数学百科全书

第四卷

Orb — Sti

科学出版社

内 容 简 介

本书由三类条目组成。首先是介绍数学的各个主要方向的综述性条目（采用了一种很好的分科办法），对这类条目的基本要求是尽可能通俗全面地阐明有关领域发展的现状；这些条目一般可供大学数学系学生和数学邻近领域的研究生阅读，根据专业需要，还可供在工作中用到数学方法的其他科学领域的专家、工程师和数学教师阅读。其次，是一些中等篇幅的条目，专门介绍某些具体的数学问题和方法，这类条目内容较深，是为水平较高的读者而写的。最后，还有一类简短的条目，可供查阅定义时参考。本书附有主题索引，其中不仅包括所有条目的标题，还包括在前两类条目中给出定义的许多概念，以及在条目中提到的一些最重要的结果。多数条目附有参考文献。这部大型数学工具书的功能是很齐全的，读者范围是十分广泛的。

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
И. М. ВИНОГРАДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

图字：01－96－1567 号

责任编辑 杜小杨 夏墨英 张鸿林
特邀编辑 葛显良 戴中器 沈海玉

数学百科全书
第四卷

《数学百科全书》编译委员会 编译
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1999年12月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1999年12月第一次印刷 印张：66
印数：1—3 000 字数：2 358 000
ISBN 7-03-006426-7/O・984
定价：148.00元

数学天元基金

中国科学院科学出版基金资助出版　国家自然科学基金委员会资助出版

數學百科全書

蘇步青題

蘇步青

《数学百科全书》

（第四卷）

编译委员会

序

在人类的思想史上，数学有一个基本和独特的地位。几千年来，从巴比伦的代数、希腊的几何、中国、印度、阿拉伯的数学，直到近代数学的伟大发展，虽然历史有时中断，但对象和方法则是一致的。数学的对象不外“数”与“形”，虽然近代的观念，已与原始的意义，相差甚远。数学的主要方法，是逻辑的推理。因之建立了一个坚固的思想结构。这些结果会对其他学科有用，是可以预料的。但应用远超过了想象。数学固然成了基本教育的一部分。其他科学也需要数学作理想的模型，从而发现相应科学的基本规律。

在这样蓬勃的发展中，数学的任务是艰巨的：它既需充实已有的基础，还需应付外来的冲击。一部完整的数学百科全书，便有迫切的需要。但兹事体大，许多合格的数学家，都望而却步。

我们有幸有这一套苏联的《数学百科全书》。它对数学的贡献，将无法估计。我们要了解，数学是一种“活”的学问：它的内容，不断在变化，在进展。我们现在大学研究院数学活动的内容，大部分在五十年前是不存在的，其他一部分则是昔贤伟大思想的精华，将历久而弥新。我建议《百科全书》每两年出一附录，包括新项目和旧项目的重写。如有佳构，不必拘泥编辑的方针。《百科全书》每隔若干年宜有新版。

面对着这座巨大的建筑，令人惶惑。百科全书原不为有涯之身所能控制的。数学工作者的使命在对某些选定的项目，增加了解和探索。本书将便利他们思考范围的推广。

我相信数学将有一个黄金时代，其中将有多数的中国数学家参加。希望本书能起相当的作用。

陳省身

出 版 说 明

数学的重要性是尽人皆知的。一个人从进小学开始到大学毕业为止，不论哪个专业，学习数学的时间至少都有12年至14年之久。一些自然科学领域，如天文学、力学、物理学、化学等，以及各工程技术学科，历来都是以数学为基础的。随着电子计算机的迅速发展和普及，生命科学、地学、军事科学和管理科学等方面也愈来愈多地用到数学，使这些学科从定性研究向定量研究发展。

由于数学所用的方法是逻辑推导，它有严格的定义和特定的符号，它的研究对象是抽象的数量关系和空间形式，没有相当的训练和基础知识的人是难于入门的，所以数学又使人望而生畏。另一方面，数学发展很快，文献数量呈指数增加，浩如烟海。一个人很难了解数学的许多方面，这就加重了数学发展和应用的困难。

苏联大百科全书出版社从1977年到1986年，历时10年，出版了苏联科学院院士、世界著名数学家 ИМ 维诺格拉多夫（Виноградов）主编、几百位数学家共同撰写的一部《数学百科全书》(Математическая энциклопедия)，约900万字。它的重要性是极为显著的。不久，荷兰的莱德尔出版公司出版了由180位西方数学家参加翻译的英文版 (Encyclopaedia of mathematics)。英文版增补了大量最新成果、重要的西方文献和编者注，因而其内容更加充实和完善。

苏联《数学百科全书》出版后，我国很多著名数学家和数学教师纷纷要求将这部书译成中文出版，使我国广大科学工作者（特别是数学工作者)、工程技术人员、教师和学生有一部内容极其丰富的工具书，可以从中查阅所需要的数学知识及作进一步了解的线索。这无疑是一件十分重要的事情。

中国数学会常务理事会经过认真讨论，完全支持我国广大数学家和科技人员的要求，决定领导这部《数学百科全书》的编译工作，并将它列为

中国数学会最重要的工作之一；随后，立即成立了编译委员会，负责具体的组织工作。由于我国广大数学家的热情支持和参加，所以编译工作进展比较顺利。必须指出，科学出版社始终将这项工作作为该社的一项重点任务来抓，编辑人员为此付出了长期的艰苦劳动。

本书中文版分五卷，包括了俄文版的全部内容和英文版增补的内容。为尽快出版，条目按英文字母顺序排列。在第五卷中，附有详尽的中文和外文索引，此外还增加了600余篇数学家小传。

本书除中文简体字版本以外，还有繁体字版，繁体字版由台湾九章出版社出版发行。这也是海峡两岸数学家和出版界人士的一次良好合作。

老一辈数学家苏步青教授为本书题写书名，陈省身教授作序，苏步青、陈省身、吴文俊、程民德教授应邀担任编译委员会顾问。对于他们的支持，谨致以衷心的感谢！

最后，对于书中欠妥和错误之处，还望读者不吝指教。

《数学百科全书》编译委员会

本书由河北省雄县电脑服务部排版。谨此致谢！

轨道[**orbit**; **орбита**]，点 x 对于（左侧）作用于集合 X 上的群 G 的

集合

$$G(x)=\{g(x):\ g\in G\}.$$

集合

$$G_x=\{g\in G:\ g(x)=x\}$$

是 G 中一子群，称为点 x 对于 G 的稳定化子（stabilizer）（或平稳子群（stationary subgroup））. 映射 $g\mapsto g(x)(g\in G)$ 诱导出 G/G_x 和轨道 $G(x)$ 之间的一一对应. X 中任意两点的轨道或者不相交或者重合；换句话说，轨道定义了集合 X 的一个分划. 对于这一分划所定义的等价关系的商称为 X 由 G 给出的轨道空间（orbit space）并记为 X/G. 把每个点对应它的轨道，这定义了一个典范映射 $\pi_{X,G}:X\to X/G$. 同一轨道中不同点的稳定化子在 G 中相互共轭，确切地说，$G_{g(x)}=gG_xg^{-1}$. 若 X 中只有一个轨道，则 X 是群 G 的齐性空间（homogeneous space of the group）而称 G 传递地作用于 X 上. 若 G 为一**拓扑群**（topological group），X 为一拓扑空间并且作用是连续的，则 X/G 也就被赋予了拓扑，其中 $U\subset X/G$ 是 X/G 中开集，当且仅当集合 $\pi_{X,G}^{-1}(U)$ 在 X 中是开的.

例. 1）设 G 是平面 X 的绕定点 a 的旋转群，则轨道就是全部以 a 为心的圆（也包括点 a 自身）.

2）设 G 为一有限维实向量空间 V 的全体非奇异线性变换组成的群，设 X 为 V 上全体对称双线性型的集合，并设 G 在 X 上的作用由

$$(gf)(u,v)=f(g^{-1}(u),g^{-1}(v)),\ \text{对一切}\ u,v\in V$$

定义，则 G 在 X 上的轨道是有相同的秩和相同的符号差的型的集合.

设 G 为光滑地作用在**微分流形**（differentiable manifold）X 上的实 **Lie 群**（Lie group）（见 **Lie 变换群**（Lie transformation group））. 对每一点 $x\in X$，轨道 $G(x)$ 是 X 中一浸入子流形，它微分同胚于 G/G_x（这一微分同胚由映射 $g\mapsto g(x)(g\in G)$ 诱导出来）. 这一子流形在 X 中不一定是闭的（即不一定是嵌入的）. 典型的例子是"环面的卷绕"，即加法群 $\mathbf{R}$ 按公式

$$t(z_1,z_2)=(e^{it}z_1,e^{i\alpha t}z_2),\ t\in\mathbf{R}$$

在环面

$$T^2=\{(z_1,z_2):z_i\in C,\ |z_i|=1,\ i=1,2\}$$

上的作用，其中 α 为一无理实数；其轨道的闭包与 T^2 重合. 若 G 为紧的，则所有的轨道都是嵌入的子流形.

若 G 为一个**代数群**（algebraic group）而 X 为代数闭域 k 上的一个**代数簇**（algebraic variety），且 G 正则作用于 X 上（见**变换的代数群**（algebraic group of transformations）），则每个轨道 $G(x)$ 是一个光滑的代数簇并在其闭包 $\overline{G(x)}$ 中是开集（在 Zariski 拓扑内），同时 $\overline{G(x)}$ 总包含 G 的一个闭轨道（见[5]）. 在此情况下，态射 $G\to G(x)$, $g\mapsto g(x)$，诱导出代数簇 G/G_x 和 $G(x)$ 的同构，当且仅当它是可分的（这个条件在 k 的特征为零时总是满足的，见**可分映射**（separable mapping））. 极大维的轨道组成 X 中的一个开集.

一个给定作用的轨道结构的描述通常归结为在每个轨道内给出唯一代表元 x、给出稳定化子 G_x 的描述、再给出一个适当的函数类，它们在一个轨道内取常数（不变量（invariant））并能区分不同的轨道；这些函数使得能以描述轨道在 X 中的位置（轨道是它们的水平集的交）. 这一程序通常称为轨道分解问题（problem of orbit decomposition）. 许多分类问题可归结为这一问题. 于是例 2）就是对称双线性型的等价分类问题；此时不变量——秩和符号差——是"离散的"，而稳定化子 G_f 当 f 为非退化时是相应的正交群. 矩阵的 Jordan 正规形式的经典理论（以及矩阵其他正规形式的理论，见**正规形式**（normal form））可以在这一框架内加以解释：Jordan 正规形式是**一般线性群**（general linear group）$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ 按共轭 $Y\mapsto AYA^{-1}$ 作用于全部（$n\times n$）复矩阵空间上的轨道的典范代表元（不计 Jordan 块的次序）；矩阵 Y 的特征多项式的系数是重要的不变量（但它们不足以区分开任意两个轨道）. 把等价的对象看成一个群的轨道的想法常用于许多分类问题中，例如在代数（**参**）**模理论**（moduli theory）（见[10]），在图的交的理论中（见[2]）等等.

若 G 和 X 是有限的，则

$$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}\,g|,$$

其中 $|Y|$ 是集合 Y 中元素的个数，且

$$\mathrm{Fix}(g)=\{x\in X:g(x)=x\}.$$

设 G 为光滑地作用于连通光滑流形 X 上的紧 Lie 群，则 X 的轨道结构是局部有限的，即对任意 $x \in X$，有一个邻域 U，使得不同的稳定化子 $G_y(y \in U)$ 的共轭类个数是有限的．特别若 X 是紧的，则稳定化子 $G_y(y \in X)$ 的不同共轭类的个数是有限的．对 G 的任意子群 H，每个集合

$$X_{(H)} = \{x \in X: G_x \text{ 在 } G \text{ 中与 } H \text{ 共轭}\}$$

是 X 内一个开的和一个闭的 G 不变的子集的交．在此情况下，研究 $X_{(H)}$ 可导致作用的分类（见[1]）.

类似的结果在不变量的几何理论中也已获得（见**不变量理论**(invariants, theory of))(见[3]). 若 G 为正则地作用于仿射代数簇 X(基域 k 为代数闭的且特征为零)上的约化代数群．任一轨道的闭包中包含唯一的闭轨道．存在一个把 X 分解成有限个局部闭的不变的互不相交的子集的分划 $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$，使得：a）若 $x, y \in X_\alpha$ 且 $G(x)$ 是闭的，则 G_y 在 G 中与 G_x 的一个子群共轭，若 $G(y)$也是闭的，则 G_y 在 G 中与 G_x 共轭；b）若 $x \in X_\alpha$，$y \in X_\beta$，$\alpha \neq \beta$，且 $G(x)$ 和 $G(y)$ 是闭的，则 G_x 和 G_y 在 G 中不共轭．若 X 是一光滑代数簇（例如，G 在向量空间 $V = X$ 中的有理线性表示的重要情形），则 X 中有一个非空开子集 Ω，使得对任意的 $x, y \in \Omega$，G_x 与 G_y 在 G 中共轭，这个结果是关于 X 中处于一般位置的点(point in general position)，即一个非空开集内的点的性质的一个断言；还有一些类似的其他断言．例如，对于半单群 G 在一个向量空间 V 中的有理线性表示，在一般位置的点的轨道是闭的，当且仅当它们的稳定化子是约化的（见[7]）；当 G 为不可约时，对于处于一般位置的点的稳定化子的具体刻画也已找到（见[8]，[9]）. 在这方面轨道闭包的研究是重要的. 这里，其轨道的闭包包含 V 中元素 O的点 $x \in V$的集合与 V 上所有非常数不变多项式的零点的簇重合；在许多情况下，特别是不变量理论在模论的应用中，这个簇起重要作用（见[10]）. 任何两个不同的闭轨道可由不变量多项式分开．轨道 $G(x)$ 是闭的，当且仅当点 x 相对于 $G(x)$ 在 G 中的正规化子的轨道是闭的（见[4]）. 非闭的轨道的出现与 G 的性质有关；若 G 是幂幺的（且 X 为仿射的），则任何轨道都是闭的（见[6]）. 不变量理论的一个方面就是研究各种具体作用（特别是线性表示）的轨道分解问题．其中之一——约化群的伴随表示——已经详细地研究过（见，例如[11]）. 这一研究与群 G 的表示理论有关，见**轨道方法**(orbit method).

参考文献

[1] Palais, R., The classification of G-spaces, Amer. Math. Soc., 1960.

[2] Harary, F., Graph theory, Addison-Wesley, 1969.

[3] Luna, D., Slices étales, *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81 – 105.

[4] Luna, D., Adhérence d'orbite et invariants, *Invent. Math.*, **29** (1975), 3, 231 – 238.

[5] Borel, A., Linear algebraic groups, Benjamin, 1969.

[6] Steinberg, R., Conjugacy classes in algebraic groups, Lecture notes in math., 336, Springer, 1974.

[7] Попов, В. Л., 《Изв. АН СССР. Сер. матем.》, **34** (1970), 523 – 531.

[8] Попов, А. М., 《Функц. анализ и его прилож.》, **12** (1978), 2, 91 – 92.

[9] Элашвили, А. Г., 《Функц. анализ и его прилож.》, **6** (1972), 2, 65 – 78.

[10] Mumford, D. and Fogarty, J., Geometric invariant theory, Springer, 1982.

[11] Kostant, B., Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 3, 327 – 404.

[12] Humphreys, J., Linear algebraic groups, Springer, 1975.

В. Л. Попов 撰

【补注】

参考文献

[A1] Popov, V. L., Modern developments in invariant theory, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Berkeley, 1986, Amer. Math. Soc., 1988, pp 394 – 406.

[A2] Kraft, H., Geometrische Methoden in der Invariantentheorie, Vieweg, 1984.

[A3] Kraft, H. Slodowy, P. and Springer, T. A. (eds), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Seminar, 13, Birkhäuser, 1989.

李慧陵 译

轨道方法[orbit method; орбит метод]

研究 Lie 群的酉表示的一种方法．幂零 Lie 群的**酉表示**(unitary representation)理论是利用轨道方法而发展起来的，并且这种方法被证明也可以用于其他的群（见[1]）.

轨道方法基于以下的"经验"事实：一个 Lie 群 G 的不可约酉表示与它在**余伴随表示**(coadjoint representation)中的轨道之间存在着密切的联系．利用轨道方法，表示论中基本问题的解由以下方式实现（见[2]）.

不可约酉表示的构成和分类．令 Ω 是实 Lie 群 G 在余伴随表示中一个**轨道**(orbit). 令 F 是这个轨道的一个点（它是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上一个线性泛函），令 $G(F)$ 是 F 的**稳定化子**(stabilizer)，而 $\mathfrak{g}(F)$ 是群 $G(F)$ 的 Lie 代数．Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}_C$（见 **Lie 代数的复化**(complexification of a Lie algebra)）内一个复子代数 $\mathfrak{h}$ 称为点 F 的一个极化

(polarization)，当且仅当它具有以下性质：

1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - (1/2)\dim \Omega$;

2) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ 包含在 $\mathfrak{g}$ 上泛函 F 的核里；

3) $\mathfrak{h}$ 对于 $\mathrm{Ad}\, G(F)$ 不变．

令 $H^0 = \exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})$ 而 $H = G(F) \cdot H^0$. 极化 $\mathfrak{h}$ 称为实的（real），如果 $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}}$；称为纯复的（purely complex），如果 $\mathfrak{h} \cap \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}(F)$. 泛函 F 按以下公式定义群 H^0 的一个特征标（一个一维酉表示）χ_F^0：

$$\exp X \mapsto \exp 2\pi i < F, X >.$$

将 χ_F^0 开拓为 H 的一个特征标 χ_F. 如果 $\mathfrak{h}$ 是一个实极化，则令 $T_{F,\mathfrak{h},\chi_F}$ 是群 G 由子群 H 的特征标 χ_F 所诱导的表示（见**诱导表示**（induced representation））. 如果 $\mathfrak{h}$ 是一个纯复极化，则令 $T_{F,\mathfrak{h},\chi_F}$ 是作用在 G/H 上全纯函数的空间上的全纯诱导表示．

第一基本假设（first basis hypothesis）是表示 $T_{F,\mathfrak{h},\chi_F}$ 为不可约的（见**不可约表示**（irreducible representation）），并且它的等价类仅依赖于轨道 Ω 和特征标 χ_F^0 的开拓 χ_F 的选取．这个假设已对幂零群和可解 Lie 群被证明（分别见 [1] 和 [5]）．对于单例外群 G_2 的某些轨道来说，这个假设不成立（[7]）. 开拓的可能性和它的不确定的程度依赖于轨道的拓扑性质：轨道的 2 维上同调类对于开拓起着阻碍作用，而与此同时轨道的 1 维上同调类则可以用来作为列举不同的开拓的一个参数．更确切地说，令 B_Ω 是轨道 Ω 上一个典范 2 形式．存在一个开拓的必要且又充分条件是 B_Ω 属于整同调类（即它的沿着任意 2 维循环的积分都是整数）；如果这个条件成立，那么开拓的集合由这个轨道的基本群的特征标参数化．

第二基本假设（second basic hypothesis）是所考虑的群 G 的所有不可约酉表示都可以由所说的方法得到．直到 1983 年，唯一不符合这条假设的例子是所谓半单 Lie 群表示的补系列．

轨道和表示之间关系的泛函性质．在表示论里最重要的问题就是将一个表示分解为不可约分支的问题：给定群 G 的一个子群 H，这样的分解如何通过 G 的一个不可约表示限制到 H 上和 H 的一个不可约表示诱导到 G 上而得到？轨道方法通过一个自然射影 $p: \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$（这里 $\cdot$ 表示到伴随空间的转移；射影 p 是把一个泛函由 $\mathfrak{g}$ 限制到 $\mathfrak{h}$ 上）给出这个问题的答案．事实上，令 G 是一个指数 Lie 群（对于这样的群来说，轨道和表示的关系是一对一的关系，见**指数 Lie 群**（Lie group, exponential））. G 的对应于轨道 $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ 的不可约表示，当限制到 H 上时，分解成对应于在 $p(\Omega)$ 内的那些轨道 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 的不可约分支，当 G 的一个表示由群 H 的一个对应于轨道 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 的不可约表示所诱导时，分解成对应于与前象 $p^{-1}(\omega)$ 有非空交的那些轨道 $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ 的不可约分支．这些结论有两个重要推论：如果不可约表示 T_i 对应于轨道 $\Omega_i (i = 1, 2)$，则张量积 $T_1 \otimes T_2$ 分解成对应于在算术和 $\Omega_1 + \Omega_2$ 内那些轨道 Ω 的不可约分支；G 在 G/H 上一个函数空间内一个拟正则表示分解成对应于这样的轨道 $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ 的不可约分支，Ω 的象 $p(\Omega) \subset \mathfrak{h}^*$ 包含零．

特征标理论．对于不可约表示的特征标（作为群上广义函数）来说，以下的通用公式已被提出（见 [2]）：

$$\chi(\exp X) = \frac{1}{p(X)} \int_\Omega e^{2\pi i < F, X >} \beta(F), \qquad (*)$$

这里 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到群 G 内的指数映射，$p(X)$ 是在典范坐标下 G 上不变 Haar 测度的密度的平方根而 β 是轨道 Ω 上通过关系 $\beta = B_\Omega^k / k!$ $(k = (\dim \Omega)/2)$ 与典范 2 形式 B_Ω 相关联的体积形式．这个公式对于幂零群，类型 1 的可解群，紧群、实半单群表示的离散系列和复半单群表示的主系列来说是正确的．对于 $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ 表示的某些退化系列来说，这个公式不成立．公式 $(*)$ 为计算对应于轨道 Ω 的不可约表示 T_Ω 的无穷小特征标提供了一个简单的公式；再者，对于 G 上每一个 Laplace 算子 Δ 有 $\mathfrak{g}^*$ 上一个 $\mathrm{Ad}^* G$ 不变多项式 P_Δ 与之相关联，使得表示 T_Ω 的无穷小特征标在元素 Δ 的值等于 P_Δ 在 Δ 的值．

群 G 沿着它在余伴随表示内轨道 Ω 的不可约酉表示的构造．这种构造可以视作一个 Hamilton 系统的量子化运算，Ω 在这里扮演着相空间的角色而 G 在这里扮演一个多维非交换时间（或对称的群）的角色．在这些条件下，余伴随表示内的 G 轨道都是 G 齐次辛流形，它们容许量子化．于是第二基本假设可以如此叙述：每一个具有时间（或对称的群）G 的初等量子系统都可以由相应的典型系统通过量子化而得到（见 [2]）．

与完全可积 Hamilton 系统理论的一个联系也已被发现（见 [11]）．

参考文献

[1] Кириллов, А. А.,《Успехи матем. наук》, **17** (1962), 57 – 110.

[2] Кириллов, А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978（英译本：Kirillov, A. A. Elements of the theory of representations, Springer, 1976）.

[3] Dixmier, J., Enveloping algebras, North-Holland, 1974（译自法文）.

[4] Simms, D. J. and Woodhouse, N. M. J., Lectures on geometric quantization, Springer, 1976.

[5] Auslander, L. and Kostant, B., Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, *Invent. Math.*, **14**(1971), 255 - 354.

[6] Moore, C. C., Decomposition of unitary representations defined by diserete subgroups of nilpotent groups, *Ann. of Math.*, **82**(1965), 1, 146 - 182.

[7] Rothschild, L. P. and Wolf, J. A., Representations of semi-simple groups associated to nilpotent orbits, *Ann. Sci. Ecole Norm Sup. Ser.* 4, 7(1974), 155 - 173.

[8] Bernat, P. et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, 1972.

[9] Гинзбург, В. А., 《Докл. АН СССР》, **249**(1979), 3, 525 - 528.

[10] Kirillov, A. A., Infinite dimensional groups, their representations, orbits, invariants, in Proc. Internat. Congress Mathematicians, Helsinki 1978, Vol. 2, Acad. Sci. Fennica, 1980, 705 - 708.

[11] Reyman, A. G. and Semenov-Tian-Shansky, M. A., Reduction of Hamiltonian systems, affnie Lie algebras and Lax equations, *Invent. Math.*, **54**(1979), 1, 81 - 100.

[12] Kirillov, A. A. (ed.), Representation theory and noncommutative harmonic analysis, Ⅰ, Ⅱ, Springer, 1994, 1995(译自俄文).

A. A. Кириллов 撰 郝炳新 译

轨道稳定性[**orbit stability** 或 orbital stability; **орбитальная устойчивость**]

常微分方程自治系统(autonomous system)

$$\dot{x}=f(x),\ x\in\mathbf{R}^n \qquad (*)$$

的(解 $x(t)$ 的)轨道 ξ 的如下性质：对每一个 $\varepsilon>0$ 均存在一个 $\delta>0$，使得每一个由轨道 ξ 的 δ 邻域发出的正半轨道均含于轨道 ξ 的 ε 邻域内．这里，轨道(trajectory)就是方程组(*)之解 $x(t)$ 当 $t\in\mathbf{R}$ 时所取的值之集合，而正半轨道(positive half-trajectory)就是解 $x(t)$ 当 $t\geqslant 0$ 时所取的值的集合．若解 $x(t)$ 具有**Ляпунов 稳定性**(Lyapunov stability)，则其轨道是轨道稳定的．

轨道 ξ 称为渐近轨道稳定的(asymptotically orbital stable)，如果它不仅是轨道稳定的，而且存在一个 $\delta_0>0$，使得方程组(*)的每一个由轨道 ξ 的 δ_0 邻域出发的解(即适合 $d(x(0),\xi)<\delta_0$ 的解) $x(t)$ 的轨道，当 $t\to+\infty$ 时都趋向轨道 ξ，即有

$$\lim_{t\to+\infty}d(x(t),\xi)=0,$$

这里

$$d(x,\xi)=\inf_{y\in\xi}d(x,y)$$

是由点 x 到集合 ξ 的距离($d(x,y)$ 则是点 x 和 y 之间的距离)．

渐近轨道稳定这个概念之所以有用，是基于以下的事实．(*)之周期解决非渐近稳定的．但若此方程组的周期解的一切**乘子**(multipliers)之模(除去 1 之外)均小于 1，则这个周期解的轨道是渐近轨道稳定的(Андронов-Витт 定理(Andronov-Witt theorem))．还有更一般的 Демидович 定理(Demidovich theorem)(见[3])：令 $x_0(t)$ 是方程组(*)的一个有界解；此外设

$$\inf_{t\geqslant 0}|\dot{x}_0(t)|>0,$$

且沿 $x_0(t)$ 的变分方程组是正则的(见**正则线性方程组**(regular linear system))，而其所有的 **Ляпунов 特征指数**(Lyapunov characteristic exponent)除一个以外均为负，则解 $x_0(t)$ 的轨道是渐近轨道稳定的．

参考文献

[1] Андронов, А. А., Собр. трудов, М., 1956.

[2] Андронов, А. А., Витт, А. А., Хайкин, С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959 (中译本：A. A. 安德罗诺夫等，振动理论，上、下册，科学出版社，1973-1974).

[3] Демидович, Б. П., 《Дифференциальные урав.》, 4 (1968), 4, 575 - 588; 8, 1359 - 1373.

В. М. Миллионщиков 撰

【补注】 也可考虑周期轨道内部(或外部)的轨道稳定性．

参考文献

[A1] Coddington, E. A., Levinson, N., Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, 1955.

[A2] Hartman, P., Ordinary differential equations, Birkhäuser, 1982.

齐民友 译

阶(或次，序，序模，数量级)[**order**; **порядок**]

1) 代数曲线 $F(x,y)=0$ 的次(order of an algebraic curve)(这里 $F(x,y)$ 是 x 与 y 的多项式)，就是 $F(x,y)$ 的各项的最高次数．例如椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 是二次曲线，双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 是四次曲线(见**代数曲线**(algebraic curve))．

2) 无穷小量 α 关于无穷小量 β 的阶(order of an infinitesimal quantity)是一个数 n(如果存在的话)，使得极限 $\lim\alpha/\beta^n$ 存在，并且不是无穷大或零．例如当 $x\to 0$ 时 $\sin^2 3x$ 是关于 x 的二阶无穷小量，因为 $\lim_{x\to 0}(\sin^2(3x)/x^2)=9$．如果 $\lim\alpha/\beta=0$，则称 α 对于 β 是高阶无穷小，如果 $\lim\alpha/\beta=\infty$，则称 α 对于 β 是低阶无穷小．类似地，可定义无穷大量的阶(见**无穷小演算**(infinitesimal calculus))．

3) 函数 f 的零点(或极点) a 的阶(order of a

zero）是一个数 n，使得极限 $\lim_{x\to a}f(x)/(x-a)^n$（或相应地，$\lim(x-a)^n f(x)$）存在，并且不是无穷大或零（见**解析函数**（analytic function）；**亚纯函数**（meromorphic function），**极点（函数的）**（pole (of a function)）；**有理函数**（rational function））.

4）导数的阶（order of derivative）是指为了得到这个导数需对函数求导的次数．例如 y'' 是二阶导数，$\partial^4 z/\partial^2 x\partial^2 y$ 是四阶导数．类似可定义微分的阶（见**微分学**（differential calculus）.

5）微分方程的阶（order of a differential equation）是方程中导数的最高阶．例如 $y'''y'-(y'')^2=1$ 是三阶方程，$y''-3y'+y=0$ 是二阶方程（见**常微分方程**（differential equation, ordinary））.

6）方阵的阶（order of a square matrix）是它的行数或列数（见**矩阵**（matrix））.

7）有限群的阶（order of a finite group）是群的元素个数（见**有限群**（finite group））．如果群 G 无限，则称之为无限阶的群．不要把群的阶与群上的序（order on a group）相混淆（见**序群**（ordered group）；**偏序群**（partially ordered group））.

8）群的元素的阶（order of an element of a group）是由这个元素生成的循环子群的元素个数．当这个子群为无限时，阶是 ∞，否则是一个正整数（亦见**循环群**（cyclic group））．当子群无限时，这个元素是无限阶的．如果元素 a 的阶有限且等于 n，则 n 是使 $a^n=1$ 的最小正数.

9）环 Q 内的右序模（right order in a ring）是 Q 的一个子环 R，使得对任意的 $x\in Q$ 存在 $a, b\in R$，其中 b 在 Q 内可逆，$x=ab^{-1}$．换句话说，R 是 Q 的子环，使得 Q 是 R 的右经典分式环（见**分式环**（fractions, ring of））.

10）如果在某种研究或计算中，把某个微小的量的 $(n+1)$ 次以及更高次的幂忽略不计，就说这个研究或计算精确到 n 阶（order）的量．例如在研究弦的微小振动时，把位移及其导数的二次和更高次的项忽略不计后，就得到一个线性方程（问题的线性化）.

11）“阶”也被用在差分演算（不同阶的差分，见**有限差分演算**（finite-difference calculus））、许多特殊函数的理论（例如 n 阶**柱函数**（cylinder functions））等等之中.

12）在测量时，常说一个**量**（quantity）的数量级（order）为10^n，就是指它包含在 $0.5\cdot10^n$与$5\cdot10^n$之间.

取自 БСЭ-3 中同名条目

【补注】 以上内容并没有穷尽“order”一词在数学中的多种含义.

13）如果 (V, B) 是平衡不完全区组设计（balanced incomplete block design），或具有参数 v, b, r, k, λ 的设计（design）（见**区组设计**（block design）），则 $n=r-\lambda$ 称为设计的阶（order）.

14）一个有限射影平面是 k 阶的，是指它的每条直线恰有 $k+1$ 个点（从而恰有 k^2+k+1 个点以及 k^2+k+1 条直线）.

15）设 $\mathfrak{M}=\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$（$M_\lambda\subset S$）是子集 $A\subset S$ 的一个覆盖，即 $A\subset\bigcup_\lambda M_\lambda$．如果 k 是这样的最小整数，使得 $\mathfrak{M}$ 中任意一个由 $k+1$ 个元素构成的子族的交集都是空集，则称这个覆盖是 k 阶（order）的.

16）设 $f(z)$ 是**超越整函数**（entire function）．对每个实数 $r>0$，令 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，则超越整函数 $f(z)$ 的阶（order of the transcendental entire function）定义为

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

若 ρ 有限，则函数是有限阶（finite order）的，否则是无限阶（infinite order）的.

17）椭圆函数的阶（order of an elliptic function）是它在周期平行四边形中取每个值的次数，见**椭圆函数**（elliptic function）.

18）设 $f(z)$ 是 $|z|<R\leqslant\infty$ 内的**亚纯函数**（meromorphic function）．对每个可能的值 α（含 ∞ 在内），令

$$N(r,\alpha)=\int_0^r\frac{n(t,\alpha)-n(0,\alpha)}{t}\,dt+n(0,\alpha)\log r,$$

$$m(r,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-\alpha}\right|d\theta,$$

当 $\alpha\neq\infty$ 时，

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

这里 $n(r,\alpha)$ 是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 内的 α 点（α-point），即使得 $f(z)=\alpha$ 的点的个数，并计入重数．函数 N 和 m 分别称为计数函数（counting function）和邻近函数（proximity function）．函数 $T(r)=m(r,\infty)+N(r,\infty)$ 称为 $f(z)$ 的阶函数（order function）或特征函数（characteristic function）．当 $r\to\infty$ 时，对所有的 α 有 $T(r)=m(r,\alpha)+N(r,\alpha)+O(1)$（Nevanlinna 第一定理（Nevanlinna first theorem））．也有

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

这里 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，如同 16）中所述．亚纯函数 $f(z)$ 的阶（order of the meromorphic function）定义为 $\limsup_{r\to\infty}(\log r)^{-1}\log T(r)$.

19) $[a, b]$ 上连续函数 f 的 k 阶连续模 (k-th order modulus of continuity) 定义为

$$\omega_k(f;t)=\sup_{\substack{|h|\leqslant t\\ a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant x+kh\leqslant b}}\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\begin{bmatrix}k\\ i\end{bmatrix}f(x+ih)\right|.$$

亦见**连续模**(continuity, modulus of); **光滑模** (smoothness, modulus of).

20) 考虑区间 $[a, b]$ 上的常微分方程组 $dy^i/dx=f^i(x, y^1(x), \cdots, y^n(x))$ 以及在网格点 (mesh points) $x_k=a+kh$ 上计算 y^i 的数值解法，使得步长 (stepsize) 为 h. 设 y_k^i 是 y^i 在 x_k 处的计算值，$y^i(x_k)$ 是"真值"，$e_k^i=y_k^i-y^i(x_k)$. 如果当 $h\to 0$ 时，$e_k^i=O(h^r)$，则此解法是 r 阶的.

21) 考虑 E^2 中的寻常曲线 (ordinary curve) C，也就是说，C 是相交于有限多个点的有限条简单弧的并. 对于点 $p\in C$, p 的充分小邻域的边界与 C 交于有限多个点，其个数与邻域无关. 这个数称为 p 在 C 上的阶 (order). 一阶点是端点 (end point)，二阶点是寻常点 (ordinary point)，$n(n\geqslant 3)$阶的点是分支点 (branch point).

22) 设 M^n 是 n 维流形，Z^{n-1} 是 M^n 内的 $n-1$ 维闭链，它也是一个边缘. 不在 Z^{n-1} 的底空间 $|Z^{n-1}|$ 内的点 P 关于 Z^{n-1} 的**环绕系数** (linking coefficient) $\mathrm{Lk}(P, Z^{n-1})$ 称为点 P 关于 Z^{n-1} 的阶. 当 $M^n=\mathbf{R}^2$, Z^{n-1} 是一条闭曲线 $\{f(t): 0\leqslant t\leqslant 1\}$, $f(0)=f(1)$ 时，这就是 f 绕 P 的**旋转数** (rotation number).

23) 词"order"也可用作为集合上一个序关系 (order relation) 或排序 (ordering) 的同义词 (亦见**序 (集合的)** (order (on a set))).

24) 关于函数在一个点 (包括 ∞) 的大小的序的概念以及与此相关的概念，见**序关系** (order relation).

25) 考虑 **Dirichlet 级数** (Dirichlet series) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\lambda_n z)$，设 S 是 f 的收敛横坐标 (abscissa of convergence). 即当 $\mathrm{Re}(z)>S$ 时级数收敛，$\mathrm{Re}(z)<S$ 时发散. 如果 $x=\mathrm{Re}(z)>S$，则 $f(z)=o(|y|)$ 当 $|y|\to\infty$ 时. H. Bohr 在他的学位论文中引入了

$$\mu(x)=\limsup_{|y|\to\infty}\frac{\log|f(x+iy)|}{\log|y|}.$$

并称为 f 在直线 $\mathrm{Re}(z)=x$ 上的阶 (order). 函数 $\mu(x)$ 是非负、凸、连续且单调递减的. Bohr 发现 f 在这条直线上的值有某种周期性质，这就开创了**殆周期函数** (almost-periodic function) 的理论.

26) 设 A 是一个 Dedekind 整环 (Dedekind domain)，即 (不一定交换的) 整环，其中每个理想都可唯一地分解为素理想 (亦见 **Dedekind 环** (Dedekind ring)). 设 B 是 A 的分式域 F 上的有限次可分代数. B 内的 A 格 L 是 B 的有限生成 A 子模，使得 $FL=B$. 包含 A 且是 B 的子环的 A 格称为 A 序模 (A-order). 极大序模 (maximal order) 就是不含于其他序模中的序模. 这样的极大序模总是存在的. 如果 B 是交换的，则它是唯一的.

当 F 是整体或局部域，A 是它的整元的环，B 是 F 的有限域扩张时，极大序模是 B 的整元的环 (ring of integers)，它是 A 在 B 内的整闭包 (integral closure) (见**环的整扩张** (integral extension of a ring)). 它也被称为主序模 (principal order).

27) 在某些文献，主要是物理文献中，用到 Lie 群的阶 (order of a Lie group)，就是指使它参数化所需的参数个数，即这种意义下 Lie 群 G 的阶就是 G 的维数 (亦见 **Lie 群** (Lie group)).

参考文献可参见直接或间接关联的各条目.

陈志杰 译

序 (集合上的) [order (on a set); порядок], 序关系 (order relation)

某一集合 A 上的**二元关系** (binary relation)，通常用符号 $\leqslant$ 表示，并且具有下列性质: 1) $a\leqslant a$ (自反性 (reflexivity)); 2) 若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$ (传递性 (transitivity)); 3) 若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a$，则 $a=b$ (反对称性 (anti-symmetry)). 若 $\leqslant$ 是一个序，则当 $a\leqslant b$ 且 $a\neq b$ 时，由 $a<b$ 定义的关系 $<$ 称为严格序 (strict order). 严格序可以定义为具有性质 2) 和下述性质 3′) 的一种关系: 3′) $a<b$ 和 $b<a$ 不能同时出现. 表达式 $a\leqslant b$ 通常读作"a 小于或等于 b"，或者"b 大于或等于 a"; 而 $a<b$ 读作"a 小于 b"或者"b 大于 a". 一个序称为全的 (total)，如果对任何 $a, b\in A$，或者 $a\leqslant b$，或者 $b\leqslant a$. 具有性质 1) 和 2) 的关系称为前序 (pre-order) 或拟序 (quasi-order). 若 $\lhd$ 是一个拟序，则由条件 $a\lhd b$ 和 $b\lhd a$ 定义的关系 $a\approx b$ 是一个**等价** (equivalence) 关系. 在依这个等价作成的商集上通过假设 $[a]\leqslant[b]$ 可以定义一个序，其中 $[a]$ 是包含元素 a 的类，如果 $a\lhd b$. 例子和文献见**偏序集** (partially ordered set).

Л. А. Скорняков 撰

【补注】 全序也称为**线性序** (linear order)，赋予了全序的集合有时称为**链** (chain) 或**全序集** (totally ordered set). 需强调的是，一个序，不 (一定) 是全序时，常常称为偏序 (partial order)，一些人使用符号 $a\parallel b$ 表示 $a\leqslant b$ 和 $b\leqslant a$ 都不成立.

杜小杨 译

阶关系 [**order relation**; **порядка соотношение**], 函数的比较 (comparison of functions), O-o 关系 (O-o relations), 渐近关系 (asymptotic relations)

研究一个函数在某点 (该点可以是无穷远点) 的邻域内关于另一函数的性态时产生的一个概念.

设 x_0 为**集合** E **的极限点** (limit point of a set). 对两个函数 f 和 g, 如果存在常数 $c>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $x\neq x_0$ 时, $|f(x)|\leqslant c|g(x)|$, 则称 f 在 x_0 的某个去心邻域内关于 g 是有界的, 记为

$$f(x)=O(g(x)), \text{ 当 } x\to x_0 \text{ 时}$$

(读为"f 为 g 的大 O 阶"); $x\to x_0$ 表示所考虑的性质仅在 x_0 的某个去心邻域内成立. 上述定义可以类似地应用于 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 的情形.

若对两个函数 f 和 g, 当 $x\to x_0$ 时, 有 $f=O(g)$ 并且 $g=O(f)$, 则称这两个函数当 $x\to x_0$ 时是同阶函数 (functions of the same order). 例如, 若对两个函数 α 和 β, 当 $x\neq0$ 时, $\alpha(x)\neq0$, $\beta(x)\neq0$, 且极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$$

存在, 则当 $x\to x_0$ 时, 它们有相同的阶.

两个函数 f 和 g 称为当 $x\to x_0$ 时是等价的 (equivalent) (渐近相等的 (asymptotically equal)) (写成 $f\sim g$), 如果在 x_0 的某个邻域内, 可能除去 x_0 外, 存在函数 φ, 使得

$$f=\varphi g \text{ 且 } \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1. \qquad (*)$$

两个函数等价性的条件是对称的, 即当 $x\to x_0$ 时若 $f\sim g$, 则 $g\sim f$, 此外还是传递的, 即当 $x\to x_0$ 时若 $f\sim g$, 且 $g\sim h$, 则 $f\sim h$. 若在点 x_0 的某邻域内, 当 $x\neq x_0$ 时 $f(x)\neq0$, $g(x)\neq0$, 则 $(*)$ 等价于以下两条件中的任何一个:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1.$$

若 $\alpha=\varepsilon f$, 其中 $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$, 则称 α 关于 f 是一个无穷小函数 (infinitely-small function), 记为

$$\alpha=o(f), \text{ 当 } x\to x_0 \text{ 时}$$

(读为"α 为 f 的小 o 阶"). 若当 $x\neq x_0$ 时, $f(x)\neq0$, 且 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)/f(x)=0$, 则 $\alpha=o(f)$. 若当 $x\to x_0$ 时, f 是无穷小函数, 则称函数 $\alpha=o(f)$ 当 $x\to x_0$ 时为比 f 高阶的无穷小函数 (infinitely-small function of higher order). 假设 g 和 $[f]^k$ 是具有相同阶的两个量, 那么称 g 是关于 f 的一个 k 阶量 (quantity of order k). 上述各种类型公式都称为渐近估计 (asymptotic estimates); 它们对于无穷小和无穷大函数特别有意义.

例: $e^x-1=o(1)$ $(x\to0)$; $\cos x^2=O(1)$; $(\ln x)^\alpha=o(x^\beta)$ ($x\to\infty$; α,β 为任意正数); $[x/\sin(1/x)]=O(x^2)(x\to\infty)$.

下面是符号 o 和 O 的一些性质:

$$O(\alpha f)=O(f)\ (\alpha \text{ 为非零常数});$$

$$O(O(f))=O(f);$$

$$O(f)O(g)=O(f\cdot g);$$

$$O(o(f))=o(O(f))=o(f);$$

$$O(f)o(g)=o(f\cdot g);$$

若 $0<x<x_0$ 且 $f=O(g)$, 则

$$\int_{x_0}^{x}f(y)dy=O\left[\int_{x_0}^{x}|g(y)|dy\right]\ (x\to x_0).$$

含有符号 o 和 O 的公式, 总是从左往右读; 当然这并不排除某些公式从右往左读时仍然正确. 对于复变函数以及多元函数, 符号 o 与 O 也可以象上述对于一元实变函数那样引入. М. И. Шабунин 撰

【补注】 符号 o 和 O("小 oh"和"大 Oh")("little oh" and "big Oh") 是由 E. Landau 引入的.

参考文献

[A1] Hardy, G. H., A course of pure mathematics, Cambridge Univ. Press, 1975.

[A2] Landau, E., Grundlagen der Analysis, Akad. Verlagsgesellschaft., 1930 (中译本: 艾・兰道, 分析基础, 高等教育出版社, 1958). 王斯雷 译

顺序统计量 [**order statistic**; **порядковая статистика**]

基于观测结果的有序统计量序列 (亦称顺序统计量序列 (variational series)) 中的每一项. 假设被观测随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n(n\geqslant2)$ 中取值 $x=(x_1,\cdots,x_n)$; 此外, 假设在 $\mathbf{R}^n$ 中按如下规则给出一函数 $\varphi(\cdot)$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$

$$\varphi(x)=x^{(\cdot)},\ x\in\mathbf{R}^n,$$

其中 $x^{(\cdot)}=(x_{(n1)},\cdots,x_{(nn)})$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中由向量 x 将其坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 按递增顺序排列得到的向量, 即向量 $x^{(\cdot)}$ 的分量 $x_{(n1)},\cdots,x_{(nn)}$ 满足关系式

$$x_{(n1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(nn)}. \qquad (1)$$

在这种情形下, 统计量 $X^{(\cdot)}=\varphi(X)=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是一顺序统计量的系列或向量 (series (or vector) of order statistics), 而其第 k 个分量 $X_{(nk)}(k=1,\cdots,n)$ 称为第 k 个顺序统计量 (k-th order statistic).

在顺序统计量的理论中, 随机向量 X 的分量 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立同分布随机变量的情形研究的最充分,

以下仅限于考虑这种情形．假如 $F(u)$ 是随机变量 X_i $(i=1,\cdots,n)$ 的分布函数，则第 k 个顺序统计量 $X_{(nk)}$ 的分布函数 $F_{nk}(u)$ 由如下公式给出：

$$F_{nk}(u)=\mathsf{P}\{X_{(nk)}<u\}=I_{F(u)}(k,n-k+1), \quad (2)$$

其中

$$I_y(a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^y x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

是**不完全 B 函数**（incomplete beta-function）．由式（2）可见，如果分布函数 $F(u)$ 有概率密度 $f(u)$，则第 k 个顺序统计量 $X_{(nk)}(k=1,\cdots,n)$ 的概率密度 $f_{nk}(u)$ 也存在且由如下公式给出：

$$f_{nk}(u)=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(u)]^{k-1}[1-F(u)]^{n-k}f(u),$$

$$-\infty<u<\infty. \quad (3)$$

在概率密度存在的条件下，导出了顺序统计量 $X_{(nr_1)},\cdots,X_{(nr_k)}$ 的联合概率密度 $f_{r_1\cdots r_k}(u_1,\cdots,u_k)(1\leqslant r_1<\cdots<r_k\leqslant n,\ k\leqslant n)$，其表达式为

$$f_{r_1\cdots r_k}(u_1,\cdots,u_k)=$$

$$=\frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!\cdots(n-r_k)!}\times$$

$$\times F^{r_1-1}(u_1)f(u_1)[F(u_2)-F(u_1)]^{r_2-r_1-1}f(u_2)\times$$

$$\times\cdots[1-F(u_k)]^{n-r_k}f(u_{r_k}), \quad (4)$$

$$-\infty<u_1<\cdots<u_k<\infty.$$

由式（2）－（4）可以导出所谓极值顺序统计量（extremal order statistics）或称样本极小值（sample minimum）和样本极大值（sample maximum）

$$X_{(n1)}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}(X_1,\cdots,X_n) \text{ 和 } X_{(nn)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(X_1,\cdots,X_n)$$

的分布，以及所谓极差统计量（range statistic）或样本极差（sample range）$W_n=X_{(nn)}-X_{(n1)}$ 的分布．例如，如果分布函数 $F(u)$ 是连续的，则 W_n 的分布为

$$\mathsf{P}\{W_n<w\}=$$

$$=n\int_{-\infty}^{\infty}[F(u+w)-F(u)]^{n-1}dF(u),\ w\geqslant 0. \quad (5)$$

同抽样法的一般理论一样，式（2）－（5）表明，当分布函数 $F(u)$ 未知时，顺序统计量的精确分布无法用于统计推断．正因如此，在观测向量维数 n 无限增大情形下，顺序统计量分布函数的渐近研究方法得到了广泛发展．在顺序统计量的渐近理论中，对适当标准化了的顺序统计量序列 $\{X_{(nk)}\}$，当 $n\to\infty$ 时的极限分布进行了研究；一般说来，这时顺序号 k 可能随 n 变化而变化．假如随着 n 的增大，极限 $\lim_{n\to\infty}k/n$ 存在且不为 0 和 1，则所考察序列 $\{X_{(nk)}\}$ 中相应的顺序统计量 $X_{(nk)}$，称为中心顺序统计量（central order statistics）或平均顺序统计量（mean order statistics）；若 $\lim_{n\to\infty}k/n$ 等于 0 或 1，则称之为极值顺序统计量（extreme order statistics）．

在数理统计中，中心顺序统计量用于根据随机向量 X 的实现，来建立未知分布函数 $F(u)$ 之分位数（quantile）的相合估计量（consistent estimator）序列；或换句话说，用中心顺序统计量来估计函数 $F^{-1}(u)$．例如，假设 x_p 是分布函数 $F(u)$ 的水平为 $P(0<P<1)$ 的分位数，关于 $F(u)$ 已知其概率密度 $f(u)$ 连续且在点 x_P 的某邻域内严格为正，则在这种情形下，序号为 $k=[(n+1)P+0.5]$ 的中心顺序统计量序列 $\{X_{(nk)}\}$，当 $n\to\infty$ 时是分位数 x_P 的相合估计量列，其中 $[a]$ 是实数 a 的整数部分．此外，该顺序统计量序列 $\{X_{(nk)}\}$ 具有渐近正态分布，其参数为

$$x_P \text{ 和 } \frac{P(1-P)}{f^2(x_P)(n+1)},$$

即对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{X_{(nk)}-x_P}{\sqrt{P(1-P)/(n+1)}}f(x_P)<x\right\}=$$

$$=\Phi(x), \quad (6)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数．

例 1．设 $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是基于随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的顺序统计量向量．假设向量 X 的分量是独立的且服从同一概率分布的随机变量，其概率密度连续且在中位数 $x_{1/2}$ 某邻域内严格为正．这时，对于任意 $n\geqslant 2$，设 $\{\mu_n\}$ 是由

$$\mu_n=\begin{cases} X_{(n,m+1)}, & \text{若 } n=2m+1 \text{ 为奇数,}\\ \frac{1}{2}(X_{(nm)}+X_{(n,m+1)}), & \text{若 } n=2m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

定义的样本中位数序列．那么，当 $n\to\infty$ 时，序列 $\{\mu_n\}$ 具有渐近正态分布，参数为

$$x_{1/2} \text{ 和 } [4(n+1)f^2(x_{1/2})]^{-1}.$$

特别地，如果

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

$$|a|<\infty,\ \sigma>0,$$

即如果 X_i 服从正态分布 $N(a,\sigma^2)$，则序列 $\{\mu_n\}$ 渐

近正态分布，其参数为 $x_{1/2}=a$ 和 $\sigma^2\pi/(2(n+1))$. 如果将统计量序列 $\{\mu_n\}$ 与正态分布均值 a 的最优无偏估计量（unbiased estimator）序列

$$\{\overline{X}_n\},\ \overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

作比较，则应选序列 $\{\overline{X}_n\}$，因为对于 $n\geqslant 2$，有

$$\mathrm{D}\,\overline{X}_n=\frac{\sigma^2}{n}<\frac{\sigma^2\pi}{2(n+1)}\approx \mathrm{D}\,\mu_n.$$

例 2. 设 $X^{(\cdot)}=(X_{(n1)},\cdots,X_{(nn)})$ 是基于随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 的顺序统计量向量，而 X 的分量独立且在区间 $[a-h,a+h]$ 上均匀分布，其中参数 a 和 h 未知. 对于 $n\geqslant 2$，记

$$Y_n=\frac{1}{2}\ (X_{(n1)}+X_{(nn)}),$$

$$Z_n=\frac{n+1}{2(n-1)}\ (X_{(nn)}-X_{(n1)}).$$

那么，统计量序列 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$ 相应为参数 a 和 h 的相合超有效无偏估计量序列（见**超有效估计量**（superefficient estimator）. 此外，有

$$\mathrm{D}\,Y_n=\frac{2h^2}{(n+1)(n+2)},$$

$$\mathrm{D}\,Z_n=\frac{2h^2}{(n-1)(n+2)}.$$

可以证明，在用顺序统计量表示的线性无偏估计类中，在平方风险最小的意义下，序列 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$ 决定 a 和 h 的最优估计量.

参考文献

[1] Cramér, H., Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946（中译本：H.克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966）.

[2] Wilks, S. S., Mathematical statistics, Princeton Univ. Press, 1950.

[3] David, H. A., Order statistics, Wiley, 1970.

[4] Gumble, E. J., Statistics of extremes, Columbia Univ. Press, 1958.

[5] Hajek, J. and Sidak, Z., Theory of rank test, Acad. Press, 1967.

[6] Гнеденко, Б. В., 《Докл. АН СССР. Новая серия》, **32**(1941), 1, 7－9.

[7] Gnedenko, B. V., Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. of Math.*, **44**(1943), 3, 423－453.

[8] Смирнов, Н. В., 《Тр. Матем. ин-та》, **25**(1949), 5－59.

[9] Смирнов. Н. В., 《Теория вероятн. и её применен.》, **12**(1967), 2, 391－392.

[10] Чибисов, Д. М., 《Теория вероятн. и её применен.》, **9**(1964), 1, 159－165.

[11] Craig, A. T., On the distributions of certain statistics, *Amer. J. Math.*, **54**(1932), 353－366.

[12] Tippett, L. H. C., On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, *Biometrika*, **17**(1925), 364－387.

[13] Pearson, E. S., The percentage limits for the distribution of ranges in samples from a normal population ($n\leqslant 100$), *Biometrika*, **24**(1932), 404－417.

М. С. Никулин 撰

【补注】

参考文献

[A1] Serfling, R., Approximation theorems of mathematical statistics, Wiley, 1980.

周概容 译

序拓扑[**order topology; порядковая топология**]

具有线性序 $<$ 的线性序集 X 上的拓扑 $\mathcal{T}_<$，并且 $\mathcal{T}_<$ 有一个由 X 的所有可能的区间构成的基.

М. И. Войцеховский 撰

【补注】 这里“区间”通常是在“开区间”，即在形如

$$\{x\in X:\ a<x<b\}$$

的集合的意义下使用，其中 $a, b\in X$（可能 $a=-\infty$，或 $b=\infty$，或 $a=-\infty$ 且 $b=\infty$）. 如同在线性序集上一样，也可以考虑偏序集上的序拓扑. 在线性序集上它与以诸闭区间

$$\{x\in X:\ a\leqslant x\leqslant b\}$$

作为闭集的子基的区间拓扑（interval topology）相同，但在一般偏序集上两种拓扑是不同的. 在一个完全线性序集上，序拓扑可以由序收敛（order convergence）来刻画，即一个网（见广义序列（generalized sequence））$(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 收敛到一个点 x，当且仅当存在一个递增网 (l_α) 和一个递降网 (u_α)（其指标集皆为有向集 A），使得对所有 α 有 $l_\alpha\leqslant x_\alpha\leqslant u_\alpha$，并且 $\sup_\alpha l_\alpha=x=\inf_\alpha u_\alpha$.

参考文献

[A1] Birkhoff, G., Lattice theory, Colloq. Publ., 25, Amer Math. Soc., 1973.

[A2] Frink, O., Topology in lattice, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 569－582.

[A3] Ward, A. J., On relations between certain intrinsic topologies in partially ordered sets, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **51** (1955), 254－261.

卢景波 译 王世强 校

序型[**order type; порядковый тип**]，全序集 A 的

集合 A 的表征任何相似于 A 的全序集 B 的性质. 两个分别由关系 R 和 S 全序的全序集 A 和 B 称为相