓相切的。由此可見,漸開線上任一點 B 的位置,也可以由 φ_x 和 ρ_x 的數值決定。

從圖 1 可得:

$$\varphi_x = \operatorname{tg} \alpha_x;$$

$$\theta_x = \varphi_x - \alpha_x = \operatorname{tg}\alpha_x - \alpha_x = \operatorname{inv} \alpha_x; \tag{2*}$$

$$\cos \alpha_x = \frac{r_0}{r_x}; \tag{3}$$

$$\rho_x = r_0 \varphi_x = r_0 \operatorname{tg} \alpha_x; \tag{4}$$

$$r_x = \sqrt{r_0^2 + \rho_x^2}. \tag{5}$$

綜合公式 (2),(4) 及 (5),可得漸開線以 θ_x 和 r_x 表示的極座標方程式爲

$$\theta_x = \frac{\sqrt{r_x^2 - r_0^2}}{r_0} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{r_x^2 - r_0^2}}{r_0}.$$

發生線上另一點 B_1 有其相當的漸開線 A_1B_1,它與漸開線 AB 是等距的。漸開線 AB 和 A_1B_1 沿法線的距離,等於發生線上的線段 BB_1。由此可見,同方向的相隣二齒廓 (AB 和 A_1B_1) 間的基圓圓周距離(t_0),等於它們在公法線上的距離 (BB_1)。距離 t_0 稱爲齒輪的**基圓齒距**。從圖 1 可見,任何圓周上的齒距 t_x,可按下式決定:

$$\frac{t_x}{t_0} = \frac{r_x}{r_0},$$

* $\operatorname{inv} \alpha_x$ 的數值隨 α_x 而變,見附錄。

由此 $$t_x=t_0\cdot\frac{r_x}{r_0}=\frac{t_0}{\cos\alpha_x}.\qquad(6)$$

如果齒輪的齒數爲 Z，則

$$t_0=\frac{2\pi r_0}{Z}.\qquad(7)$$

Б. 兩個直齒輪的嚙合

圖 2 表示兩個直齒輪的嚙合情形，它們的齒數各爲 Z_1 和 Z_2；此時，A——軸距，i——傳動比，C——徑向間隙，R_{e1} 和 R_{e2}——**齒頂圓**半徑，r_{01} 和 r_{02}——基圓半徑。

今後我們令 $Z_1<Z_2$，並且稱一對嚙合齒輪中的較小者爲**小齒輪**，較大者爲**大齒輪**，符號 1 是代表小齒輪，符號 2 是代表大齒輪。

從一般的嚙合理論可知：兩嚙合齒輪的齒廓（所謂**共軛齒廓**），在嚙合點應該有一公法線。因爲漸開線的法線是和基圓相切的，所以，與大齒輪及小齒輪的基圓相切的直線（A_1A_2），就是共軛齒廓的唯一公法線。任一嚙合點都必須在這一直線上。所以這直線（A_1A_2）稱爲**嚙合線**。

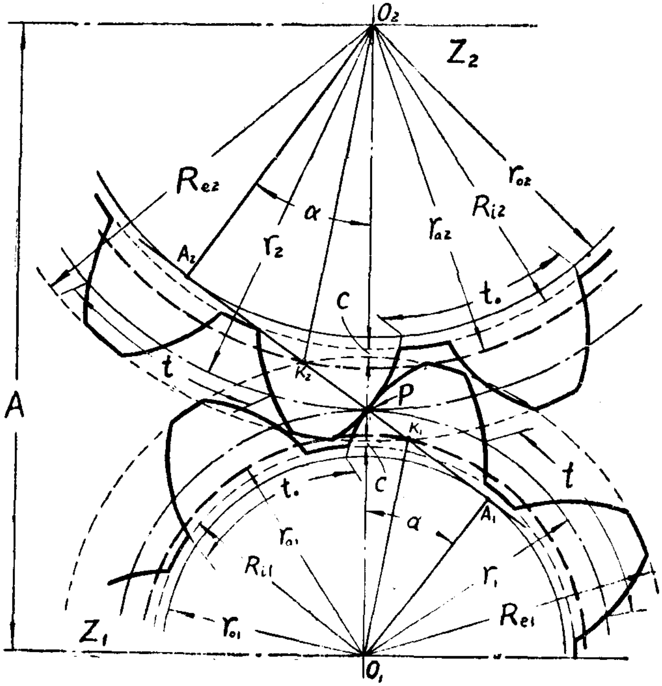
通過嚙合線上二切點（A_1 及 A_2）的兩個基圓半徑（O_1A_1 和 O_2A_2），彼此互相平行。這兩半徑與直線 O_1O_2（兩齒輪旋轉中心的連心線）所夾的角稱爲**嚙合角**。從圖 2 可得：

$$A=\frac{r_{01}+r_{02}}{\cos\alpha},$$

所以 $$\cos\alpha=\frac{r_{01}+r_{02}}{A}.\qquad(8)$$

因此，當 r_{01} 和 r_{02} 爲一定時，嚙合角的大小，僅隨軸距 A 而定。嚙合線與直線 O_1O_2 的交點 P 稱爲**嚙合節點**，通過 P 點而半徑各爲 r_1 和

r_2 的圓稱爲節圓。



〔圖 2〕 兩直齒輪的外嚙合

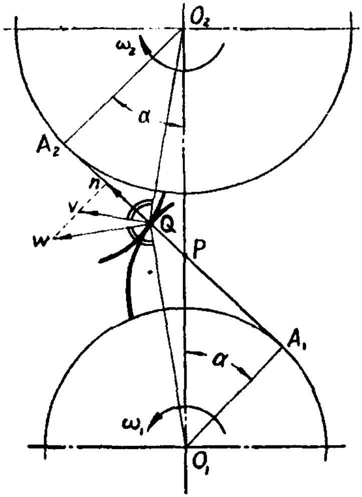
從圖 2 可知：

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{r_{01}}{\cos a}; \\ r_2 &= \frac{r_{02}}{\cos a}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

以 (9) 和 (3) 相比較，可知嚙合角 α 等於共軛齒輪的節圓上的壓力角 a_x。

在圖 3 中，設小齒輪爲主動輪，以角速度 ω_1 繞其中心 O_1 在反時

針方向旋轉，並推動大齒輪繞中心 O_2 旋轉，設此瞬間二齒廓的嚙合點爲嚙合線上的任一點 Q，並設此時大齒輪的角速度爲 ω_2.



〔圖 3〕 漸開線齒廓的傳動簡圖

若令向量 QW 表示小齒輪齒廓上 Q 點的圓周速度，則

$$\omega_1=\frac{QW}{O_1Q},$$

若令向量 QV 表示大齒輪齒廓上 Q 點的圓周速度，則

$$\omega_2=\frac{QV}{O_2Q}.$$

由嚙合的一般理論可知，對於共軛齒廓而言，QW 和 QV 的法向（卽沿 A_1A_2 方向）分速度必須相等，卽 $Qn=Qn$.

而因 $\triangle WnQ\sim\triangle QA_1O_1$，

所以 $$\frac{QW}{O_1Q}=\frac{Qn}{O_1A_1},$$

又因 $\triangle VnQ\sim\triangle QA_2O_2$，

所以 $$\frac{QV}{O_2Q}=\frac{Qn}{O_2A_2},$$

因此 $$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\dfrac{QW}{O_1Q}}{\dfrac{QV}{O_2Q}}=\frac{\dfrac{Qn}{O_1A_1}}{\dfrac{Qn}{O_2A_2}}=\frac{O_2A_2}{O_1A_1},$$

但是 $\triangle O_2PA_2\sim\triangle O_1PA_1$，

所以 $$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{O_2A_2}{O_1A_1}=\frac{O_2P}{O_1P},$$

卽
$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_{02}}{r_{01}},\tag{a}$$

或
$$\omega_1 r_1=\omega_2 r_2.\tag{б}$$

從 (a) 可知，當兩個漸開線共軛齒輪在相對運動時，他們的傳動比 $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ 爲一常數，等於它們的基圓半徑（或節圓半徑）的反比數值。

從 $(б)$ 可知，兩齒輪的節圓圓周速度，彼此相等，而因這兩個圓相切於 P 點，所以當兩個共軛齒輪在相對運動時，它們的節圓相互滚動，而無滑動。

由此可知，爲了能正確地嚙合，兩齒輪的節圓齒距 t 必須相等。因爲

$$\left.\begin{aligned} t_1&=\frac{2\pi r_1}{Z_1},\\ t_2&=\frac{2\pi r_2}{Z_2},\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

所以

$$t_1=t_2=t=\frac{2\pi r_1}{Z_1}=\frac{2\pi r_2}{Z_2}.$$

從公式 (6) 可得：

$$t_0=t\cos\alpha.\tag{11}$$

因爲 $t_1=t_2=t$，所以 $t_{01}=t_{02}=t_0$；換句話說，兩漸開線直齒輪正確嚙合的必要條件是它們的基圓齒距必須相等。比較公式(1)，(a)，$(б)$和(10)可得：

$$i=\frac{Z_2}{Z_1}=\frac{r_{02}}{r_{01}}.\tag{12}$$

因此，傳動比是由兩共軛齒輪的基圓半徑所決定的。綜上所述，我們可知：當兩個齒輪的基圓半徑（r_{01} 和 r_{02}）及齒數（Z_1 和 Z_2）爲一定值

時，它們的嚙合角 α、節圓半徑 r_1 和 r_2 以及節圓齒距 t，是依它們的軸距 A 而決定的。一般說來，軸距 A 可在相當大的範圍內變動。

對於一定的齒輪，其 r_0、Z 及 t_0 是固定的值，不隨軸距改變。同時從公式（7）可知，在這三個數值中，祇有兩個數值是獨立的。

齒頂圓（其半徑各為 R_{e1} 和 R_{e2}，見圖 2）與嚙合線的交點（K_2 和 K_1），稱為**極限嚙合點**。

漸開線在 K_1 和 K_2 兩點的曲率半徑可從圖 2 中求出：

$$\left.\begin{aligned}\rho_{a1}&=A_1K_1=A\sin\alpha-\sqrt{R_{e2}^2-r_{02}^2};\\ \rho_{a2}&=A_2K_2=A\sin\alpha-\sqrt{R_{e1}^2-r_{01}^2}.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

通過極限嚙合點 K_1 和 K_2 的圓周的半徑 r_{a1} 和 r_{a2}，可由下式決定：

$$\left.\begin{aligned}r_{a1}&=\sqrt{\rho_{a1}^2+r_{01}^2};\\ r_{a2}&=\sqrt{\rho_{a2}^2+r_{02}^2}.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

共軛齒廓在嚙合線的 $K_1K_2(=l)$ 線段上互相接觸，這一線段稱為**嚙合長度**。嚙合長度與基圓齒距的比值，稱為**重疊係數** ε。因此

$$\varepsilon=\frac{l}{t_0}.\tag{15}$$

從圖 2 可求得 l 的方程式：

$$l=\sqrt{R_{e1}^2-r_{01}^2}+\sqrt{R_{e2}^2-r_{02}^2}-A\sin\alpha.$$

所以

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{R_{e1}^2-r_{01}^2}+\sqrt{R_{e2}^2-r_{02}^2}-A\sin\alpha}{t_0}.\tag{16}$$

重疊係數愈大，表示同時參加嚙合的齒數愈多，也表示一對齒的嚙合時間愈長。

在小齒輪的齒頂圓和大齒輪的**齒根圓**之間的**實際徑向間隙** $C_{1,2}$ 以

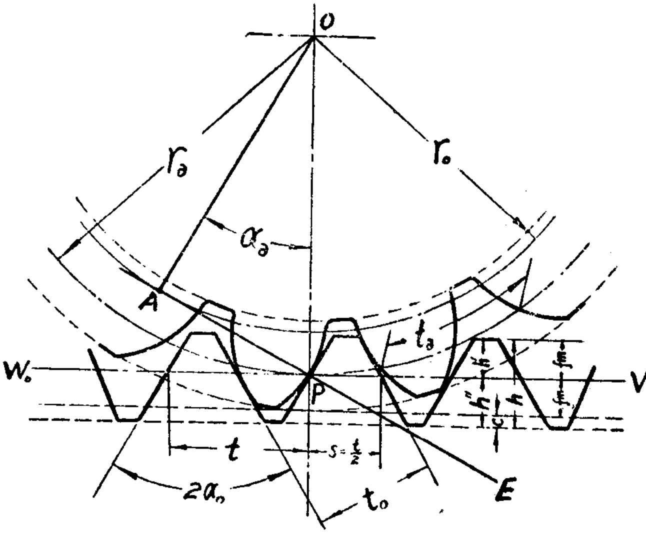
及在大齒輪的齒頂圓和小齒輪的齒根圓之間的實際徑向間隙 $C_{2,1}$ 可按下式決定：

$$\left.\begin{aligned} C_{1,2}&=A-(R_{e1}+R_{i2});\\ C_{2,1}&=A-(R_{e2}+R_{i1}). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式中 R_{i1} 和 R_{i2} ——小齒輪和大齒輪的齒根圓半徑。

B.　直齒輪與齒條的嚙合

漸開線直齒輪和齒條的嚙合（圖 4），可以視爲兩個共軛齒輪嚙合



〔圖 4〕　直齒輪和齒條的嚙合

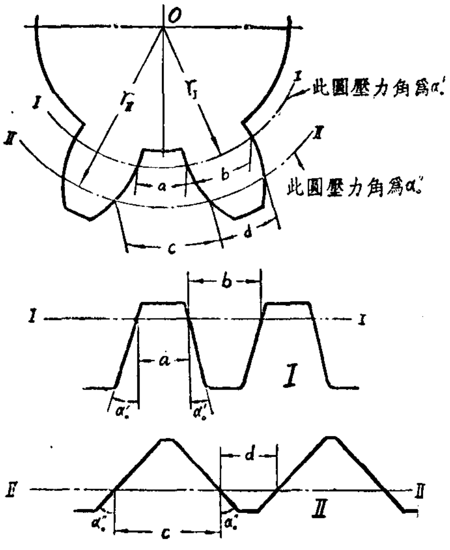
的個別情形；此時，兩共軛齒輪中的一個齒輪，例如圖 2 中的大齒輪，其中心 O_2 移至無窮遠；因此，半徑爲 r_2 的節圓轉變爲節線 W_0-W_0（圖 4），而該齒輪的漸開線齒廓，轉變爲直線齒廓，這直線垂直於嚙合線 AE，這是因爲曲率中心在嚙合線上無窮遠處的緣故。

齒條的齒距 t（沿平行於節線的方向度量）以及壓力角 α_0，在齒條的齒廓整個高度中，爲不變的數值。齒條的齒廓爲一梯形，其兩側面的夾角爲 $2\alpha_0$，角 α_0 稱爲齒條的齒廓角。

和漸開線齒輪一樣，在齒條上，同方向的相隣二齒廓間的垂直距離 t_0 亦稱爲基圓齒距，由公式（6）得：

$$t_0 = t\cos\alpha_0. \tag{18}$$

當漸開線齒輪與齒條嚙合時，基圓齒距相等的條件，仍然適用。因此，對於一定的齒輪，可能有很多齒條與它嚙合，祇要它們的齒距 t_x 和齒廓角 α_x 各各相等。



〔圖 5〕 與一齒輪嚙合的各齒條

例如，圖 5 所示的齒輪 O，在其半徑爲 $r_{\rm I}$ 的圓上：漸開線的壓力角爲 α_0'，圓弧齒槽寬度爲 a，圓弧齒厚爲 b；在其半徑爲 $r_{\rm II}$ 的圓上，壓力角爲 α_0''，圓弧齒槽寬度爲 c，圓弧齒厚爲 d；則圖中所示的兩齒條 I 及 II 均能與該齒輪嚙合：前齒的齒廓角爲 α_0'，後者的齒廓角爲 α_0''；但這兩種嚙合情形中的節線和節圓則不相同：前者爲 I-I，後者爲 II-II。然而它們的基圓齒距是相等的，即

$$(a+b)\cos\alpha_0' = (c+d)\cos\alpha_0''.$$

且等於該齒輪的基圓齒距。