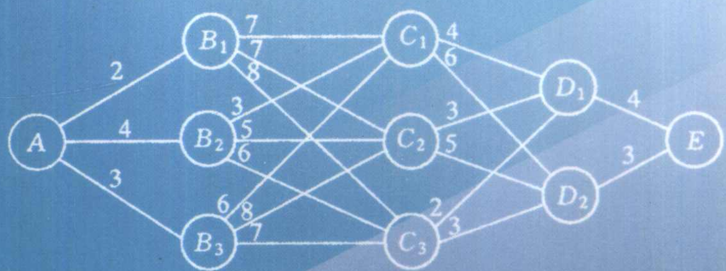
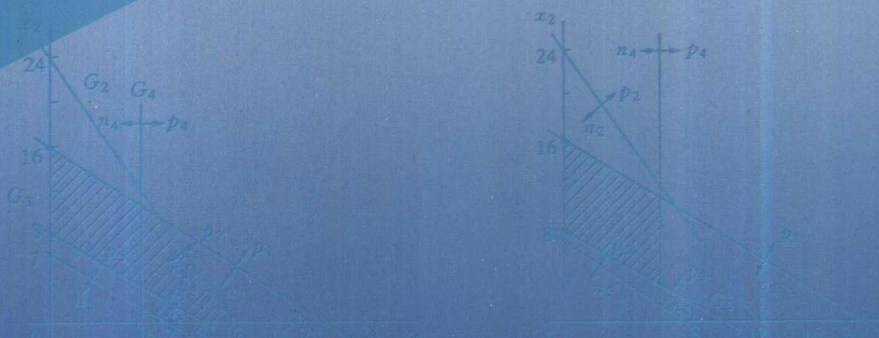
中国科学院先进制造研究与发展基金支持项目

整数规划基础

聂义勇　贵　刚　宋　翔　编著





NEUPRESS
东北大学出版社

中国科学院先进制造研究与发展创新基金支持项目

整数规划基础

聂义勇　贵　刚　宋　翔　编著

东北大学出版社

内容提要

本书较全面地阐述了整数规划的割平面法、分支定界法、隐式枚举法、不完全枚举法、动态规划法及若干特殊问题的特殊方法。作为离散规划的一种基础，本书着重介绍了连续规划的单纯形法及其发展、多目标规划及其发展，以及矩阵博弈。本书可作为运筹学、管理科学、应用数学等专业大学生、研究生的教材；也可作为相关专业科研、教学人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

整数规划基础/聂义勇，贯刚，宋翔编著．—沈阳：东北大学出版社，2001.10
ISBN 7-81054-663-5

Ⅰ.整…　Ⅱ.①聂…②贯…③宋…　Ⅲ.整数规划-高等学校-教材　Ⅳ.O221.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 064219 号

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110004)
电话：(024)23890881　　传真：(024)23892538
网址：http://www.neupress.com　E-mail：neuph@neupress.com

沈阳农业大学印刷厂印刷	东北大学出版社发行
开本：787mm×1092mm　1/16　字数：382 千字	印张：15
2001 年 10 月第 1 版	2001 年 10 月第 1 次印刷
责任编辑：张德喜	责任校对：米　戎
封面设计：唐敏智	责任出版：杨华宁

定价：25.00 元

目　　录

1 整数规划实例

1.1 整数规划的概念

任何具有极大和极小目标的决策问题都可以归结为一个整数最优化问题，其中(可量化)决策变量必须假定为非分数或离散值。一般地说，整数问题可以有约束或无约束，表示目标和约束的函数可以是线性或非线性。在严格意义下，每个整数问题都应当被看作非线性的，因为它的函数仅仅被定义为变量的离散值。然而，从研究整数问题解法的观点看，更有意义的分类是忽略这种技术细节。亦即，一个整数问题被归类为线性的，在放松变量的整数限制后函数是严格线性的。否则，问题是非线性的。以后将看出这种分类是研究整数问题解法的重要基础。其实，这个领域的多数研究集中在线性问题，本质上是由于它相对容易些。

上述意义下的整数最优化不是一个新的数学题目，但直到20世纪40年代末及50年代初运筹学广泛应用之前，多数被研究的问题基本上是纯数学的。例如 n 个平面将三维空间分成最多块数的问题，及平面地图着色使之用最少颜色区分任何两个具有公共边界段区域的问题。可惜，不像连续数学那样，很少有整数最优化的统一理论产生，而只是研究一些特殊情况。

整数最优化对解决实际问题的重要性逐渐在运筹学领域令人信服地显示出来。然后，研究人员和专家都认识到求解若干或全部决策变量为整数的规划模型的必要。虽然各种应用领域的若干重要问题形成过整数模型，但第一个求解线性整数问题的有限整数规划技术是1958年由 Gomory 研究出来的。从此以后，其他算法被陆续研究出来。

1.1.1 整数规划的数学定义

一般的整数规划可定义为：

$$\max(\text{or}\ \min) z = g_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\text{s.t.}\quad g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{Bmatrix}\leqslant\\ =\\ \geqslant\end{Bmatrix}b_i,\ i\in M\equiv\{1,2,\cdots,m\}$$

$$x_j\geqslant 0,\ j\in N\equiv\{1,2,\cdots,n\}$$

$$x_j\ \text{integer},\ j\in I\subseteq N$$

如果 $I=N$，即所有的变量被限制于整数值，则问题叫做纯整数规划。否则，若 $I\subset N$，则当做混合问题处理。纯规划和混合规划的概念有时被推广到约束的松弛变量。以后在多数情形下不再特别说明。

整数规划领域中多数研究集中在 g_i 为线性函数，$i\in\{0\}\cup M$，为标准化起见，线性问题被写成

$$\max(\text{or}\ \min) z = \sum_{j\in N} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j\in N} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ i \in M$$
$$s_i \geqslant 0,\quad i \in M$$
$$x_j \geqslant 0,\quad j \in N$$
$$x_j \text{integer},\quad j \in I \subset N$$

其中 s_i 是松弛变量。如果约束本来是等式,则没有辅助的松弛变量。

去掉整数性条件,则问题变成(连续)线性或非线性规划。换句话说,整数规划是在连续可行解空间的离散点集内寻找最优点。

表面上看,附加整数性条件似乎不应该成为严重问题。实际上解空间在附加条件后也"较好"确定,因为人们不再需要在无穷的连续点集内"搜索"(为简单起见,假定连续空间是有界的)。虽然整数问题的解空间在结构上比连续问题好确定,但计算起来已证明是可怕的。尽管持续不断的理论研究已有几十年时间,加之数字计算机速度和功能的惊人增加,研究的整数规划算法还是没产生满意的结果。

本质的事实是整数性条件常常破坏解空间的"好"特性。典型的示例是整数线性规划。去掉整数性条件,解空间是凸的。这个最基本的特性导出线性规划中极成功的单纯形法。

由于线性和非线性连续规划的成功,差不多所有的整数规划算法基本上是把离散空间转换为等价的连续空间。这一般是修改原始的连续解空间,使得所希望的最好整数点被挑选出来。即使连续空间不可用(如全是二进制变量的问题),其解法通常还是可以被追溯到连续问题。

直接从离散变量的有限点集出发考虑解法的代表是枚举法。但完全枚举(或称穷举)会带来组合爆炸。本质上的完全枚举(如隐式枚举)也没有摆脱组合爆炸的阴影。不完全枚举法是多项式时间算法,甚至是与变量数目无关的算法,但其解通常是统计意义下的近似解,需要估计它为最优解的概率或/及它不为最优解时的误差。

1.1.2 连续最优解舍入到整数解

对整数规划程序的失望导致多数潜在用户避免使用它们。结果,有些人相信先用连续模型然后舍入结果可以更好地解决问题,即使得不到最优解,也可以迅速而"自动"地获得一个好解答。毕竟,各种模型参数的少许误差应该是允许的,这样使"最优"解有点柔性。

舍入的思想不是毫无是处,至少临时应急(如单方向地舍或入)及面临判断"一个"解或无解时可取。然而,人们决不要误认为每个整数问题都可以按这种方式处理。舍入的结果通常不再是整数规划的一个可行解;并且随着决策变量的增加,"舍"或"入"的可能性按 2 的指数增长,再快的计算机也没法计算和比较舍入后的结果。

一般来说,对整数规划而言,连续最优解舍入到整数解不是一个可取的近似方法。

下面例举一些典型的整数规划问题,这些实例都具有明确的数学模型。还有许多整数规划问题很难用数学语言描述,或者很难找到恰当的数学描述方式,这有待于自然科学与人文科学的发展。

1.2 单次装载问题

有一辆卡车的最大载重为 b,现有 n 种货物可供装载。设 $j^{\#}$ 货物每件重量为 a_j,每件装

载收费为 $c_j(j=1,\cdots,n)$。试问：应采用怎样的装载方案才能使卡车一次载货的收入最大？

解 设 x_j 表示卡车装载 $j^{\#}$ 货物的件数。于是，可得下面的整数规划问题：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$$

$$x_j \geqslant 0, \text{整数}, j=1,\cdots,n$$

其中约束条件 $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$ 表示卡车装载货物的总重量不应超过卡车的最大载重量。

1.3 产销平衡的运输问题

设某种物品有 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$；n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$。A_i 地的产量为 a_i，$i=1,2,\cdots,m$；B_j 处的需求量为 b_j，$j=1,2,\cdots,n$。由 A_i 运往 B_j 单位产品的运费为 c_{ij}，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$。

不妨假定 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。对所有 i 和 j，$a_i, b_j > 0$。如果 $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$，即供过于求时，可假设有一虚拟的销地 B_{n+1}，$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$，且 $c_{i,n+1}=0$，$i=1,2,\cdots,m$。若 $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$，则问题无解。试求：产销平衡条件下总运费最小的调运方案。

下面来建立这个问题的数学模型。

设从第 i 个产地到第 j 个销地的物质运输量为 x_{ij}，则目标函数为

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

约束条件是

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$$

又由于产销平衡，因此有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

该模型是线性规划模型，它有 $m \times n$ 个变量，$m+n-1$ 个独立约束方程。从模型可知，运输问题的约束方程组的系数矩阵具有以下形式：

$$
\left[\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \\
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & \cdots & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & \cdots & & 1 & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & \ddots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & \cdots & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{ 行} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ 行}
\end{array}
$$

上述矩阵中的元素均为 0 或 1(其中零元素未写);矩阵的每一列中正好有两个非零元素,每个变量在前 m 个约束方程中出现一次,在后 n 个约束方程中出现一次。

由于运输问题的特定结构形式,因此对它有较单纯形法更为简单的求解方法——表上作业法,表上作业法的实质仍是单纯形法,这里不再介绍,有兴趣者可参考有关资料。

运输问题还有一个更为重要的性质,这就是:如果 a_i, b_j 都是整数,那么最优解中,x_{ij} 也必为整数值。利用这个特点,可以将很多其他类型的整数规划问题化为运输问题来求解,不用特别增加整数限制条件,结果可自然满足整数要求。运输问题的上述特性给求解某些整数规划问题带来了很大方便。

1.4 工厂选址问题

某地区有 m 座煤矿,$i^{\#}$ 矿每年产量为 a_i 吨,现有火力发电厂一个,每年需用煤 b_0 吨,每年运行的固定费用(包括折旧费,但不包括煤的运费)为 h_0 元。现规划新建一个发电厂,m 座煤矿每年开采的原煤将全部供给这两个电厂发电用。现有 n 个备选的厂址。若在 $j^{\#}$ 备选厂址建电厂,每年运行的固定费用为 h_j。每吨原煤从 $i^{\#}$ 矿运送到 $j^{\#}$ 备选厂址的运费为 c_{ij}($i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$)。每吨原煤从 $i^{\#}$ 矿运送到原有电厂的运费为 c_{i0}($i=1,\cdots,m$)。试问:应把新厂厂址选在何处,m 座煤矿开采的原煤应如何分配给两个电厂,才能使每年的总费用(电厂运行的固定费用与原煤运费之和)为最小?

解 易知新建电厂每年用煤量为 $b = \sum_{j=1}^{m} a_i - b_0$。

令决策变量

$$
y_j = \begin{cases} 1, & j^{\#}\text{备选厂址被选中;} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \cdots, n
$$

为了方便,称原有电厂为 $0^{\#}$ 厂,在 $j^{\#}$ 备选厂址处建的新厂为 $j^{\#}$ 厂。设 x_{ij} 为每年从 $i^{\#}$ 矿运送到 $j^{\#}$ 厂的原煤数量($i=1,\cdots,m$; $j=0,1,\cdots,n$)。于是,每年总费用等于

$$
z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j + h_0
$$

若 $j^{\#}$ 备选厂址未被选中,即 $y_j = 0$,那么 $j^{\#}$ 厂根本就不存在,这时 x_{ij} 应全为零。故有下列约束条件:

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\cdots,m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0} = b_0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = by_j,\ j = 1,2,\cdots,n,$$
$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n.$$

又因为现在只要新建一个电厂，故还有下述约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

于是，上述选址问题可以归纳成下列形式的整数规划：

$$\begin{aligned}
\min z &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} h_j y_j + h_0 \\
\text{s.t.} &\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,\cdots,m, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{i0} = b_0, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = by_j,\ j = 1,2,\cdots n, \\
&\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\
&x_{ij} \geqslant 0,\ y_j = 0,1 \cdot i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n.
\end{aligned}$$

1.5 背包问题

形式最简单的整数规划问题是背包问题：一个背包的容积为 $V>0$，现有 n 种物品可装，物品 j 的重量为 $w_j>0$，体积为 $v_j>0, j\in N, N=\{1,\cdots,n\}$。问如何配装，既使得不超过背包的容积，且使装的总重量最大。

设变量

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{物品 } j \text{ 被装入背包,} \\ 0, & \text{物品 } j \text{ 不装入背包。} \end{cases}$$

则背包问题可写成如下的 0-1 规划的形式：

求
$$\max \boldsymbol{wx} = \sum_{j\in N} w_j x_j,$$

满足

$$\boldsymbol{vx} = \sum_{j\in N} v_j x_i \leqslant \boldsymbol{V},$$
$$x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1,\ j \in N.$$

记背包问题的允许解集合为 S。不妨可设 $v_j\leqslant \boldsymbol{V}, j\in N$。(若有 $v_j > \boldsymbol{V}$，则必有 $x_j=0$)，且 $\sum_{j\in N} v_j > \boldsymbol{V}$ (否则，必有 $x_j=1, j\in N$)。

1.6 旅行售货员问题

在城市 v_1 的一位旅行售货员计划去城市 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 推销商品，然后返回 v_1。设 c_{ij} 为从城市 v_i 到城市 v_j 需要的时间（$i, j=1, \cdots, n$； $i \neq j$）。试问：这位旅行售货员应如何计划旅行路线，以便一方面保证对每个城市恰好进行一次访问，另一方面在旅途上花费的时间又最少？

解　令决策变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若在旅行路线中有从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 的行程,}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

因此，目标函数为：

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij},$$

其中 $c_{ii}(i=1, \cdots, n)$ 可取为一个充分大的正数 M。（请读者想一想，为什么？）

由于旅行售货员在旅途中恰有一次以 v_i 为起点的行程，故应有：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=1, \cdots, n.$$

同样，恰有一次以 v_j 为终点的行程，故应有：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, j=1, \cdots, n.$$

但是，满足这些约束条件的解，不一定是售货员的一条旅行路线。因为，有可能出现多回路的“分割”现象（见图 1.1）。

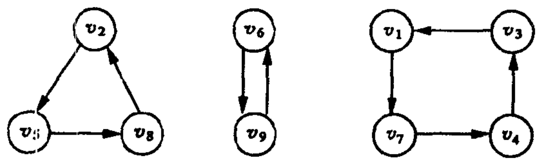


图 1.1

为了避免这种“分割”现象的出现，还需增加一些约束条件。我们要求任意两个不同的城市 v_i 和 v_j 之间都有相应的旅行路线把它们连接起来，或者把几个城市任意分成两组 Q 和 $\overline{Q}$ 后，在旅行路线中一定要存在以 Q 中某个城市 v_i 为起点，以 $\overline{Q}$ 的某个城市 v_j 为终点的一个行程。若以 Q 表示集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一个非空真子集，$\overline{Q}=\{1, 2, \cdots, n\}-Q$，则上述要求可用下面的约束条件来表示：

$$\sum_{i \in Q}\sum_{j \in \overline{Q}} x_{ij} \geqslant 1$$

Q 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一非空真子集。由于 n 个元素组成的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 共含有 2^{n-1} 个非空真子集，因此把 n 个城市分成两组 Q 和 $\overline{Q}$ 共有 2^{n-1} 种分法。换言之，这类约束条件共有 2^{n-1} 个。

于是，旅行售货员问题可以写成下列形式的 0-1 规划问题：

$$\begin{aligned}
\min z &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,\cdots,n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,\cdots,n, \\
& \sum_{i\in Q}\sum_{j\in \bar{Q}} x_{ij} \geqslant 1, Q \subset \{1,2,\cdots,n\}, \\
& x_{ij} = 0,1, \quad i,j = 1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

1.7 套裁下料问题

看一个经典的线性规划实例：钢筋下料。设钢筋的原材料长度为 l。要利用这些钢筋下长度分别为 $l_1,\cdots,l_m$ 的毛坯料。假设毛坯料长 l_i 的需要量为 b_i，问应该采用何种下料方式，才能既满足需要，又使使用的钢筋根数最少？

用非负的整数向量 $\boldsymbol{P}_j=(a_1,a_2,\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 表示对一根钢筋的第 j 种下料方式，其中 a_{ij}表示下毛料 l_i 的数目。则所有的向量 $\boldsymbol{P}_j$ 必须满足条件 $\sum\limits_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \leqslant 1$，所有 a_{ij}为非负整数。反之，满足条件的任何向量 $\boldsymbol{P}_j$ 都对应着一种下料方式。特别地，令

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \quad \boldsymbol{P}_m=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{ii}=\left\lfloor \frac{l}{l_i} \right\rfloor, i=1,2,\cdots,m$$

数$\lfloor r \rfloor$表示不超过 r 的最大整数。$\boldsymbol{P}_1,\cdots,\boldsymbol{P}_m$ 表示只下一种毛料的方式。

设采用方式 $\boldsymbol{P}_j$ 下料的钢筋总数为x_j，则上述问题可写成如下形式

求

$$\min \sum_j x_j$$

满足条件

$$\begin{aligned}
& \sum_j a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m, \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij}l_i \leqslant l, \text{对所有的方式 } j, \\
& a_{ij} \text{ 为非负整数}, \\
& x_j \geqslant 0, \text{对所有的方式 } j。
\end{aligned}$$

习　题

1．明年1月，某工厂准备在甲、乙、丙三种产品中选择两种产品投产，它们都需要经过三道工序加工，有关数据如下表：

加工时间/(小时/件)		产品			生产能力/小时
		甲	乙	丙	
工序	A	3	2	1	1800
	B	1	1	2	2000
	C	1	3	1	1600
成本/(元/件)		50	80	60	
售价/(元/件)		200	300	250	

甲、乙、丙产品在投产时,无论生产数量有多大,都需要固定费用(例如装夹具的设计制作费)。假定三种产品的固定费用分别为1500元,2000元和1800元,问如何安排生产可使工厂获得的利润最大?试建立整数规划模型。

2.(选择性约束条件问题)某厂生产第 j 种产品的数量为 $x_j(j=1,2,3)$,其材料可在甲及乙中选择一种,材料消耗的约束条件分别为

$$2x_1+5x_2+6x_3\leqslant 180 \quad 及 \quad 4x_1+3x_2+5x_3\leqslant 300$$

(其他资源约束未列出)。试问这类选择性约束条件如何体现在模型中?

3. 怎样利用0-1变量,将下列情况表成线性约束条件:

(1) 下列四个约束条件中,至少必须满足3个:

$$x_1+x_2\leqslant 5,\ x_2\leqslant 3,\ x_3\leqslant 5,\ x_3+x_4\leqslant 7。$$

(2) 对四个非负的变量 x_1,x_2,x_3 和 x_4,有:

$$或者\ x_1=0,x_2=0,或者\ x_3=0,x_4=0。$$

(3) x_3 只能取值0,5,6和12。

(4) 当 $x_1+3x_2+4x_3\leqslant 18$ 时,或有 $6\leqslant x_1\leqslant 8$,或有 $x_1=0$;

而当 $19\leqslant x_1+3x_2+4x_3$ 时,或有 $10\leqslant x_1\leqslant 20$,或有 $x_1=0$。

4. 用编号为1,2,3,4的四种机床生产三种产品1,2,3,这三种产品的工艺路线及工序加工时间如下表所示:

工艺路线		$j^{\#}$机床加工时间/小时			
		1	2	3	4
$i^{\#}$产品	1	$a_1 \longrightarrow$		$a_3 \longrightarrow$	a_4
	2	$b_1 \longrightarrow$	$b_2 \longrightarrow$		b_4
	3		$c_2 \longrightarrow$	c_3	

由于不同的产品需要不同的装夹具,所以每台机床必须先将一件产品完成,而后才能加工后面的产品。此外,还要求产品B开始加工到完成,经历时间不得超过 d 小时。问如何确定各产品在机床上的加工顺序,使在最短的时间内制成全部产品。

5.(利润分段线性问题)某厂生产甲、乙两种产品,需经过金工和装配两个车间加工,有关数据如下表:

每件产品加工时间/小时		产品		总有效工时
		甲	乙	
车间	金工	4	3	480
	装配	2	5	500
售价/(元/件)		300	520	

产品乙每件生产成本为400元。试根据产品甲生产成本的下列两种情况分别建立整数规划的模型:

(1)产品甲的生产成本是分段线性的,即第1件至第30件,每件成本为200元;第31件至第70件,每件

成本为 195 元;从第 71 件开始,每件成本为 190 元。

(2)产品甲的产量不超过 40 件时,每件成本为 200 元,但若超过 40 件,则甲的全部产品统算在一起,每件成本为 195 元。

6. 用甲、乙两台机床生产 A,B 两个产品,这两个产品在甲、乙两台机床上的加工顺序及加工工时如下:

产品 A: 甲 2 小时 ⟶ 乙 3 小时

(即产品 A 要先在甲机床上加工 2 小时,再在乙机床上加工 3 小时,才完成)

产品 B: 甲 4 小时 ⟶ 乙 5 小时

或 乙 5 小时 ⟶ 甲 6 小时

每台机床只能在加工好一个产品以后,再加工另一个产品,试列出线性整数规划模式,以确定 A,B 在甲、乙两台机床上的加工顺序,使在最短时间内完成 A,B 产品。

7.(装配线平衡问题)若某工厂的产品的装配线由 6 道工序组成,各工序的加工时间及工序前后顺序如下表:

工　序	加工时间/分钟	前道工序
1	3	
2	5	
3	2	2
4	6	1,3
5	8	2
6	3	4

若这条装配线设若干工作站。被装配的产品在这些编了号的工作站上流水移动时,每个工作站都要完成一道或几道工序。我们假定:在任一给定的工作站上,不管完成哪些工序,能用的总时间不得超过 10 分钟。问最少应设立几个工作站?每个工作站完成哪些工序?建立整数规划模型。

8. 尝试从自己有关课题中提炼整数规划数学模型。

2 单纯形法

几十年来的大量使用所取得的效果表明，单纯形法是一个好算法，效率很高。到目前为止，还未碰到过用它算不出来的线性规划问题。

1972年，克利(Klee)和明地(Minty)人为地设计出了一些线性规划问题，用单纯形法来求解它们，效果非常不好，计算时间随问题规模的增长而成倍地增加！

可大量实践表明单纯形法是一个好算法。1983年，著名数学家——菲尔兹奖得主斯梅尔(Smale)——从理论上证明，使单纯形法“失灵”的那些线性规划问题在实际中出现的可能性是微乎其微的。实践也表明，这类问题难得碰上，事实上就没有碰到过。因此从概率意义上讲，尽可以放心地使用单纯形法。

2.1 线性规划基本概念

线性规划问题的标准形式为

求

$$\max x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.1.1}$$

满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.1.3}$$

其中的 c_j, a_{ij}, b_i 都是已知的实数，x_j 是未知量。式(2.1.1)称为目标函数，式(2.1.2)和(2.1.3)称为约束条件。满足方程组(2.1.2)的解$\{x_1, \cdots, x_n\}$，若同时又满足条件(2.1.3)，则称其为允许解。使目标函数 x_0 的值达到最大的允许解，称为最优解。利用向量和矩阵的符号，记

$$\boldsymbol{C} = (c_1, \cdots, c_n),$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, \cdots, a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}, \cdots, a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\boldsymbol{P}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

则式(2.1.1)至(2.1.3)可写成

求 $$\max\ x_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$
满足条件
$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} = b_i,\quad i = 1,2,\cdots,m,\quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.$$
或者写为

求 $$\max\ x_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},$$
满足条件
$$\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{P}_j = \boldsymbol{b},\quad x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,\cdots,n.$$
或者简单地写为

求 $$\max\left\{x_0 \mid x_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\right\}.$$

假如所给问题的目标函数是求 $\min\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$,则可等价地化为求$\{-\max(-\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})\}$。假如所给问题的约束条件中含有不等式
$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} \leqslant b_i,\quad \text{或}\quad \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} \geqslant b_i,$$
则可等价地化为如下的等式条件
$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + x_{n+1} = b_i,\quad x_{n+i} \geqslant 0,$$
或
$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} - x_{n+i} = b_i,\quad x_{n+i} \geqslant 0,$$
称 x_{n+i} 为松弛变量。

约束条件(2.1.2),(2.1.3)所确定的定义域是高维空间中的凸多面体。一个多面体的最基本的概念是顶点和棱,顶点称为多面体的零维边界面,棱称为一维边界面。下面所定义的基本允许解和极方向是顶点和棱的代数描述。引进单纯形表是为了使计算过程表格化。

对线性规划问题,求 $\max\left\{x_0 \mid x_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\right\}$。

设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于行数 m,从 $\boldsymbol{A}$ 中任意地取出 m 列 $\boldsymbol{P}_{j_1}, \boldsymbol{P}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{P}_{j_m}$,构成 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $m \times m$ 的子矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{j_1}\boldsymbol{P}_{j_2}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m})$,若 $\boldsymbol{B}$ 非奇异(即 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$),则称 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划问题的一个基。变量 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m}$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 的基变量,其余的变量称为 $\boldsymbol{B}$ 的非基变量,对基 $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{P}_{j_1}\boldsymbol{P}_{j_2}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m}\}$,让所有的非基变量都取零值后,约束条件化为
$$x_{j_1}\boldsymbol{P}_{j_1} + x_{j_2}\boldsymbol{P}_{j_2} + \cdots + x_{j_m}\boldsymbol{P}_{j_m} = \boldsymbol{b},$$
若记向量
$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix},$$
则上式可写成
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}.$$
利用高斯消去法,可解得
$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$
记向量
$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_{10} \\ \vdots \\ b_{m0} \end{pmatrix}$$

称方程组(2.1.2)的解

$$x_{j_1}=b_{10},\cdots,x_{j_m}=b_{m0},\ \text{其余}\ x_j=0 \tag{2.1.4}$$

为对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本解;若满足 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$,则称其为基本允许解,而这时的 $\boldsymbol{B}$ 称为允许基。

对应于基 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_{j_1}\cdots\boldsymbol{P}_{j_m})$,考虑线性方程组

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}a_{ij_1}\pi_i&=c_{j_1},\\ &\vdots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij_m}\pi_i&=c_{j_m},\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

定义向量

$$\boldsymbol{C}_B=(c_{j_1},\cdots,c_{j_m}),\ \boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\cdots,\pi_m),$$

则(2.1.5)可写为

$$\boldsymbol{\pi P}_{j_1}=c_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\pi P}_{j_m}=c_{j_m},$$

或者

$$\boldsymbol{\pi B}=\boldsymbol{C}_B.$$

利用高斯消去法,可解得

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}.$$

称 $\boldsymbol{\pi}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形乘子。用 $\boldsymbol{\pi}$ 乘方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两边,可得

$$\boldsymbol{\pi Ax}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\pi b}. \tag{2.1.6}$$

从 $x_0=\boldsymbol{Cx}$ 的两边减式(2.1.6)的两边,可得

$$x_0-\boldsymbol{\pi b}=\boldsymbol{Cx}-\boldsymbol{\pi Ax},$$

即

$$x_0+(\boldsymbol{\pi A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\pi b}, \tag{2.1.7}$$

将基本解(2.1.4)代入(2.1.7),可求得目标函数值

$$x_0=x_0+(\boldsymbol{\pi P}_{j_1}-c_{j_1})b_{10}+\cdots+(\boldsymbol{\pi P}_{j_m}-c_{j_m})b_{m0}=\boldsymbol{\pi b}.$$

定理 2.1 对基 $\boldsymbol{B}$,若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\geqslant\boldsymbol{0}$,则对应于 $\boldsymbol{B}$ 的基本解(2.1.4)便是最优解。我们称其为基本最优解,而这时的基 $\boldsymbol{B}$ 称为最优基。

证明:由 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}$,可知(2.1.4)是基本允许解;由 $(\boldsymbol{\pi A}-\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})\geqslant\boldsymbol{0}$,则对一切允许解 $\boldsymbol{x}$,由关系 $(\boldsymbol{\pi A}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$,根据关系式(2.1.7),可知任何允许解的目标函数值 $x_0\leqslant\boldsymbol{\pi b}$,但是允许解(2.1.4)使目标函数值达到 $\boldsymbol{\pi b}$,因此必是最优解。证毕。

用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 乘方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 两边,得

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},$$

与方程(2.1.7)联在一起,可得关系式

$$\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\end{pmatrix}. \tag{2.1.8}$$

我们称线性方程组(2.1.8)中的矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$