高考题题高分丛书

高考数学

《丛书》总策划：江夏 肖毅 余健棠

解答题
题题高分

数学科目主编：刘佛清 梁法驯
本　书主编：梁法驯 刘佛清

· 汇集近十年高考试题及答案
· 提供一批高考仿真试题供实战演练
· 分析试题点明获取高分的思路与技法
· 适用于“3+X”、“3+2” 模式

3+

中南大学出版社

TITIGAOFEN

高考题题高分丛书

高考数学解答题题题高分

本书主编：梁法驯　刘佛清
数学科目主编：刘佛清　梁法驯
丛书总策划：江　夏　肖　毅　佘健棠

中南大学出版社

内容提要

本书内容由两部分组成，第一部分，试题展示分析，汇集了1991～2001年普通高等学校招生全国统一考试的解答题，按现行课本顺次分类，共13章，为了便于单元复习和测试训练，试题的安排基本上与教材同步，每道题都给出了解答过程，并将试题与解答过程分开编写；第二部分，汇编了24套仿真解答试题，先展示后解答，安排了两套完整的2002年高考模拟试卷并提供详细的解答。

本书适合全国高考"3+X"、"3+2"模式，适用于全国高中统编版、实验版教材，是高三学生在三轮复习中的备考必备书，也可供高二学生作超前复习参考。

高考数学解答题题题高分

本书主编　梁法驯　刘佛清

□责任编辑　谢贵良　李立鹏
□策划编辑　刘辉
□出版发行　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　邮编：410083
发行科电话：0731-8876770　传真：0731-8829482
电子邮件：csucbs @ public. cs. hn. cn
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　湖南望城湘江印刷厂

□开　　本　787×1092 1/16　□印张　10.25　□字数　330千字
□版　　次　2001年8月第1版　□2001年8月第1次印刷
□印　　数　00001—13000
□书　　号　ISBN 7-81061-429-0/G・101
□定　　价　10.00元

《丛书》总序

为了适应“3+X”、“3+2”高考改革的需要，为了给高中学生提供一套科学的、贴近高考实战的复习资料，我们特组织湖北省武汉、黄冈、荆州地区的一批高中的特级教师和对高考规律及高考试题解题方法有深入研究的教授、专家共同编撰《高考题题高分丛书》。

我们认为，一套科学的贴近高考实战的复习资料应具备五个条件：

第一、必须对近几年的高考试题有所介绍、有所归纳并有中肯的分析。借鉴、了解近几年的考试题目，从中分析出避免错误、获得高分的解题思路、方法与技巧，这对于今天考生提高应试能力具有很大的作用。

第二、必须有覆盖面很广的复习测试题或模拟题。所设计的复习测试题或模拟题应有与历届各科高考试题相对应的较广的覆盖面。

第三、必须有相应的承前性与预测性。承前性是指在制作复习自测题或模似题时要使高考试卷的结构形式保持相对的完整性。预测性是指对未来高考检验知识的方式、形式应有预测，并根据预测精心制作复习测试题或模拟题，使考生在演练中获得较大的效益。

第四、必须给予复习者以仿真的考时练。也就是说，复习测试题或模拟题在份量、标准、时间等方面都应与高考试卷的要求一样，使演习的考生都有仿真的实战感受。

第五、必须教给考生避免错误与获取高分的方法。无论是历届高考试题还是自测题、模拟题，都应仔细分析，使考生熟练地掌握避免错误、获取高分的方法，且这种方法应该是简单明确、易于掌握的。

《高考题题高分丛书》正是体现了以上五条标准。这套丛书首批书目是与语文、数学、英语高考试卷中的试题题型相对应，每类题型编撰一种书（共十二种）。

语文科目由江夏、肖毅教授主编，共四种书：《高考语文作文题题高分》、《高考语文文言文题题高分》、《高考语文现代文题题高分》、《高考语文综合题题题高分》。

数学科目由刘佛清特级教师、梁法驯教授主编。共三种书：《高考数学选择题题题高分》、《高考数学填空题题题高分》、《高考数学解答题题题高分》。

英语科目由张冰梅特级教师主编。共五种书：《高考英语单项填空题题高分》、《高考英语完形填空题题高分》、《高考英语阅读理解题题高分》、《高考英语短文改错、书面表达题题高分》、《高考英语听力题题高分》。

这套丛书中，每本书都有两部分内容：第一部分是将近十年高考试卷中同类的试题汇集在一起，并根据高考评分标准对近几年的试题进行分析，传授考生获得高分的良策；同时将前几年的试题展示在书中，供考生演练。第二部分是根据国家新的《教学大纲》和《考试说明》及“3+X”、“3+2”高考命题的趋势，参照高考该类型试题的实战时间、份量、标准，提供一批仿真试题，供考生作“考时练”，帮助考生进一步掌握获得高分的解题思路和方法。同时，每本书都附录有两套“高考语文（或数学、或英语）模拟试卷”（全卷），供考生全面测试自己应考的能力。

在策划和编撰这套《丛书》的过程中，得到黄冈市、荆州市及武汉大学附属中学、华中科技大学附属中学、湖南师范大学附属中学等一批特级教师和高级教师的支持，同时得到了张元忠教授、刘其寿校长的支持。在此，对他们表示最衷心的感谢！

中南大学出版社、新疆大学出版社社领导、有关编辑在这套《丛书》的策划、组稿、质量把关等方面做了大量的有效的工作，武汉诺亚信息传播有限责任公司对《丛书》的编撰出版给予全力的支持，在此一并表示诚挚的谢意！

《丛书》总策划：江　夏　肖　毅　余健棠

前　言

高考数学选拔的特点是以解题能力的高低为标准；考生是以解题的速度和解题的正确率来表现能力的强弱，高考复习要以解题为中心，巩固“三基”，提高解题能力为目的。为了配合高考复习解题训练，我们编写了这套“高考题题高分丛书”，《高考数学解答题题题高分》是该套丛书数学科目三种书目之一.

目前高考数学试卷由选择题、填空题和解答题三类题目组成，其中选择题占全卷150分的40%，即60分，题量为6个，填空题占全卷总分的10.7%，即16分，题量为4个.解答题占全卷总分的49.3%，即74分，题量为6个左右.

试卷合成后，分为Ⅰ卷和Ⅱ卷，其中Ⅰ卷为选择题，Ⅱ卷为非选择题，它要求正确写出解答过程.全卷答题时间为120分钟.

试卷中的解答题包括计算题、证明题、讨论题和应用题等。这些题目一般综合性较强，往往是很多考生感到困难、容易丢分的部分。

本书分为两大部分：第一部分为试题展示分析。它汇编了1991年至2001年普通高等学校招生全国统一考试试卷中的解答题，按现行课本顺序分为13章，为了便于单元复习和测试训练，试题安排基本上与教材同步，每道题都给出解答过程，并将试题与解答过程分开编写，第二部分为模拟仿真，汇编了24套仿真解答题，先展示后解答.

本书由梁法驯教授和特级教师刘佛清主编，参加编写人员还有伊彦波、王圣中、王先东、冯先庭、万维勇、杨学耀、郑家鲸、贺斌、陶伟宏、陈坚球、马锐雄.

由于时间仓促和限于水平，书中错漏在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2001年8月于武汉

目　录

第一部分　试题展示分析

第二部分　模拟仿真

第一部分 展示分析

壹 代数篇

一、幂函数、指数函数和对数函数

考试内容和考试要求

(1) 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

(2) 了解映射的概念,在此基础上理解函数及其有关的概念,掌握互为反函数的函数图像间的关系.

(3) 理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像.

(4) 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图像和性质,并会解简单的指数方程和对数方程.

试题展示

1. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2,满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$,

(Ⅰ) 当 $x\in(0,x_1)$时,证明 $x<f(x)<x_1$;

(Ⅱ) 设函数 $f(x)$的图像关于直线 $x=x_0$ 对称,证明 $x_0<\frac{x_1}{2}$.

2. 设计一幅宣传画,要求画面面积为 4840cm^2,画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$,画面的上、下各留 8cm 空白,左、右各留 5cm 空白。怎样确定画面的高与宽尺寸,能使宣传画所用纸张面积最小?

3. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$.

(Ⅰ) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(Ⅱ) 求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数.

4. 根据函数单调性的定义,证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

5. 解方程 $3^{x+2}-3^{2-x}=80$.

6. 已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一个根是 2,求 a 的值和方程其余的根.

7. 解方程 $\sqrt{3\lg x-2}-3\lg x+4=0$.

8. 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图像交于 A,B 两点,分别过点 A,B 作 y 轴的平行线与函数 y

$=\log_2 x$ 的图像交于 C, D 两点.(Ⅰ)证明点 C、D 和原点 O 在同一条直线上;(Ⅱ)当 BC 平行于 x 轴时,求点 A 的坐标.

9. 已知 $f(x)=\log_a \dfrac{1+x}{1-x}(a>0, a\neq 1)$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$的定义域;

(Ⅱ) 判断 $f(x)$的奇偶性并予以证明;

(Ⅲ) 求使 $f(x)>0$ 的 x 取值范围.

10. 某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养殖提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/kg,政府补贴为 t 元/kg.根据市场调查,当 $8\leqslant x\leqslant 14$ 时,淡水鱼的市场日供应量 Pkg 与市场日需求量 Qkg 近似地满足关系:

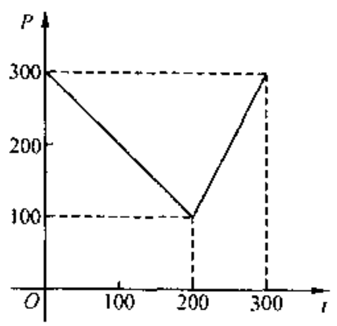
$P=1000(x+t-8)\quad (x\geqslant 8, t\geqslant 0),\quad Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\quad (8\leqslant x\leqslant 14).$

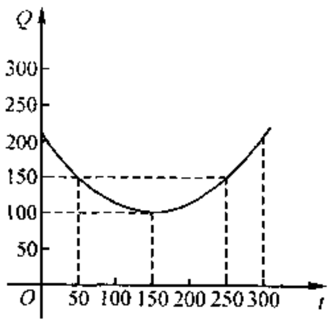
当 $P=Q$ 时的市场价格称为市场平衡价格.

(Ⅰ) 将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;

(Ⅱ) 为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少为每千克多少元?

11. 某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从 2 月 1 日起的 300 天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用左图中的一条折线表示;西红柿的种植成本与上市时间的关系用右图的抛物线表示.





(第 11 题图)

(Ⅰ) 写出左图中表示的市场售价与时间的函数关系 $P=f(t)$;

写出右图中表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$;

(Ⅱ) 认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市的西红柿纯收益最大?

(注:市场售价和种植成本的单位:元/10^2kg,时间单位:天)

12. 甲、乙两地相距 s km,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c km/h.已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度(km/h)的平方成正比,且比例系数为 b;固定部分为 a 元.

(1) 把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(km/h)的函数,并指出这个函数的定义域;

(2) 为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

解答分析

1.[1997 年,理,第三(24)题]

解法 1 (Ⅰ)令 $F(x)=f(x)-x$,因为 x_1, x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的根,所以 $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.当 $x\in(0, x_1)$时,由于 $x_1<x_2$ 得$(x-x_1)(x-x_2)>0$,又 $a>0$ 得 $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)>0$,即

$x<f(x)$.又$\because x_4=f(x)-x_1-[x+F(x)]=x_1-x+a(x_1-x)(x-x_2)=(x_1-x)[1+a(x-x_2)]$.因为$0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$,所以$x_1-x>0,1+a(x-x_2)=1+ax-ax_2>1-ax_2>0$.得$x_1-f(x)>0$,由此得$f(x)<x_1$.

(Ⅱ)依题意知$x_0=-\frac{b}{2a}$.因为x_1,x_2是方程$f(x)-x=0$的根,即x_1,x_2是方程$ax^2+(b-1)x+c=0$的根,所以$x_1+x_2=-\frac{b-1}{a},x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{a(x_1+x_2)-1}{2a}=\frac{ax_1+ax_2-1}{2a}$.

因为$ax_2<1$,所以$x_0<\frac{ax_1}{2a}=\frac{x_1}{2}$.

解法2 (Ⅰ)$\because x_1,x_2$是$f(x)-x=0$的两个根,故可设$f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$,令$g(x)=a(x-x_2)$.$\because a>0$,则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增,而

$$g(0)=-ax_2>-1,g(x_1)=a(x_1-x_2)<0,$$

当$0<x<x_1$时,$-1<g(x)<0$,即

$$-1<g(x)=\frac{f(x)-x}{x-x_1}<0,\therefore x<f(x)<x_1.$$

(Ⅱ)$\because x_0=-\frac{b}{2a},0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$,又$x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}$,则$x_1=-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}-x_2>-\frac{b}{a}=2x_0,\therefore x_0<\frac{x_1}{2}$.

解法3 (Ⅰ) $\because x_1,x_2$是$f(x)-x=0$的两个根,则

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+x.$$

于是$(f(x)-x)(f(x)-x_1)=[a(x-x_1)(x-x_2)][a(x-x_1)(x-x_2)+x-x_1]$

$$=a^2(x-x_1)^2(x-x_2)\left(x-x_2+\frac{1}{a}\right),$$

$\because 0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.当$0<x<x_1$时,$x-x_1<0,x-x_2+\frac{1}{a}=x+\left(\frac{1}{a}-x_2\right)>x>0$,则

$$(f(x)-x)(f(x)-x_1)<0.$$

$\because x<x_1,\therefore x<f(x)<x$.

(Ⅱ)同解法2.

解法4 由解法2知(Ⅱ)成立.利用(Ⅱ)证(Ⅰ) $\because$由(Ⅱ)$x_0<\frac{x_1}{2},x_0=-\frac{b}{2a}$,则

$$ax_1+b>0.\because a>0,0<x<x_1,$$

有 $$ax+b<ax_1+b,\therefore(ax+b)x<(ax_1+b)x<(ax_1+b)x_1,$$

故$ax^2+bx+c<ax_1^2+bx_1+c$,即$f(x)<f(x_1)=x_1$ 又由$a>0,x_1,x_2$为$f(x)-x=0$的两个根($x_1<x_2$),则$f(x)-x$在$[0,x_1]$上为减函数,则

$$0<x<x_1\text{时},f(x)-x>f(x_1)-x_1=0.$$

$$\therefore f(x)>x.\therefore\text{当}x\in[0,x_1]\text{时},x<f(x)<x_1.$$

本题是考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识,考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

2.[2001年,文,第三(21)题]

解法1 设画面高为$x$cm,宽为λxcm,则$\lambda x^2=4840$.

设纸张面积为S,有

$$S=(x+16)(\lambda x+10)=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160,$$

将$x=\frac{22\sqrt{10}}{\sqrt{\lambda}}$代入上式,得$S=5000+44\sqrt{10}\left(8\sqrt{\lambda}+\frac{5}{\sqrt{\lambda}}\right)$.

当$8\sqrt{\lambda}=\frac{5}{\sqrt{\lambda}}$,即$\lambda=\frac{5}{8}\left(\frac{5}{8}<1\right)$时,$S$取得最小值.

此时，高：$x=\sqrt{\dfrac{4840}{\lambda}}=88\text{cm}$，宽：$\lambda x=\dfrac{5}{8}\times 88=55\text{cm}$.

答：画面高为 88cm，宽为 55cm 时，能使所有纸张面积最小.

解法 2 设长为 $x$cm，高为 λxcm，则 $\lambda x^2=4840$

$$S=(\lambda x+16)(x+10)=5000+10\lambda x+16x\geqslant 2\sqrt{160\lambda x^2}+5000=6760$$

当且仅当 $10\lambda x=16x$，即 $\lambda=\dfrac{8}{5}$ 时有最小值.

此时长 $x=\sqrt{\dfrac{4840}{\lambda}}=55\text{cm}$，高 $\lambda x=\dfrac{8}{5}\times 55=88\text{cm}$.

本题主要考查建立函数关系式、求函数的最小值的方法及运用数学知识解决实际问题的能力.

3.［2000 年，理，文，第三(19)题］

解 （Ⅰ）**解法 1** 不等式 $f(x)\leqslant 1$ 即 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$. 由此得

$$ax+1\geqslant 1\Rightarrow ax\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 0(a>0)$$

所以原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\leqslant(ax+1)^2\\ x\geqslant 0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\geqslant 0\\ (a^2-1)x^2+2ax\geqslant 0\end{cases}$$

所以当 $0<a<1$ 时，所给不等式的解集为 $\left\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}\right\}$；当 $a\geqslant 1$ 时，所给不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$.

此种处理方法体现了本题对解不等式时的等价转化能力和分类讨论思想的考查.

解法 2 在同一坐标系内作出函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 和 $y=ax+1$ 的图像（如图）.

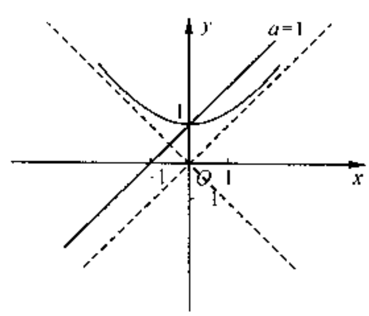
$y=\sqrt{x^2+1}$ 表示的图形是等轴双曲线 $y^2-x^2=1$ 在 x 轴上方的部分；$y=ax+1$ 表示过定点 $(0,1)$ 且斜率为 a 的直线.

不等式 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$ 的解集就是直线 $y=ax+1$ 在曲线 $y=\sqrt{x^2+1}$ 上方的部分（包括二者的交点）所对应的 x 值的集合.

当 $a\geqslant 1$ 时，直线 $y=ax+1$ 与曲线 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的交点为 $(0,1)$，因而此时所给不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 0\}$；

当 $0<a<1$ 时，由方程 $\sqrt{x^2+1}=ax+1$ 可求得直线与曲线交点的横坐标为 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$，所以所给不等式的解集为

$$\left\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant\frac{2a}{1-a^2}\right\}.$$



（第 3 题图）

此种解法充分体现了数形结合的思想在解不等式中的应用.

解法 3 三角代换法

设 $x=\tan\alpha$ $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 则有

$\sqrt{\tan^2\alpha+1}-a\tan\alpha\leqslant 1\Rightarrow \sec\alpha-a\tan\alpha\leqslant 1\Rightarrow 1-a\sin\alpha\leqslant\cos\alpha$

$$\Rightarrow 1-\cos\alpha\leqslant a\sin\alpha\Rightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\leqslant 2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant a\cos\frac{\alpha}{2}\text{ 且 }\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant 0\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{2}\leqslant a\text{ 且 }\frac{\alpha}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right).$$

$\therefore$ 当 $0<a<1$ 时有 $\quad 0\leqslant\dfrac{\alpha}{2}\leqslant\arctan a\Rightarrow 0\leqslant\alpha\leqslant 2\arctan a\Rightarrow 0\leqslant\tan\alpha\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}$.

当 $a\geqslant 1$ 时 $0\leqslant\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ 有 $\quad 0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\alpha\geqslant 0$,

故不等式当$0<a<1$时解集为$\left[0,\frac{2a}{1-a^2}\right]$，当$a\geqslant1$时解集为$[0,+\infty)$.

(Ⅱ) 在区间$[0,+\infty)$上任取x_1,x_2，使得$x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_2^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

(ⅰ) 当$a\geqslant1$时，　　$\because\ \frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$，$\therefore\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$，

又$x_1-x_2<0$，$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，即　$f(x_1)>f(x_2)$.

所以，当$a\geqslant1$时，函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是单调递减函数.

(ⅱ) 当$0<a<1$时，在区间$[0,+\infty)$上存在两点$x_1=0,x_2=\frac{2a}{1-a^2}$，满足$f(x_1)=1,f(x_2)=1$，即$f(x_1)=f(x_2)$，所以函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上不是单调函数.

综上，当且仅当$a\geqslant1$时，函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数.

本问题以函数的单调性为引线，考查了比较两个实数(或代数式)大小的基本方法——差值比较法，突出了基础知识、基本技能、基本方法，考查了运算、推理、分析和解决问题的能力，同时又一次体现了对分类讨论数学思想方法的考查.

4. [1991年，理，文，第三(24)题]

证法1　利用函数单调性的定义，结合分类讨论的思想证明.在$(-\infty,+\infty)$上任取x_1,x_2，且$x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2),$$

$$\because\quad x_1<x_2,\quad\therefore\quad x_1-x_2<0.$$

当$x_1x_2<0$时，有　　$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$.

当$x_1x_2\geqslant0$时，有　　$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$.

故对一切$x_1<x_2$，均有　　$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$，$f(x_2)<f(x_1)$.

所以函数$f(x)=-x^3+1$在$x\in\mathbf{R}$上是减函数.

证法2　利用函数单调性的定义，结合均值不等式证明.任取$x_1<x_2,x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则

$f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$. $\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$.

$\because x_1,x_2$不同时为零，$\therefore x_1^2+x_2^2>0$.又因

$$x_1^2+x_2^2>\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\geqslant|x_1x_2|\geqslant-x_1x_2,\ \therefore\quad x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0.$$

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$，即　$f(x_2)<f(x_1)$.

所以，函数$f(x)=-x^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

证法3　利用配方证明.任取$x_1<x_2,x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

$\because\quad x_1<x_2,\quad\therefore\quad x_1-x_2<0.\quad\because\quad x_1,x_2$不同时为零，

$$\therefore\quad x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0,$$

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)<0$.　即　$f(x_2)<f(x_1)$.

所以函数$f(x)=-x^3+1$在$x\in\mathbf{R}$上是减函数.

5. [1995年，文，第三(21)题]

解　设$y=3^x$，则原方程可化为

$$9y^2-80y-9=0.\quad 解得\quad y_1=9, y_2=-\frac{1}{9}.$$

方程 $3^x=-\frac{1}{9}$ 无解.由 $3^x=9$ 得 $x=2$,所以原方程的解为 $x=2$.

6. [1992 年,理,文,第三(24)题]

解法 1　$\because 2$ 是原方程的根,$\therefore 2a^{4-2}-7a^{2-1}+3=0$,即 $2a^2-7a+3=0$.解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=3$.

i)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,原方程化为 $2\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2}-7\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+3=0$.

解得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\frac{1}{2}$ 或 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=3$.从而有两根 $x=2, x=1+\log_{\frac{1}{2}}3$.

ii)当 $a=3$ 时,原方程化为 $2\cdot 3^{2x-2}-7\cdot 3^{x-1}+3=0$.

解得 $3^{x-1}=\frac{1}{2}$ 或 $3^{x-1}=3$.从而有两根 $x=1-\log_3 2, x=2$.

综上所述,知:当 $a=\frac{1}{2}$ 时,方程的另一根为 $x=1+\log_{\frac{1}{2}}3$;当 $a=3$ 时,方程的另一根为 $x=1-\log_3 2$.

解法 2　设 $a^{x-1}=y$,则原方程为 $2y^2-7y+3=0$.

解得 $y_1=\frac{1}{2}, y_2=2$.即 $a^{x-1}=\frac{1}{2}$,或 $a^{x-1}=3$.

$\because$ 2 是原方程的根,$\therefore$ 2 也是关于 x 的方程 $a^{x-1}=\frac{1}{2}$ 或 $a^{x-1}=3$ 的根.解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=3$.

以下同解法 1.

7. [1999 年,文,第三(19)题]

解　设 $\sqrt{3\lg x-2}=y$,原方程化为 $y-y^2+2=0$.解得　$y=-1, y=2$.

因为　$\sqrt{3\lg x-2}\geqslant 0$,所以将 $y=-1$ 舍去.

由　$\sqrt{3\lg x-2}=2$,　得　$\lg x=2$,

所以 $x=100$.经检验,$x=100$ 为原方程的解.

8. [1997 年,文,第三(24)题]

解　(Ⅰ)设 A, B 的横坐标分别为 x_1, x_2 由题设知,$x_1>1, x_2>1$,则点 A, B 纵坐标分别为 $\log_8 x_1, \log_8 x_2$.因为 A, B 在过点 O 的直线上,$\therefore \frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$ 点 C, D 坐标分别为 $(x_1, \log_2 x_1)$, $(x_2, \log_2 x_2)$.由于 $\log_2 x_1=\frac{\log_8 x_1}{\log_8 2}=3\log_8 x_1$, $\log_8 x_2=\frac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_2$, OC 的斜率 $k_1=\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{3\log_8 x_1}{x_1}$,

OD 的斜率 $k_2=\frac{\log_2 x_2}{x_2}=\frac{3\log_8 x_2}{x_2}$,由此可知,$k_1=k_2$.

即 O, C, D 在同一条直线上.

(Ⅱ)由于 $BC /\!/ x$ 轴,知 $\log_2 x_1=\log_8 x_1$,即得 $\log_2 x_1=\frac{1}{3}\log_8 x_2$,$\therefore x_2=x_1^3$.代入 $x_2\log_8 x_1=x_1\log_8 x_2$ 得 $x_1^3\log_8 x_1=3x_1\log_8 x_1$.由于 $x_1>1$,知 $\log_8 x_1\neq 0$.$\therefore x_1^3=3x_1$.

$\because x_1>1$,$\therefore$ 解得 $x_1=\sqrt{3}$.于是点 A 的坐标为 $(\sqrt{3}, \log_8\sqrt{3})$.

9. [1993 年,文,理,第三(24)题]

解　(Ⅰ)由对数函数的定义知 $\frac{1+x}{1-x}>0$.如果 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 则 $-1<x<1$;

如果 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 则不等式组无解.故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

(Ⅱ)$\because f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$,$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(Ⅲ)(ⅰ)对 $a>1$，$\log_a\dfrac{1+x}{1-x}>0$ 等价于 $\dfrac{1+x}{1-x}>1$， ①

而从(Ⅰ)知 $1-x>0$，故①式等价于 $1+x>1-x$，于是 $x>0$. 故对 $a>1$，当 $x\in(0,1)$ 时，有 $f(x)>0$.

(ⅱ)对 $0<a<1$，$\log_a\dfrac{1+x}{1-x}>0$ 等价于 $0<\dfrac{1+x}{1-x}<1$， ②

而从(Ⅰ)知 $1-x>0$，故②式等价于 $-1<x<0$. 故对 $0<a<1$，当 $x\in(-1,0)$ 时，有 $f(x)>0$.

10.［1995 年，理，第三(24)题］

解 (Ⅰ)依题设有 $1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2}$，化简得

$$5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0.$$

当判别式 $\Delta=80-16t^2\geqslant 0$ 时，可得

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

由 $\Delta\geqslant 0$，$t\geqslant 0$，$8\leqslant x\leqslant 14$，得不等式组：

$$①\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant 8-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14;\end{cases}\qquad ②\begin{cases}0\leqslant t\leqslant\sqrt{50},\\ 8\leqslant 8-\dfrac{4}{5}t-\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 14.\end{cases}$$

解不等式组①，得 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{10}$；不等式组②无解. 故所求的函数关系式为

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

函数的定义域为 $[0,\sqrt{10}]$.

(Ⅱ)为使 $x\leqslant 10$，应有 $8-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leqslant 10$，$t^2+4t-5\geqslant 0$.

解得 $t\geqslant 1$ 或 $t\leqslant -5$，由 $t\geqslant 0$ 知 $t\geqslant 1$. 从而政府补贴至少为每千克 1 元.

本题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力，以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法. 本题反映了我国当前的经济生活，要求学生运用所学的数学知识去观察分析社会生活，把社会生活问题转化为数学问题去解决. 由于本题的文字叙述较长，又涉及到较多的专有名称，如"政府补贴"，"市场价格"，"平衡价格"等，要求学生具有一定的阅读理解能力，弄清题意，分析各量间的关系. 而在建立数学模型上，本题要求不高，因题中已经给出了基本模型，只要求学生去化简求解.

11.［2000 年，理，第三(21)题］

(Ⅰ)由左图可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t, 0\leqslant t\leqslant 200,\\ 2t-300, 200<t\leqslant 300.\end{cases}$$

由右图可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100, 0\leqslant t\leqslant 300.$$

根据函数图像建立函数关系式是函数的基本问题之一，本题所给出的函数图像也是最基本的函数图像，运用待定系数法是确定函数解析式的基本方法. 如原题左图，当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，设 $f(t)=kt+b$，则有

$$\begin{cases}200k+b=100,\\ 0+b=300,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}k=-1,\\ b=300;\end{cases}\ \therefore 当\ 0\leqslant t\leqslant 200\ 时，f(t)=300-t;$$

再如由题右图知，抛物线顶点坐标为 $(150,100)$，故可设 $g(t)=a(t-150)^2+100$，则有

$$150=a(50-150)^2+100,\Rightarrow a=\frac{1}{200},$$

$\therefore$ 当 $0\leqslant t\leqslant 300$ 时， $g(t)=\dfrac{1}{200}(t-150)^2+100$.

(Ⅱ)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意得 $h(t)=f(t)-g(t)$，即

$$h(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, & 0\leqslant t\leqslant 200.\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2}, & 200< t\leqslant 300.\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100,$$

所以，当 $t=50$ 时，$h(t)$ 取得区间 $[0,200]$ 上的最大值 100；当 $200<t\leqslant 300$ 时，配方整理得

$$h(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100,$$

所以，当 $t=300$ 时，$h(t)$ 取得区间 $(200,300]$ 上的最大值 87.5.

综上，由于 $100>87.5$，$h(t)$ 在区间 $[0,300]$ 上可以取得最大值 100，此时 $t=50$，即从 2 月 1 日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大.

本题主要考查由图像建立函数关系，由二次函数的性质求最值等知识和能力，体现了待定系数法、数形结合和分类讨论数学思想方法的应用，且试题背景公平，易被大多数学生所接受，充分体现了试题的功能.

12.［1997 年，文，第三(22)题］

解法 1 (1) 依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{s}{v}$，全程运输成本为 $y=a\cdot\frac{s}{v}+bv^2\cdot\frac{s}{v}=s\cdot\left(\frac{a}{v}+bv\right)$，故所求函数及其定义域为 $y=s\left(\frac{a}{v}+bv\right)$，$v\in(0,c]$.

(2) 依题意 s,a,b,v 都为正数，故有 $s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2s\sqrt{ab}$. 当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$，即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，上式中等号成立. 若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$，则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，全程运输成本 y 最小. 若 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$，当 $v\in(0,c]$ 时，有 $s\left(\frac{a}{v}+bv\right)-s\left(\frac{a}{c}+bc\right)=s\left[\left(\frac{a}{v}-\frac{a}{c}\right)+(bv-bc)\right]=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv)$. 因为 $c-v\geqslant 0$，且 $a>bc^2$，故有 $a-bcv\geqslant a-bc^2>0$，所以，$s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant s\left(\frac{a}{c}+bc\right)$，且仅当 $v=c$ 时，等号成立. 也即当 $v=c$ 时，全程运输成本 y 最小.

综上知，为使全程运输成本 y 最小，当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时行驶速度应为 $\frac{\sqrt{ab}}{b}$；当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时行驶速度应为 c.

解法 2 (1) 同解法 1.

(2) $\because$ s,a,b,v 都是正数，有 $s\left(\frac{a}{v}+bv\right)\geqslant 2s\sqrt{ab}$. 当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$ 即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时取等号，①若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，全程运输成本最小. ②当 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，有 $v<\sqrt{\frac{a}{b}}$，设 $v_1,v_2\in(0,c]$ 且 $v_1<v_2$，此时

$$y_1-y_2=bs(v_1-v_2)+\frac{as(v_2-v_1)}{v_1v_2}=\frac{s(v_1-v_2)(bv_1v_2-a)}{v_1v_2}.$$

$$\because v_1v_2<\frac{a}{b}.\therefore bv_1v_2<a,$$

故 $v_1v_2<\frac{a}{b}$，$\therefore bv_1v_2<a$，故 $y_1-y_2<0$，即 y 为减函数. 此时，$v=c$，全程运输成本最小.

解法 3 $\because$ 函数 $y=x+\frac{k}{x}(k>0)$，$x\in(0,+\infty)$，当 $x\in(0,\sqrt{k})$ 时，y 单调减，当 $x\in(\sqrt{k},+\infty)$ 时，y 单调增，当 $x=\sqrt{k}$ 时，y 取得最小值. 而成本函数为 $y=sb\left(v+\frac{\frac{a}{b}}{v}\right)$，$v\in(0,c]$. $\therefore$ 若 $\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$ 时，则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，y 最小. 若 $\sqrt{\frac{a}{b}}>c$ 时，则当 $v=c$ 时，y 最小. $\therefore$ 为使 y 最小，当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$，速度应为 $\frac{\sqrt{ab}}{b}$；当

$\frac{\sqrt{ab}}{b} > c$ 时，速度应为 c.

本题主要考查建立函数关系不等式性质、最大值、最小值的求法等基础知识.

二、三角函数

考试内容和考试要求

(1) 理解弧度的意义，并能正确地进行弧度和角度的换算.

(2) 掌握任意角的三角函数的定义、三角函数的符号、三角函数的性质、同角三角函数的关系式与诱导公式，了解周期函数和最小正周期的意义. 会求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期，或者经过简单的恒等变形可化为上述函数的三角函数的周期. 能运用上述三角公式化简三角函数式、求任意角的三角函数值与证明较简单的三角恒等式.

(3) 了解正弦、余弦、正切、余切函数的图像的画法，会用"五点法"画正弦、余弦函数和函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的简图，并能解决与正弦曲线有关的实际问题.

试题展示

1. 已知函数 $y = \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + 1, x \in \mathbf{R}$.

   (Ⅰ) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

   (Ⅱ) 该函数的图像可由 $y = \sin x(x \in \mathbf{R})$ 的图像经过怎样的平移和伸缩变换得到?

2. 求函数 $y = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x$ 的最小值，并写出使函数 y 取最小值的 x 的集合.

3. 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边长分别为 $AB = 2, BC = 6, CD = DA = 4$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

解答分析

1. [2000 年，理，第三(17)题]

解 研究三角函数的图像与性质(包括最大值、最小值、单调性、奇偶性、周期性)，需将所给三角函数式化为一个角的一个三角函数的形式.

(Ⅰ) **解法 1**
$$y = \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x + 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + 1$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) + \frac{5}{4} = \frac{1}{2}\left(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\right) + \frac{5}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{5}{4}$$

当 $2x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathbf{Z})$，即 $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ 时，y 取得最大值.

所以当函数 y 取得最大值时，自变量 x 的集合是 $\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\}$.

解法 2 $y=\cos x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+1=\cos x\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+1$

$$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x+1=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right]+1$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$$

以下同解法 1.

(Ⅱ) **解法 1**:将 $y=\sin x$ 的图像依次进行如下变换:

① 向左平移$\frac{\pi}{6}$,得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像;

② 把得到的图像上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变),得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像;

③ 把得到的图像上各点的纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍(横坐标不变),得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像;

④ 把得到的图像向上平移$\frac{5}{4}$个单位长度,得到 $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4}$ 的图像;

综上得到函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1$ 的图像.

解法 2:将 $y=\sin x$ 的图像依次进行如下变换:

① 各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$倍(纵坐标不变),得到 $y=\sin 2x$ 的图像;

② 把得到的图像向左平移$\frac{\pi}{12}$,得到 $y=\sin2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$ 即 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像;

以下同解法一.

《考试说明》对三角函数的考试要求作出调整之后,侧重点便转移到三角函数的图像和性质、三角恒等变形以及解三角形,本题看似立意平凡,亦无可圈可点之处,但却恰到好处地体现了《考试说明》的要求,对三角函数的教学有着良好的导向作用.

2.[1991 年,理,文,第三(21)题]

解法 1 利用三角函数的恒等变形.

$$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x=1+\sin 2x+2\cos^2x$$

$$=1+\sin 2x+1+\cos 2x=2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).$$

当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时,y 取得最小值 $2-\sqrt{2}$,其中 x 的集合为

$$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi-\frac{3}{8}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

解法 2 利用万能公式变换.

因 $y=2+\sin 2x+\cos 2x$,设 $\tan x=t\in\mathbf{R}$,则

$$\because\quad y=2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{t^2+2t+3}{1+t^2},\quad\therefore\quad (y-1)t^2-2t+y-3=0,$$

$\because\quad t\in\mathbf{R},\quad\therefore\quad \Delta=4-4(y-1)(y-3)\geqslant0$,即 $2-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant2+\sqrt{2}$.故 $y_{\min}=2-\sqrt{2}$.

且 $t=\frac{2}{2(1-\sqrt{2})}=-(\sqrt{2}+1)$时,$y$ 有最小值.此时

$$\sin 2x=\frac{-2(\sqrt{2}+1)}{1+3+2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 2x,\therefore\ 2x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in\mathbf{Z}),$$

即 $x=k\pi+\frac{5}{8}\pi(k\in\mathbf{Z})$.

解法 3 数形结合.因为