大学课程
辅导与应试
系列丛书

●南北名校联合 ●四方名师打造 ●天下名品汇粹

大学物理辅导

曹文斗 霍炳海 贾洛武 袁兵

- 考点评注
- 重点分析
- 难点阐释

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学物理辅导

曹文斗　霍炳海　贾洛武　袁　兵

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是与《大学物理概论》配套的学习参考书,书中每一章都包括内容提要、基本要求、典型例题、习题解答和本章小结五部分.

本书供高等工科院校物理学时较少的专业使用,也可供各类高等院校有关专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理辅导/曹文斗等编.—天津:天津大学出版社,2003.4

ISBN 7-5618-1749-5

Ⅰ.大… Ⅱ.曹… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 019192 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址	www.tdcbs.com
电　　话	营销部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷	河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	170mm×240mm
印　　张	9
字　　数	198 千
版　　次	2003 年 4 月第 1 版
印　　次	2003 年 4 月第 1 次
印　　数	1— 4 000
定　　价	12.00 元

前　言

本书是与《大学物理概论》配套的教学参考书，全书共13章，每章包括内容提要、基本要求、典型例题、习题解答、本章小结五个部分．典型例题部分精选不同类型、不同难度的有代表性的例题，进行分析解答，有的题目还给出多种方法求解，以开阔解题思路．小结部分进一步总结各章的重点、难点、解题方法和学习中容易出现的问题．习题解答部分则是对《大学物理概论》中的部分难题进行解答，题号与原书相同．

编写本书的目的是希望学生能在较少的学时内把握学习重点，深刻理解物理概念和规律，提高自己分析问题和解决问题的能力．

本书虽然篇幅不大，但选材精练，重点突出，内容涉及大学物理的各个方面，故亦可单独作为工科院校各专业的教学参考书．

由于编者水平有限，疏漏和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正．

编者

2003.2

目　　录

第 1 章　质点力学 ……………………………………………… (1)

1.1　内容提要 ……………………………………………… (1)

1.2　基本要求 ……………………………………………… (2)

1.3　典型例题 ……………………………………………… (3)

1.4　习题解答 ……………………………………………… (9)

1.5　本章小结 ……………………………………………… (12)

第 2 章　刚体定轴转动 ……………………………………………… (14)

2.1　内容提要 ……………………………………………… (14)

2.2　基本要求 ……………………………………………… (15)

2.3　典型例题 ……………………………………………… (15)

2.4　习题解答 ……………………………………………… (19)

2.5　本章小结 ……………………………………………… (21)

第 3 章　气体动理论 ……………………………………………… (23)

3.1　内容提要 ……………………………………………… (23)

3.2　基本要求 ……………………………………………… (23)

3.3　典型例题 ……………………………………………… (24)

3.4　习题解答 ……………………………………………… (27)

3.5　本章小结 ……………………………………………… (28)

第 4 章　热力学基础 ……………………………………………… (30)

4.1　内容提要 ……………………………………………… (30)

4.2　基本要求 ……………………………………………… (31)

4.3　典型例题 ……………………………………………… (31)

4.4　习题解答 ……………………………………………… (34)

4.5　本章小结 ……………………………………………… (36)

第 5 章　静电场 ……………………………………………… (37)

5.1　内容提要 ……………………………………………… (37)

5.2　基本要求 ……………………………………………… (38)

5.3　典型例题 ……………………………………………… (39)

5.4　习题解答 ……………………………………………… (46)

5.5　本章小结 ……………………………………………… (49)

第 6 章　稳恒磁场 …… (51)
6.1　内容提要 …… (51)
6.2　基本要求 …… (52)
6.3　典型例题 …… (52)
6.4　习题解答 …… (57)
6.5　本章小结 …… (59)
第 7 章　变化的磁场和电场 …… (61)
7.1　内容提要 …… (61)
7.2　基本要求 …… (62)
7.3　典型例题 …… (62)
7.4　习题解答 …… (67)
7.5　本章小结 …… (69)
第 8 章　机械振动 …… (71)
8.1　内容提要 …… (71)
8.2　基本要求 …… (72)
8.3　典型例题 …… (72)
8.4　习题解答 …… (78)
8.5　本章小结 …… (82)
第 9 章　波动 …… (84)
9.1　内容提要 …… (84)
9.2　基本要求 …… (85)
9.3　典型例题 …… (86)
9.4　习题解答 …… (92)
9.5　本章小结 …… (96)
第 10 章　波动光学 …… (98)
10.1　内容提要 …… (98)
10.2　基本要求 …… (99)
10.3　典型例题 …… (99)
10.4　习题解答 …… (104)
10.5　本章小结 …… (107)
第 11 章　狭义相对论基础 …… (108)
11.1　内容提要 …… (108)
11.2　基本要求 …… (109)
11.3　典型例题 …… (109)
11.4　习题解答 …… (113)
11.5　本章小结 …… (118)

第 12 章　量子光学概论 ······ (119)
12.1　内容提要······ (119)
12.2　基本要求······ (119)
12.3　典型例题······ (120)
12.4　习题解答······ (123)
12.5　本章小结······ (126)
第 13 章　量子力学基础 ······ (127)
13.1　内容提要······ (127)
13.2　基本要求······ (128)
13.3　典型例题······ (129)
13.4　习题解答······ (131)
13.5　本章小结······ (134)

第1章　质点力学

1.1　内容提要

1. 参照系

用以描述物体运动所选用的另一个物体称为参照系.

2. 运动方程

位置矢量　用以确定质点位置的矢量　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

运动方程　位置矢量随时间的变化关系式　$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$.

位移　质点在一段时间内位置的改变　$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$.

3. 速度和加速度

速度　质点位置矢量对时间的变化率　$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

加速度　质点速度对时间的变化率　$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

直角坐标系中　$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$.

自然坐标系中　$\boldsymbol{a} = a_n\boldsymbol{n}_0 + a_t\boldsymbol{\tau}_0$,

式中:法向加速度 $a_n = v^2/\rho$, ρ 为曲率半径;切向加速度 $a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$,方向沿轨道切线;$\boldsymbol{n}_0$ 为法线方向单位矢量;$\boldsymbol{\tau}_0$ 为切线方向单位矢量.

4. 牛顿定律

第一定律　任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态,直到其他物体的作用力迫使它改变这种状态.

第二定律　物体受外力作用时,物体获得的加速度与外力成正比,与物体的质量成反比,即　$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

第三定律　物体 A 以$\boldsymbol{F}$ 作用于B,同时 B 以力$\boldsymbol{F}'$作用于A,这两个力大小相等,方向相反并且沿同一条直线,即　$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$.

5. 功

质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下有位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,则力做的功 $\mathrm{d}W$ 定义为力$\boldsymbol{F}$ 和位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的标积

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\mathrm{d}r\cos\theta.$$

从 A 点到B 点力做的功　$W = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

6. 保守力的功与势能

保守力做的功等于势能增量的负值,即

$$W_{保} = -\Delta E_p.$$

7. 动能定理

质点的动能定理　合外力对质点做的功等于质点动能的增量

$$W_{合} = E_{k2} - E_{k1}.$$

质点系的动能定理　外力对质点系做的功与内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量　$W_{外} + W_{内} = E_{k2} - E_{k1}$.

8. 功能原理、机械能守恒定律

功能原理　外力和非保守内力对系统做的功等于系统机械能的增量

$$W_{外} + W_{非保内} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}).$$

机械能守恒定律　如果外力和非保守内力做功之和为零，系统的机械能保持不变，即　$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$.

9. 动量定理和动量守恒定律

质点的动量定理　合外力的冲量等于质点动量的增量，即

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{合}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1.$$

质点系的动量定理　系统所受的合外力的冲量等于系统动量的增量

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{合}\,\mathrm{d}t = \sum_i \boldsymbol{p}_{i2} - \sum_i \boldsymbol{p}_{i1}.$$

动量守恒定律　当系统不受外力，或者外力的矢量和为零时，系统的总动量保持不变，即　$\sum \boldsymbol{F}_{外} = 0$ 时，　$\sum_i \boldsymbol{p}_{i2} = \sum_i \boldsymbol{p}_{i1}$.

10. 角动量守恒定律

质点的角动量　质点的角动量定义为质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 与动量 $\boldsymbol{p}$ 的矢量积

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$

角动量定理　质点所受的合外力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于它的角动量 $\boldsymbol{L}$ 对时间的变化率

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}.$$

角动量守恒定律　当质点所受的合力对某固定点的力矩为零时，质点对该固定点的角动量保持不变，即当 $\boldsymbol{M} = 0$ 时，$\boldsymbol{L}$ = 常矢量.

1.2　基本要求

(1)掌握位移、速度、加速度的概念和计算.

(2)掌握位矢、运动方程和轨道方程的概念及有关运算.

(3)深入理解牛顿三定律的基本内容，掌握应用牛顿定律解题的一般方法和步骤.

(4)掌握功的定义及变力做功的计算方法.

(5)掌握保守力做功的特点及势能的概念与计算.

(6)掌握动能定理、动量定理、功能原理，并能灵活运用，能解决质点在平面内运动

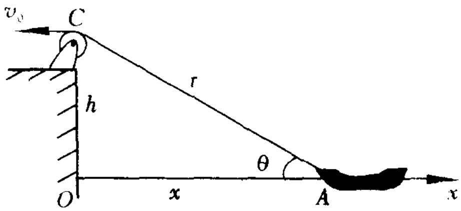
时的力学问题.

(7)深入理解机械能守恒定律、动量守恒定律和角动量守恒定律的物理意义、适用条件,并能正确运用.

1.3 典型例题

例 1-1 在离水面高为 h 的岸边一人用绳拉船靠岸,人拉绳的速率为恒值 v_0. 试求船距岸边为 x 时的速度及加速度.

解 以船为研究对象,它沿 x 轴做直线运动. 欲求其速度,应先求运动方程. 求运动方程的另一种方法是当物体间相对位置有一定联系时,可由几何关系建立运动方程. 如图 a 所示的几何关系有



例 1-1a

$$x(t)=\sqrt{r^2(t)-h^2},$$

对 t 求导可得船速

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{r^2-h^2}}.$$

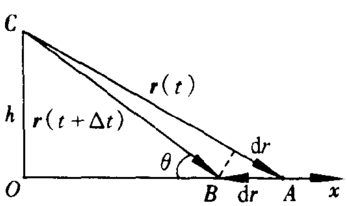
式中 $\left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|$ 正是人收绳的速率,考虑到收绳过程中 r 在减小,故

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v_0,$$

代入可得船速

$$v=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0.$$

式中"-"号表明船速与 x 轴正向相反.



例 1-1b

此题用矢量图解,物理意义更明确. 如图 b 所示,若船 t 时刻在 A 点,经 $\mathrm{d}t$ 时间到 B 点,船位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,大小为 $\mathrm{d}x$,此位移可分解为径向($\boldsymbol{r}$ 方向)和横向(垂直于 $\boldsymbol{r}$ 方向)两分量,大小为 $\mathrm{d}r$ 与 $\mathrm{d}n$.

小船速度 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,

速率 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

而拉绳速率 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-v_0$,

由图 b 可见 $\mathrm{d}r=\mathrm{d}x\cos\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta$,

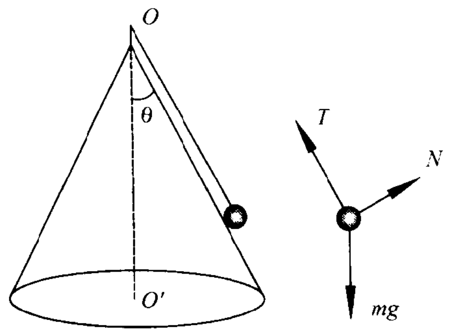
即 $v_0=v\cos\theta$,考虑到 v 的方向与 x 方向相反,得

$$v=-\frac{v_0}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0.$$

将速度对时间求导,可得船的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{h^2v_0^2}{x^3},$$

式中"-"号表明加速度沿 x 轴的反向,而与速度同向,表示船的运动为变加速,且越靠近岸,加速度越大,速度也越大.



例 1-2

例 1-2 顶角为 2θ 的直圆锥体,底面固定在水平面上,如图所示,质量为 m 的小球系在轻绳的一端,绳的另一端系在圆锥的顶点,绳长为 l,且不能伸长,圆锥面饲光滑的,今使小球在圆锥面上以角速度 ω 绕 OO' 轴匀速转动,求:

(1)锥面对小球的支持力 N 和细绳的张力 T;

(2)当 ω 增大到某一值 ω_0 时,小球将离开球面,这时 ω_0 及 T 又各是多少?

解 (1)以小球为研究对象,画受力图,分析小球的运动,垂直方向静止,有

$$T\cos\theta+N\sin\theta-mg=0.$$

水平方向,小球做半径为 $r=l\sin\theta$ 的匀速圆周运动,由牛顿定律

$$T\sin\theta-N\cos\theta=m\omega^2l\sin\theta,$$

联立上两式求解得

$$N=mg\sin\theta-m\omega^2l\sin\theta\cos\theta,$$

$$T=mg\cos\theta+m\omega^2l\sin^2\theta.$$

(2)小球刚离开锥面时,支持力 $N=0$,由(1)的结果可得

$$\omega_0=\sqrt{g/l\cos\theta},$$

$$T=mg\cos\theta+\frac{mgl\sin^2\theta}{l\cos\theta}=\frac{mg}{\cos\theta}.$$

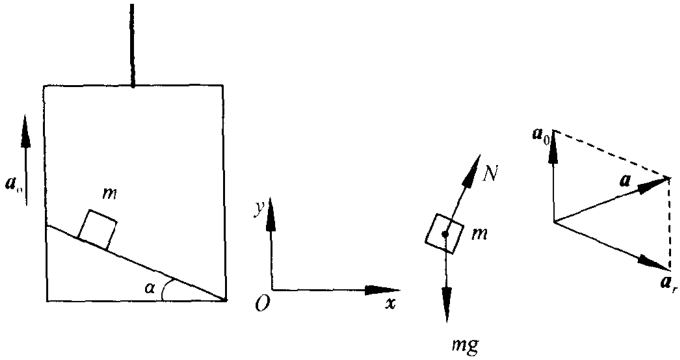
例 1-3 升降机内有一固定光滑斜面,倾角为 α,如图所示.当升降机以匀加速度 a_0 上升时,质量为 m 的物体沿斜面滑下,求其对地面的加速度.

解 以 m 为研究对象,分析受力,m 受重力 mg,支持力 N.设物体相对于斜面的加速度为 $\boldsymbol{a}_r$,方向沿斜面,则物体相对地面的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_r.$$

建立如图所示的坐标系,则各方向加速度的分量为

$$\begin{cases}a_x=a_{rx}=a_r\cos\alpha,\\ a_y=a_{ry}+a_0=a_0-a_r\sin\alpha.\end{cases}$$



例 1-3

由牛顿定律列方程:

x 方向:$N\sin\alpha = ma_r\cos\alpha$,

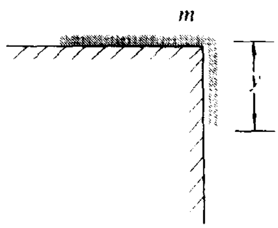
y 方向:$N\cos\alpha - mg = m(a_0 - a_r\sin\alpha)$.

解方程组可得 $\quad a_r = (g + a_0)\sin\alpha$,

$$\begin{cases} a_x = (g + a_0)\sin\alpha\cos\alpha, \\ a_y = a_0\cos^2\alpha - g\sin^2\alpha. \end{cases}$$

说明 牛顿定律只适用于惯性系,当物体间有牵连加速度时,应先求出相对于惯性系(地面)的绝对加速度再列方程.

例 1-4 一质量均匀分布的绳子,一部分置于光滑水平桌面上,另一部分自桌边下垂,绳全长为 L.开始时,下垂部分长为 L_0,绳初速为零.求整个绳全部离开桌面时的速度(设绳不伸长).



例 1-4

分析 此题为一典型题,可用多种方法求解.

解一 用牛顿定律求解.如图示,选整个绳子为研究对象,当下垂部分为 y 时,绳所受合外力为 $\frac{m}{L}yg$,由牛顿定律

$$\frac{m}{L}\cdot yg = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

这是微分方程,积分求解时要先分离变量.两边同乘以 $\mathrm{d}y$,得

$$\frac{m}{L}yg\mathrm{d}y = mv\mathrm{d}v,$$

两边积分
$$\int_{L_0}^{L}\frac{g}{L}y\mathrm{d}y = \int_0^v v\mathrm{d}v,$$

得
$$\frac{1}{2}\frac{g}{L}(L^2 - L_0^2) = \frac{1}{2}v^2,$$

故速度
$$v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - L_0^2)}.$$

解二 用动能定理求解.

仍选整个绳子为研究对象,下垂部分为 y 时,绳所受合外力为$\frac{m}{L}yg$,在此力作用下,绳子下移 dy,元功 $dW=\frac{m}{L}yg\,dy$.

由动能定理,整个过程合外力的功等于动能的增量,有

$$\int_{L_0}^{L}\frac{m}{L}yg\cdot dy=\frac{1}{2}mv^2,$$

同样可得
$$v=\sqrt{\frac{g}{L}(L^2-L_0^2)}.$$

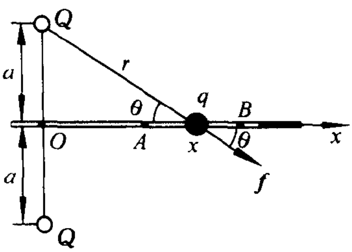
解三 由机械能守恒定律求解.

选系统为绳和地球,系统无外力和非保守力做功,机械能守恒.选桌面为重力势能零点,势能以质心位置算,由机械能守恒定律,初态与末态机械能相等,有

$$-\frac{m}{L}L_0g\frac{L_0}{2}=-mLg\frac{L}{2}+\frac{1}{2}mv^2,$$

同样可得
$$v=\sqrt{\frac{g}{L}(L^2-L_0^2)}.$$

比较以上三种方法,可以看出用守恒定律解题最简单,在符合守恒定律的条件时,只需考虑始、末状态即可,不必考虑中间过程.



例 1-5

例 1-5 质量为 m、带电量为 q 的珠子(视为点电荷)可沿水平绝缘杆无摩擦地滑动;另两个电量皆为 Q、相距为 $2a$ 的点电荷,对称地固定在杆的两边.如图所示,现把珠子由 A 点静止释放,求当珠子运动到 B 点时的速度($\overline{OA}=\overline{AB}=a$).

分析 此题可用多种方法求解.

解一 用功能关系解,建立如图坐标,由库仑定律知珠子在任意位置受每一个点电荷 Q 的作用力为

$$f=k\frac{qQ}{a^2+x^2},$$

方向如图,所受合力 F 沿 x 方向.

$$F=2k\frac{Qq}{a^2+x^2}\cos\theta=2k\frac{qQ}{a^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=2k\frac{qQx}{(a^2+x^2)^{3/2}},$$

珠子由 A 到 B 的过程中电场力(变力)所做的功

$$W=\int_a^{2a}F\,dx=\int_a^{2a}2k\frac{qQx}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=2k\frac{qQ}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right].$$

由动能定理,合外力的功等于动能增量有

$$2k\frac{qQ}{a}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]=\frac{1}{2}mv^2,$$

解出

$$v=\left[\frac{4kqQ}{ma}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]^{1/2}.$$

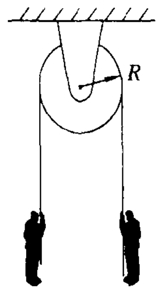
解二 用能量守恒解.

将3个电荷作为研究对象,系统所受外力不做功,在珠子运动过程中,电势能转化为动能,珠子在 A 点和 B 点的电势能分别为$\frac{2kqQ}{\sqrt{2}a}$,$\frac{2kqQ}{\sqrt{5}a}$,所以

$$\frac{2kqQ}{\sqrt{2}a}-\frac{2kqQ}{\sqrt{5}a}=\frac{1}{2}mv^2,$$

同样可得上面的结果.

例 1-6 体重相同的甲乙两人,分别用双手握住跨过无摩擦轻滑轮的绳子两端,当他们向上爬时,在某同一高度,相对于绳子,甲的速率是乙的2倍,问谁先到达顶点.



例 1-6

解 此类题目可以用牛顿定律求解,但用守恒定律较方便.将人、绳和滑轮选为一系统,人拉绳子的内力要做功,故机械能不守恒;外力有滑轮所受支持力与人的重力,这些力对转轴的合力矩为零,角动量守恒.设人的质量为 m,绳相对滑轮的速率为 v,甲乙两人相对于绳子的速率分别为 $2v_0$ 与 v_0,滑轮半径为 R,按角动量守恒定律则有

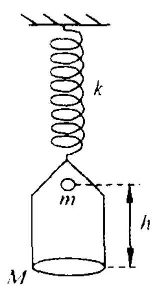
$$m(2v_0-v)R=m(v+v_0)R,$$

可得 $v=0.5v_0$,

故甲对地的速率为 $2v_0-0.5v_0=1.5v_0$,

而乙对地速率为 $0.5v_0+v_0=1.5v_0$.

所以甲乙两人同时到达顶点.



例 1-7

例 1-7 一个框架质量为200 g,悬挂在轻弹簧上时,使弹簧伸长了10 cm,另有一块黏土质量为200 g,从框架底面之上30 cm处自由落下并粘在框架底盘上,如图,试求框架向下移动的最大距离.

解 本题是综合题,解综合题时需分清每个物理过程与各物理过程所遵守的规律,然后再联合求解.

框架平衡时,合外力为零, $Mg=kx_0$. (1)

黏土下落时,机械能守恒, $\frac{1}{2}mv^2=mgh$. (2)

黏土与框架碰撞结合,动量守恒, $mv=(m+M)V$. (3)

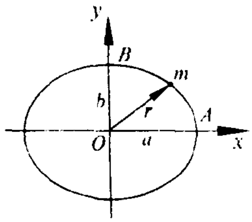
结合后向下移动,弹簧、框架与地球组成的系统机械能守恒,选初始位置为重力势能零点,弹簧原长为弹性势能零点,则有

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}k(x+x_0)^2-(M+m)gx. \tag{4}$$

四个方程联立求解，代入数字，可得 $x=30$ cm.

注意，弹性势能零点选原长时，弹性势能的表达式才为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2，式中\ x\ 为伸长量.$$



例 1-8

例 1-8 质量为 m 的质点在 xy 平面内运动，质点的矢径为

$$\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j},$$

a、b、ω 为正的常量，且 $a>b$，如图所示.

(1)证明该质点沿椭圆轨道运动；

(2)证明作用在该质点上的力始终指向坐标原点；

(3)求该质点在 A 点和 B 点的动能；

(4)求该力场使质点从 A 到 B 所做的功；

(5)证明此力场是保守力场；

(6)求 A 点和 B 点处系统的势能；

(7)证明质点在运动过程中角动量守恒.

解 (1)将运动方程的矢量式写为分量式

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=b\sin\omega t. \end{cases}$$

消去 t 可得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1$，系椭圆方程，证明轨道为椭圆.

(2)由牛顿定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=m(-a\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j})=-m\omega^2\boldsymbol{r},$$

可见力 $\boldsymbol{F}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 反向，即总指向原点 O，这样的力场叫有心力场.

(3)由运动方程可求得

$$\boldsymbol{v}=-\omega a\sin\omega t\boldsymbol{i}+\omega b\cos\omega t\boldsymbol{j}.$$

动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(\omega^2a^2\sin^2\omega t+\omega^2b^2\cos^2\omega t)$.

A 点，$\omega t=0$； B 点，$\omega t=\pi/2$.

所以 $E_{kA}=\frac{1}{2}m\omega^2b^2$，$E_{kB}=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$.

(4)功 $W=\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{AB}-m\omega^2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2)$,

或直接由动能定理更简单，有

$$W=E_{kB}-E_{kA}=\frac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2).$$

(5)由(4)功的计算可知，质点沿椭圆或任一闭合路径一圈，力的功为零，所以它是

保守力场.

(6)由功能关系,保守力的功等于势能增量的负值,即

$$E_p(r_2)-E_p(r_1)=-\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{r_1}^{r_2}m\omega^2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}m\omega^2r_2^2-\frac{1}{2}m\omega^2r_1^2,$$

故势能表达式应为 $E_p(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2+C$.

令 $r=0$ 时,$E_p=0$,则 $C=0$.

所以系统任一点的势能为 $E_p(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$,

$$E_{pA}=\frac{1}{2}m\omega^2a^2,\quad E_{pB}=\frac{1}{2}m\omega^2b^2.$$

(7)由力矩定义

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times(-m\omega^2\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}.$$

质点在运动过程中所受力矩为零,故角动量守恒.

由以上分析可知,质点受有心力场作用时,角动量守恒,系统的机械能守恒,但质点的动量不守恒,动量的大小和方向都在不断变化.

1.4 习题解答

1-1 一个质点的运动方程为 $x=t^3+10t^2-5t$(SI),求:

(1)质点的速度和加速度与时间的函数关系;

(2)质点的初速度以及在原点左边最远处的位置;

(3)2 s时质点的位置,速度和加速度;

(4)前 2 s 内质点的位移,通过的路程、平均速度、平均速率和平均加速度.

解 (1) $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2+20t-5,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=6t+20.$

(2) $v(0)=-5\ \mathrm{m/s},\quad v=3t^2+20t-5=0,$

得 $t=0.24\ \mathrm{s},$

$x_{\text{max左}}=0.24^3+10\times0.24^2-5\times0.24=-0.61\ \mathrm{m}.$

(3) $x(2)=2^3+10\times2^2-5\times2=38\ \mathrm{m},$

$v(2)=3\times2^2+20\times2-5=47\ \mathrm{m/s},\quad a(2)=6\times2+20=32\ \mathrm{m/s^2}.$

(4) $\Delta x=x(2)-x(0)=38-0=38\ \mathrm{m},\quad \Delta S=2\times0.61+38=39.2\ \mathrm{m}.$

$$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{38}{2}=19\ \mathrm{m/s},\quad \bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{39.2}{2}=19.6\ \mathrm{m/s},$$

$$\bar{a}=\frac{v(2)-v(0)}{2}=\frac{47-(-5)}{2}=26\ \mathrm{m/s^2}.$$

1-4 质点在 Oy 轴上运动,其运动方程为 $y=4t^2-2t^3$.求质点返回原点时的速度和加速度.

解 $v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=8t-6t^2,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=8-12t,$

由 $y=4t^2-2t^3=0$,

得 $t=2$ s.

$v(2)=8\times2-6\times2^2=-8$ m/s, $a(2)=8-12\times2=-16$ m/s^2.

1-6 质点沿半径 $R=5$ m 的圆周运动. 其所行路程 S 与时间的函数关系为 $S=0.5t^2+3t$. 求:

(1)前 2 s 内质点通过的路程和位移;

(2)2 s 时质点的速率,切向加速度和法向加速度.

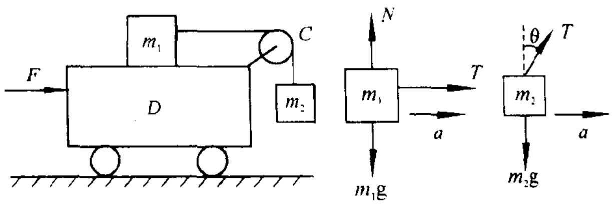
解 (1)$\Delta S=S(2)-S(0)=0.5\times2^2+3\times2-0=8$ m.

2 s 内质点所通过的圆弧所对应的圆心角 $\Delta\varphi=\dfrac{\Delta S}{R}$,

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=2R\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=2R\sin\left(\frac{\Delta S}{2R}\right)=2\times5\sin\left(\frac{8}{2\times5}\right)=7.17\text{ m}.$$

(2)$v=\dfrac{dS}{dt}=t+3=5$ m/s, $a_t=\dfrac{dv}{dt}=1$ m/s^2, $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(2+3)^2}{5}=5$ m/s^2.

1-8 光滑水平面上有一质量 $M=50$ kg 的小车 D,其上有一滑轮 C,通过绳子在定滑轮两侧分别有 $m_1=6$ kg, $m_2=4$ kg 的两个物体. 各接触面都是光滑的,如图所示. 问在 m_2 与 D 不能接触的情况下,以多大力 F 推小车,才能使物体 m_1 与小车间无相对滑动.



题 1-8

解 选整体为研究对象,有

$$F=(M+m_1+m_2)a. \tag{1}$$

对 m_1 有 $$T=m_1a. \tag{2}$$

对 m_2 有 $$T\sin\theta=m_2a, \tag{3}$$

$$T\cos\theta=m_2g. \tag{4}$$

联立四个方程得

$$F=(M+m_1+m_2)\frac{m_2g}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}}=(50+6+4)\frac{4\times9.8}{\sqrt{6^2-4^2}}=526\text{ N}.$$

1-10 以速度 v_0 沿直线匀速奔驰的摩托车,质量为 m. 在关闭发动机后,它受到的阻力与速率平方成正比即

$$f=-kv^2.$$

求:(1)关闭发动机后 t 时刻摩托车的速度;