悬挂结构计算理论

普遍变分原理的广泛应用

THEORY OF SUSPENDED STRUCTURES

金问鲁 著

浙江科学技术出版社

悬挂结构计算理论

金问鲁 著

浙江科学技术出版社

责任编辑：骆　健
封面设计：潘孝忠

悬挂结构计算理论

金问鲁著

*

浙江科学技术出版社出版
浙 江 新 华 印 刷 厂 印 刷
浙 江 省 新 华 书 店 发 行
开本：787×1092　1/32　印张：8.75　插页：1　字数：199,000
1981年8月第 一 版
1981年8月第一次印刷
印数：1—4,300
统一书号：15221·11
定　价：1.37 元

自　序

大跨度建筑标志着国家的建筑水平，悬挂结构又是大跨结构的发展方向。如美国、日本的奥林匹克运动会体育馆，国际博览会中的美国馆、西德馆都采用了这类新型建筑。悬挂结构具有很大的优越性，如节约钢材，跨度较大时用钢量仅为其他类型钢结构的1/5到1/7，而且建筑处理自由，可以构成所需要的任意空间。悬挂结构不仅应用在大跨度屋盖，对高耸塔桅结构、索道、悬桥、斜张桥方面，都有极为重要的应用。

悬挂结构的计算理论是最近发展起来的，六十年代初期作者提出了双层辐射式悬挂屋盖在任意荷载下的分析方法以及索网的薄膜比拟法，以后这些方法收入到《悬挂结构计算》一书中，于1975年由中国建筑工业出版社出版，该书在1978年全国科学大会上获得重大贡献成果奖。该书与本著作不同之点，是该书理论比较浅显，例题较多，对于初学者有参考价值。

1979年4月作者在北京、上海等地查阅当前国际上有关悬挂结构方面的资料，在理论方面，七十年代中发表了不少论文，遗憾的是竟缺乏一本比较完整的专著。1978年末作者探讨了普遍变分原理在悬挂结构的应用，作者认为普遍变分原理可以作为当前悬挂结构理论的完善基础。因此，作者有志于以此为基础写出一本悬挂结构理论的系统性的专著。恰好1979年6月同济大学邀请作者去该校作有关悬挂结构理论的系统讲学，此事促成了本书的完成。

变分原理是当前力学各领域的共同基础。以变分原理作为

总线索，第一讲全面考虑了单索理论，作为应用例题对当前斜张桥经常使用的Ernst公式作了修正。第二讲对当前悬挂结构的分类和计算理论作了概括性的评述，着重考虑了离散索系的变分原理，指出有限单元法的应用，讨论了悬挂结构本质之一的非线性问题解法。第三、四讲分别叙述单层索系和双层索系结构的计算方法，属于以上两类型的悬挂结构种类很多，有索道、悬桥、斜张桥、索桁架和多种型式的悬挂屋盖，特别在第三讲中考虑了单向索和梁系的共同作用。第五讲讨论当前最常使用的索网结构的计算方法，以普遍变分原理为基础推导了相应的有限单元法，作为应用，作者考虑了索网和边缘构件的共同作用，并且指出考虑共同作用的必要性。第六讲是振动计算，这里仅考虑了微小振幅的线性振动。悬挂结构具有非线性，振动计算较为困难，当前作者正在考虑有关这方面的问题，并且希望能在短期内提供比较成熟的成果。作者在上海时曾在科学会堂作了有关悬挂结构发展和理论的通俗介绍，这个讲稿作为书末的附录。为了保持本书作为讲义的活泼风格，改动较少，仍然将全书分为六讲。

本书基本是作者在1978年后的研究成果，少量引用了作者前著《悬挂结构计算》的部分内容，为了使本书成为一个完整系统，也少量地引用了现有文献的部分内容，如悬桥、斜张桥等，在引用时都注明了出处。

本书作为讲义曾在1979年10月到11月在同济大学进行讲课。承蒙作者的老师王达时副校长予以支持，赠写序言，并承他和欧阳可庆教授惠于指正，作者表示衷心感谢。

1980年4月

王　序

金问鲁同志前著《悬挂结构计算》一书，系统地、完整地阐述了关于悬挂结构的计算理论与方法，作者对每一个具体问题都提出了自己的见解，最后还介绍了最新技术在悬挂结构中的应用。就悬挂结构计算而论，是一本罕见的著作。

粉碎“四人帮”后，在建设现代化的社会主义强国中，悬挂结构具有广阔的发展前途。为了丰富和提高研究生、工程技术人员和教师的结构计算理论知识，同济大学于1979年10月到11月间特邀金问鲁同志来校开设讲座。金问鲁同志不畏炎夏酷暑，不辞辛劳，重撰悬挂结构计算讲稿，广泛应用变分原理，使内容较前著又有崭新的发展，是一本难得的佳著，谨向现代科学技术工作者和高等学校的教师推荐。

同济大学教授、副校长　王达时

1979年11月3日

目　录

第一讲　单索计算理论

1.引言和基准态的观念

由于当前大跨度结构的发展，无论是在桥梁或房屋的屋盖方面，悬挂结构的使用越来越多。与其他结构相比，悬挂结构有自身的特点，特别是表现在几何非线性方面。悬挂结构的重要组成部分是单索，而单索又充分含有悬挂结构的力学特点。所以学习悬挂结构的读者，首先对单索作一个全面和深刻的认识是非常必要的。

单索计算理论有两种陈述方法，一种是常用的方法，作者曾在《悬挂结构计算》第一章中采用，依次叙述平衡方程，应力——变形协调方程和问题的求解。这种方法的缺点是对于单索局限于特殊的情况，不能对于单索有比较全面而深刻的认识。以下用另一种方法来陈述单索计算理论。首先从单索的普遍情况出发，写出它的最小势能原理和最小余能原理。然后就常遇的平面问题写出它的平衡方程以及内力——变位关系，并用例题进行说明。

在悬挂结构中斜张结构应用广泛，如斜张桥及斜张索悬挂屋面，它的特点是由桥面或屋面系统和离散的斜张索所组成，所以在本讲中特别讲述了斜张索计算和近似公式。最后将介绍单索振动的能量原理，以及自振频率的计算，这一部分将有助于了解整个悬挂结构的振动。

这里将叙述一下基准态的观念，单索和索系在不受力状态时形状是不定的，必须有一个固定的受力状态，这个固定状态承受确定的荷载，具有确定的张力和形状，拿其余的荷载状态和这个状态进行比较，也可以求得确定的荷载和状态。对于这个指定的固定状态称为基准态，后一状态称为荷载态。基准态可以任意选择，但是对于单索来说，为简单计，常常将基准态取为不存在外载，具有一定的初张力，索的形状是直线的情况。值得提出，在索系中，特别在索网中，不可能将基准态取为双向索系都是直线的情况。有时我们也将基准态称为初态。

本讲各节，特别是几个能量原理，都属于作者自己的研究成果。

2. 能量原理

A. 索的力学性能和索线几何

索的力学性能假定是索可以承受轴向力，但不能承受任何弯矩，即抗弯刚度为零。索的材料是金属，一般是钢。索在受力后可能产生较大的变位，但由于是金属材料，应变是很小的，所以我们研究的是大变位、小应变问题。由于是大变位，从以后的推导看来，是非线性的，这是几何的非线性问题。在单索或索系的全部工作状态中，一般我们要求工作在弹性状态，即材

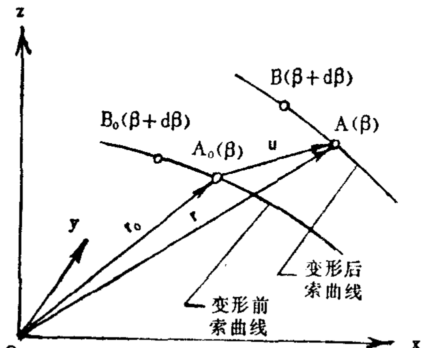

图1—1　索线几何

料的弹性模量E保持为常数。由于不考虑索的抗弯刚度，可以假设索的质量集中在索截面的中心处，而将索看成索曲线，以下考虑索曲线的几何学。

在图1—1中表示变形前和变形后的索曲线，曲线上点的位置用参数β表示，在变形前曲线上两点$A_0(\beta)$、$B_0(\beta+d\beta)$，两点的坐标参数各为β和$\beta+d\beta$，在变形后这两点移到$A(\beta)$、$B(\beta+d\beta)$。A_0、B_0、A、B的位置矢量各为：

$$
\left.\begin{aligned}
&A_0:\ \mathbf{r}_0=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\\
&B_0:\ \mathbf{r}_0+d\mathbf{r}_0=(x+x'd\beta)\mathbf{i}+(y+y'd\beta)\mathbf{j}\\
&\qquad+(z+z'd\beta)\mathbf{k}\\
&A:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{u}=(x+u)\mathbf{i}+(y+v)\mathbf{j}+(z+w)\mathbf{k}\\
&B:\ \mathbf{r}+d\mathbf{r}=(\mathbf{r}_0+\mathbf{u})+(d\mathbf{r}_0+d\mathbf{u})\\
&\qquad=(x+u+x'd\beta+u'd\beta)\mathbf{i}\\
&\qquad\quad+(y+v+y'd\beta+v'd\beta)\mathbf{j}\\
&\qquad\quad+(z+w+z'd\beta+w'd\beta)\mathbf{k}
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}1)
$$

在以上各式中右上角的撇号“ ′ ”表示对β的导微，即$'=\dfrac{d}{d\beta}$。索上两点A_0、B_0及变位时A、B所成的矢量及弧长为：

$$
\left.\begin{aligned}
&d\mathbf{r}_0=(x'd\beta)\mathbf{i}+(y'd\beta)\mathbf{j}+(z'd\beta)\mathbf{k}\\
&ds_0=|d\mathbf{r}_0|=d\beta\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\\
&d\mathbf{r}=d\mathbf{r}_0+d\mathbf{u}=(x'+u')d\beta\cdot\mathbf{i}\\
&\qquad+(y'+v')d\beta\cdot\mathbf{j}\\
&\qquad+(z'+w')d\beta\cdot\mathbf{k}\\
&ds=|d\mathbf{r}|\\
&\quad=d\beta\sqrt{(x'+u')^2+(y'+v')^2+(z'+w')^2}
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}2)
$$

从上式可以求出应变值 e 并作展开得：

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{ds-ds_0}{ds_0} \\
&= \sqrt{\frac{(x'+u')^2+(y'+v')^2+(z'+w')^2}{x'^2+y'^2+z'^2}}-1 \\
&= \sqrt{1+\frac{2x'u'+2y'v'+2z'w'+u'^2+v'^2+w'^2}{x'^2+y'^2+z'^2}}-1 \\
&= \frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}\times\Big[x'u'+y'v'+z'w'+\frac{1}{2} \\
&\qquad (u'^2+v'^2+w'^2)\Big]+\text{高次项}
\end{aligned}
$$

根据小应变假定， e 是一级小量，则上式中第一项是一级小量，余留项是高级小量，可以略去，则可将应变 e 写成：

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2} \\
&\quad \times\left[x'u'+y'v'+z'w'+\frac{1}{2}(u'^2+v'^2+w'^2)\right]
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

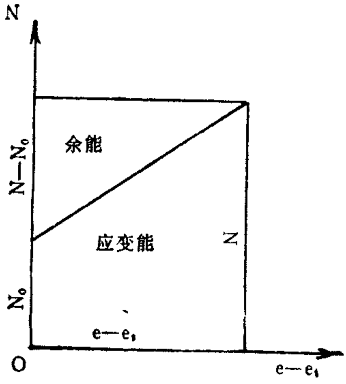

图 1—2　能量图

B. 应变能密度和余能密度

假定索的截面积是 a，弹性模量是E，开始在基准态时 A_0 处的索张力是 N_0，并且假定在基准态时各点的应变为零，加载后 A_0 移到 A 点，索张力改变为 $N=N_0+\Delta N$，应变为 $e-e_t$，e_t 是温度自由应变，并不产生应力。应变能密

度和余能密度可以根据图1—2求出。

索段微元AB的变形所作的功是$N(e-e_t)ds_0$，这部分功由余能和应变能共同组成：

$$应变能=\frac{N_0+N}{2}(e-e_t)ds_0=Ads_0$$

$$余能=\frac{N-N_0}{2}(e-e_t)ds_0=Bds_0$$

在以上两式中A、B各表示应变能密度和余能密度。根据材料力学，有以下熟知的内力应变关系：

$$N-N_0=Ea(e-e_t) \tag{1-4}$$

这里e_t是由温度改变所产生的应变，$e_t=\alpha\Delta t$，α是线膨胀系数，Δt是温度改变值，将应变能密度A和余能密度B各表示为应变和内力的关系，可得：

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{N_0+N}{2}(e-e_t)\\
&=\frac{N-N_0}{2}(e-e_t)+N_0(e-e_t)\\
&=\frac{Ea}{2}(e-e_t)^2+N_0(e-e_t)\\
B&=\frac{N-N_0}{2}(e-e_t)=\frac{(N-N_0)^2}{2Ea}
\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

C．外力功和边界条件

今设作用在索段A_0、B_0的外力沿x、y、z轴的荷载强度是q_x、q_y、q_z，微段所受外力的分量是$q_xd\beta$，$q_yd\beta$，$q_zd\beta$，在变形时，外力所作的功是$(q_xu+q_yv+q_zw)d\beta$。

整根索有两个端点O、L，今考虑端点边界条件。边界条件有两种：一种是力边界条件，即假定在所考虑的端点作用着指定的力，这时可将指定的力当作外荷载来处理。另一种是形

边界条件，是假定在所考虑的端点给出指定的变位，即：

$$\left.\begin{array}{l}\text{在O端点：} u=\bar{u}_o,\quad v=\bar{v}_o,\quad w=\bar{w}_o \\ \text{在L端点：} u=\bar{u}_L,\quad v=\bar{v}_L,\quad w=\bar{w}_L\end{array}\right\} \tag{1-6}$$

为简单计，以下仅考虑具有（1—6）式的形边界条件。实际上，这种边界条件具有较大的实用价值。在（1—6）式的形边界条件下仅有沿索线的荷载作有外功，总的外功W是：

$$W=\int(q_x u+q_y v+q_z w)d\beta \tag{1-7}$$

D．最小势能原理、普遍化势能原理和普遍化余能原理

从（1—5）式第一式可以求出总的应变能是：

$$U=\int A ds_0=\int A\frac{ds_0}{d\beta}d\beta$$

$$=\int\left[\frac{Ea}{2}(e-e_t)^2+N_0(e-e_t)\right]\frac{ds_0}{d\beta}d\beta \tag{1-8}$$

总势能Π根据定义等于U和W的差，即：

$$\Pi=\int\left[\frac{Ea}{2}(e-e_t)^2+N_0(e-e_t)\right]\frac{ds_0}{d\beta}d\beta$$

$$-\int(q_x u+q_y v+q_z w)d\beta \tag{1-9}$$

系统的势能应当为极小，有如下的最小势能原理。

最小势能原理　在所有适用（1—6）式的变位函数中，问题的解应当使（1—9）式为极小。（1—9）式中的e应当通过（1—3）式看成变位u、v、w的函数。

势能原理可以通过如下的方法进行推广，这时（1—9）式中的e看成任意函数，变位函数u、v、w可以看成任意函数，而不必约定必须适合（1—6）式。这样，将应变变位关系（1—3）式和边界条件（1—6）利用拉格兰日乘数引入

（1—9）式可以得到如下的普遍化势能原理。

普遍化势能原理　今有普遍化势能泛函 Π_I 具有如下形式：

$$
\begin{aligned}
\Pi_I = & \int\left[\frac{Ea}{2}(e-e_t)^2+N_0(e-e_t)\right]\frac{ds_0}{d\beta}d\beta \\
& -\int(q_x u+q_y v+q_z w)d\beta \\
& -\int\left\{e-\frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}\left[x'u'+y'v'+z'w'\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{2}(u'^2+v'^2+w'^2)\right]\right\}N\frac{ds_0}{d\beta}d\beta \\
& +\{N_x(O)[u(O)-\bar{u}_0]+N_y(O)[v(O)-\bar{v}_o] \\
& +N_z(O)[w(O)-\bar{w}_0]\} \\
& -\{N_x(L)[u(L)-\bar{u}_L]+N_y(L)[v(L)-\bar{v}_L] \\
& +N_z(L)[w(L)-\bar{w}_L]\}
\end{aligned} \tag{1-10}
$$

e、u、v、w、N 可以是任意函数，问题的解应当使 Π_I 取驻值。用相似的方法可以得如下的普遍化余能原理。

普遍化余能原理　今有普遍化余能原理 Π_R 如下式：

$$
\begin{aligned}
\Pi_R = & \int\left\{N\left[\frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}\left(x'u'+y'v'+z'w'\right.\right.\right. \\
& \left.\left.+\frac{1}{2}(u'^2+v'^2+w'^2)\right)-e_t\right]\frac{ds_0}{d\beta}-B\frac{ds_0}{d\beta} \\
& \left.-(q_x u+q_y v+q_z w)\right\}d\beta \\
& +\{N_x(O)[u(O)-\bar{u}_0]+N_y(O)[v(O)-\bar{v}_0] \\
& +N_z(O)[w(O)-\bar{w}_0]\} \\
& -\{N_x(L)[u(L)-\bar{u}_L]+N_y(L)[v(L)-\bar{v}_L] \\
& +N_z(L)[w(L)-\bar{w}_L]\}
\end{aligned} \tag{1-11}
$$

N、u、v、w 可以是任意函数，问题的解应当使 Π_R 取驻值。

E，单索的基本方程

从普遍化能量原理可以推导出单索的全部方程，以下以普遍化势能原理进行推导。在（1—10）式中将 e、u、v、w、N 看成独立函数进行变分，经过适当的分部积分可得如下的变分形式，从驻值条件看，这个变分式为零。

$$
\begin{aligned}
&\int[Ea(e-e_t)-(N-N_0)]\frac{ds_0}{d\beta}\delta e\,d\beta \\
&-\int\left[q_x+\frac{d}{d\beta}\left(\frac{x'+u'}{x'^2+y'^2+z'^2}N\frac{ds_0}{d\beta}\right)\right]\delta u\,d\beta \\
&-\int\left[q_y+\frac{d}{d\beta}\left(\frac{y'+v'}{x'^2+y'^2+z'^2}N\frac{ds_0}{d\beta}\right)\right]\delta v\,d\beta \\
&-\int\left[q_z+\frac{d}{d\beta}\left(\frac{z'+w'}{x'^2+y'^2+z'^2}N\frac{ds_0}{d\beta}\right)\right]\delta w\,d\beta \\
&+\left[\frac{(x'+u')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{ds_0}{d\beta}\bigg|_L-N_x(L)\right]\delta u(L) \\
&-\left[\frac{(x'+u')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{ds_0}{d\beta}\bigg|_O-N_x(O)\right]\delta u(O) \\
&+\left[\frac{(y'+v')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{ds_0}{d\beta}\bigg|_L-N_y(L)\right]\delta v(L) \\
&-\left[\frac{(y'+v')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{ds_0}{d\beta}\bigg|_O-N_y(O)\right]\delta v(O) \\
&+\left[\frac{(z'+w')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{ds_0}{d\beta}\bigg|_L-N_z(L)\right]\delta w(L) \\
&-\left[\frac{(z'+w')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\frac{ds_0}{d\beta}\bigg|_O-N_z(O)\right]\delta w(O) \\
&-\int\left\{e-\frac{1}{x'^2+y'^2+z'^2}[x'u'+y'v'+z'w' \right.\\
&\left.+\frac{1}{2}(u'^2+v'^2+w'^2)]\right\}\frac{ds_0}{d\beta}\delta N\,d\beta \\
&+[u(O)-\bar{u}_0]\delta N_x(O)+[v(O)-\bar{v}_0]\delta N_y(O)
\end{aligned}
$$

$$+[w(O)-\bar{w}_0]\delta N_z(O)-[u(L)-\bar{u}_L]\delta N_x(L)$$
$$-[v(L)-\bar{v}_L]\delta N_y(L)-[w(L)-\bar{w}_L]\delta N_z(L)$$
$$=0 \tag{1-12}$$

因为变分函数 δe、δu、δv、δw、$\delta u(L)$、$\delta u(O)$、$\delta v(L)$、$\delta v(O)$、$\delta w(L)$、$\delta w(O)$、δN、$\delta N_x(O)$、$\delta N_y(O)$、$\delta N_z(O)$、$\delta N_x(L)$、$\delta N_y(L)$、$\delta N_z(L)$ 都可以是任意函数，所以在（1—12）式中它们的系数都必须等于零，依次可得如下各组方程。

内力——应变关系：

$$N-N_0=Ea(e-e_t) \tag{1-13}$$

平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\beta}\left[\frac{x'+u'}{x'^2+y'^2+z'^2}N\frac{ds_0}{d\beta}\right]+q_x=0\\
&\frac{d}{d\beta}\left[\frac{y'+v'}{x'^2+y'^2+z'^2}N\frac{ds_0}{d\beta}\right]+q_y=0\\
&\frac{d}{d\beta}\left[\frac{z'+w'}{x'^2+y'^2+z'^2}N\frac{ds_0}{d\beta}\right]+q_z=0
\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

索力在端点上的表示形式：

$$\left.\begin{aligned}
N_x(L)&=\frac{(x'+u')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\left.\frac{ds_0}{d\beta}\right|_L\\
N_x(O)&=\frac{(x'+u')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\left.\frac{ds_0}{d\beta}\right|_O\\
N_y(L)&=\frac{(y'+v')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\left.\frac{ds_0}{d\beta}\right|_L\\
N_y(O)&=\frac{(y'+v')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\left.\frac{ds_0}{d\beta}\right|_O\\
N_z(L)&=\frac{(z'+w')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\left.\frac{ds_0}{d\beta}\right|_L\\
N_z(O)&=\frac{(z'+w')N}{x'^2+y'^2+z'^2}\left.\frac{ds_0}{d\beta}\right|_O
\end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$