高等院校力学系列教材
Textbook Series in Mechanics for Higher Education

理论力学辅导与习题集

Guidance and Problems of Classical Mechanics

高云峰 李俊峰 编著
Gao Yunfeng Li Junfeng

清华大学出版社 Springer

高等院校力学系列教材

理论力学辅导与习题集

高云峰 李俊峰 编著

清华大学出版社 Springer

内 容 简 介

本套教材是在近几年研究教学改革的基础上，结合清华大学理论力学教研组的教学经验写成的，包括主教材——《理论力学》、学生学习辅导书——《理论力学辅导与习题集》、教师教学参考书——《理论力学（教师参考书）》和一张供课堂使用的教学多媒体光盘以及一张学生学习用光盘。

本书为配合主教材使用的学生学习辅导书。全书按章归纳总结了基本概念、基本理论及其应用技巧，并提供了大量习题。每章都包括内容摘要、基本要求、典型例题、常见错误、疑难解答、趣味问题和习题。本书可以帮助学生掌握理论力学课程内容，并且开阔视野，提高对力学的兴趣，培养处理力学问题的能力。

本书可作为高等院校机械、土建、水利、航空航天和力学等专业的理论力学或工程力学课程的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学辅导与习题集/高云峰，李俊峰编著. —北京：清华大学出版社，2003
（高等院校力学系列教材）
ISBN 7-302-06295-1

Ⅰ. 理… Ⅱ. ①高… ②李… Ⅲ. 理论力学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ. O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 007723 号

出 版 者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
http://www.tup.com.cn
责任编辑：杨 倩
印 刷 者：北京四季青印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开 本：787×1092 1/16 **印张**：22 **字数**：436 千字
版 次：2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 7-302-06295-1/O・282
印 数：0001～3000
定 价：28.00 元

前 言

本套教材是作者在近几年研究教学改革的基础上，结合清华大学理论力学教研组的教学经验写成的。编写这套《理论力学》教材主要目的是为了适应当前国内教学改革的需要，用较少的时间讲授理论力学的基本内容，希望能够既节省授课学时，又不降低课程的基本要求。在编写中作者遵循如下 4 个原则：1. 以牛顿力学和分析力学为两条并行贯穿的主线，使整套教材内容完整、结构紧凑、叙述严谨、逻辑性强；2. 以微积分、线性代数以及物理课的力学部分为基础，重点介绍最有理论力学课程特点的基础内容；3. 重点讲授动力学内容和分析力学方法，因为它们在理论和应用方面都更有价值，内容也更丰富；4. 从多种不同的角度讲解基本概念、基本公式和基本方法，既有严格的理论证明，又有形象直观的物理解释。

本套教材包括主教材——《理论力学》、学生学习辅导书——《理论力学辅导与习题集》、教师教学参考书——《理论力学(教师参考书)》和一张供课堂使用的教学多媒体光盘以及一张学生学习用光盘。

理论力学是一门基础课，它的特点之一是必须完成一定数量的习题才能掌握课程内容。本书的编写目的就是为学生提供必要的解题指导和大量的练习题。全书按章归纳总结了基本概念、基本理论及其应用技巧，并提供了大量习题。每章都包括以下 7 个部分："内容摘要"简要总结本章的主要内容，包含解题时所需的基本公式和方法；"基本要求"指出重点掌握和熟练应用的内容，供读者参考；"典型例题"给出各章节中的典型例题，介绍解题的基本思路、方法和技巧，然后针对相关问题进一步深入讨论，帮助读者深入理解基本概念和解题方法；"疑难解答"列出学生可能会遇到的问题并给出简要的回答；"常见错误"列出学生作业中可能犯的错误；"趣味问题"列举生活中与理论力学有关的趣味问题，利用理论力学知识简要介绍问题的简化和处理方

法；“习题”提供各种类型的习题，覆盖基本要求，包括少量需要利用计算机求解的习题。考虑到本书与主教材《理论力学》同时使用，因此，习题选择上尽量避免重复。另外，为了帮助读者利用计算机求解习题，每篇都有一个附录，介绍计算机求解运动学、静力学和动力学问题的基本方法、常用算法和程序。

作者希望本书在帮助学生复习和自学的同时，还能开阔视野，培养对力学的兴趣，并锻炼处理力学问题的能力。

在本书中，角度认为是有方向的，虽然图中一般都没有标明方向，但都默认是以某一根不转动的基准线为起点，另外本书在某些地方会引用教科书中的例子，则该教科书默认是本书的主教材，即参考文献[1]。

高云峰负责各章的“典型例题”、“疑难解答”、“常见错误”、“趣味问题”、“习题”以及“附录”的编写工作；李俊峰负责编写各章的“内容摘要”和“基本要求”以及全书的统稿工作；博士生崔海英参加了本书的文字编辑工作。由于时间仓促和作者水平所限，书中难免有各种错误和不足，恳请读者指正。

编 者

2001年12月于清华园

目　录

第 1 篇

运 动 学

第 1 章 点的运动学

一、内 容 摘 要

本章研究点的一般运动及其几何性质，主要是通过运动方程、速度和加速度描述点的运动。具体内容包括列写点的运动方程、求点的速度和加速度等。

1. 点的运动方程

点的运动方程可以描述点在空间中的位置随时间的变化规律，利用运动方程可以给出点的运动轨迹、速度和加速度等。点的运动方程有以下常用形式：

（1）向量形式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是点的向径。向量形式的运动方程非常简洁，与坐标系无关，用于理论推导比较方便。

（2）直角坐标形式

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

其中 x,y,z 是点在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标分量。

（3）弧坐标形式（或称自然坐标形式）

$$s = s(t)$$

其中 s 表示动点在运动轨迹上从原点开始走过的弧长。

（4）极坐标形式

$$\rho = \rho(t), \quad \theta = \theta(t)$$

其中 ρ 表示向径 $\boldsymbol{r}$ 的长度，θ 表示向径 $\boldsymbol{r}$ 与某一坐标轴的夹角。

(5) 柱坐标形式

$$\rho=\rho(t),\quad \theta=\theta(t),\quad z=z(t)$$

柱坐标可以认为是在极坐标的基础上增加 z 坐标得到的。

(6) 球坐标

$$r=r(t),\quad \varphi=\varphi(t),\quad \theta=\theta(t)$$

其中 r 为球的半径，φ 为经度，θ 为纬度。

在写点的运动方程时需要注意以下几点：a)在任意一般位置写点的运动方程；b)根据运动特点选取坐标系；c)明确坐标的原点和方向。

2. 点的速度与加速度

点的速度、加速度是由运动方程求导得到的，需要注意坐标轴的单位向量是否随时间变化。

(1) 向量形式

速度 $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}}$$

加速度 $$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

(2) 直角坐标形式

速度 $$v_x=\dot{x},\quad v_y=\dot{y},\quad v_z=\dot{z}$$

加速度 $$a_x=\dot{v}_x=\ddot{x},\quad a_y=\dot{v}_y=\ddot{y},\quad a_z=\dot{v}_z=\ddot{z}$$

(3) 自然坐标形式

速度 $$\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

加速度 $$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\,\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

其中 $a_\tau=\ddot{s}$ 是切向加速度，$a_n=\frac{\dot{s}^2}{\rho}$ 是法向加速度。

(4) 极坐标形式

速度 $$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho+\rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta$$

其中 $\boldsymbol{e}_\rho$ 为径向单位向量，$\boldsymbol{e}_\theta$ 为垂直于 $\boldsymbol{e}_\rho$ 且沿 θ 增加方向的单位向量。

加速度 $$\boldsymbol{a}=(\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_\rho+(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$$

其中 $a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\theta}^2$ 是径向加速度，$a_\theta=\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\,\dot{\theta}$ 是横向加速度。

(5) 柱坐标形式

速度 $$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho+\rho\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta+\dot{z}\boldsymbol{k}$$

加速度 $$\boldsymbol{a}=(\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_\rho+(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\,\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta+\ddot{z}\boldsymbol{k}$$

(6) 球坐标形式

速度 $$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta+r\dot{\varphi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

加速度 $\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta$

$+(r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\varphi$

二、基本要求

1. 掌握点的运动方程、速度、加速度等基本概念及向量求导(包括随时间变化的向量求导)的物理意义。
2. 熟练写出直角坐标、自然坐标、极坐标形式的运动方程、速度和加速度公式。
3. 了解横向加速度与切向加速度的区别、径向加速度与向心加速度的区别。
4. 借助教科书能利用柱坐标、球坐标分析点的运动。

三、典型例题

例 1-1 一半径为 R 的圆轮沿水平轨道运动,如图 1-1a 所示。M 是圆轮上一固定点,$CM=r$,P 是圆轮与水平轨道的接触点。已知轮心 C 的运动规律为 $x=vt$,CM 与 CP 夹角的运动规律为 $\theta=\omega t$。其中 v、ω 为已知常数。试列写 M 点的运动方程并求其运动轨迹、速度和加速度。

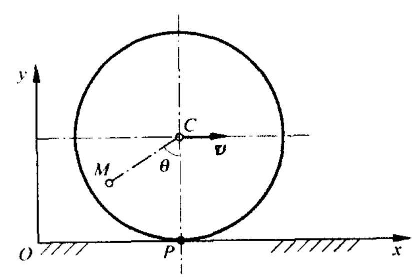

图 1-1a

解:取如图 1-1a 所示的坐标系。

(1) 列写运动方程

M 点的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} x &= vt - r\sin\omega t \\ y &= R - r\cos\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

若取参数为:$R=100\text{cm}$,$\omega=0.04\text{rad/s}$,$v=R\omega$,$r=kR$,则M点的轨迹如图1-1b。

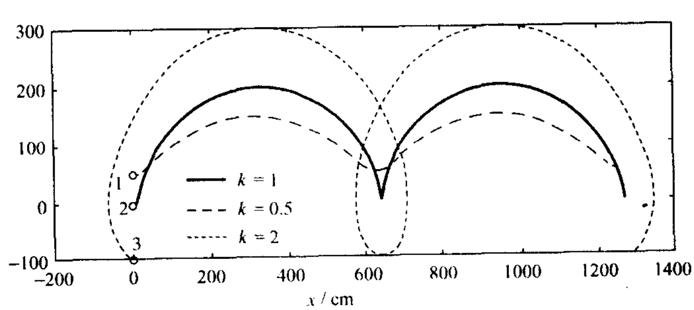

图 1-1b

其中曲线 1 是圆轮内部点的轨迹，曲线 2 是圆轮边缘点的轨迹，曲线 3 是圆轮外部点的轨迹（假设它位于圆轮的延拓部分）。由于 $v=R\omega$，即圆轮作纯滚动，圆轮边缘点的轨迹（即曲线 2）为摆线。

如果圆轮不作纯滚动，不妨设 $v=0.5R\omega$，则 M 点的轨迹如图 1-1c。圆轮边缘点的轨迹不再是摆线，而圆轮内部点的运动轨迹为摆线。

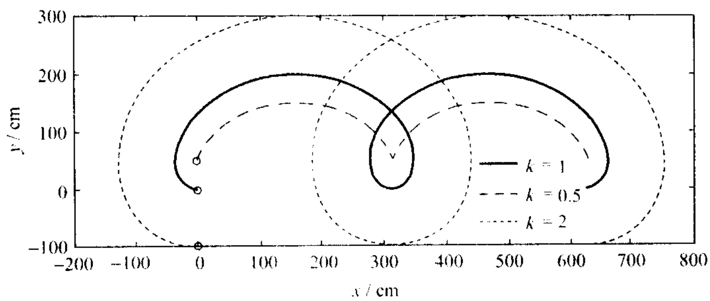

图 1-1c

(2) 求 M 点的速度及加速度

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v - r\omega\cos\omega t \\ v_y &= \dot{y} = r\omega\sin\omega t \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \ddot{x} = r\omega^2\sin\omega t \\ a_y &= \ddot{y} = r\omega^2\cos\omega t \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

令 $\theta=\omega t=0$，可以求出圆轮与地面接触点 P 的速度：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v - R\omega \\ v_y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

讨论：在圆盘打滑与不打滑两种情况下，圆上各点的速度分布有何特点？加速度分布有何特点？

若要在圆轮上找到一个速度为零的点 C^*，从方程(2)可求出 $\theta=0, r=\dfrac{v}{\omega}$，这意味着 C^* 一定在过圆心的垂线上。请思考速度为零的点是否一定在圆盘内部？如果圆轮作纯滚动，PM 方向与 M 点的速度方向有什么关系？CM 方向与 M 点的加速度方向有什么关系？

例 1-2 两辆汽车均匀速前进，如图 1-2a 所示。A 车沿直线行驶，$OA=x_0-v_At$，B 车沿圆周行驶，$\theta=\omega t$，圆周半径为 R。求：(1) A 车上的乘客看到 B 车的运动方程及轨迹；(2) B 车上的乘客看到 A 车的运动方程及轨迹。

解：(1) 建立动坐标系 Ax_Ay_A 与 A 车固结，如图 1-2b 所示。根据向径的关系，有

$$\boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$

其中 $\boldsymbol{r}_{AB}$ 就是 A 车上的乘客所看到的 B 车的向径，把 $\boldsymbol{r}_{AB}$ 向动坐标系 Ax_Ay_A 投影有：

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\omega\, t - (x_0 - v_A t) \\ y &= R\sin\omega\, t \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

利用计算机作图，若设 $R = 1000\ \mathrm{m}$，$x_0 = 2000\ \mathrm{m}$，$\omega = 0.1\ \mathrm{rad/s}$，$v_A = 10\ \mathrm{m/s}$，$t \leqslant 200\ \mathrm{s}$，可得到方程(1)的轨迹如图 1-2c 所示。其中的小圆圈表示初始时的相对位置。

(2) 建立动坐标系 Bx_By_B 与 B 车固结(见图 1-2d)。根据向径的关系，有：

$$\boldsymbol{r}_{BA} = \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B$$

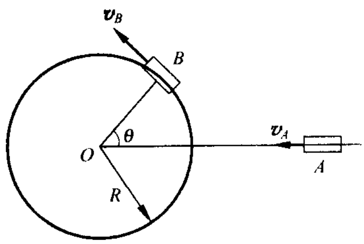

图　1-2a

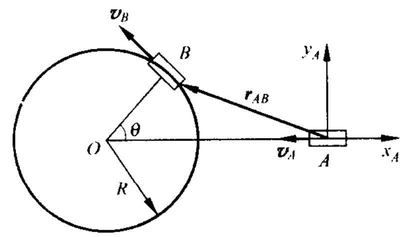

图　1-2b

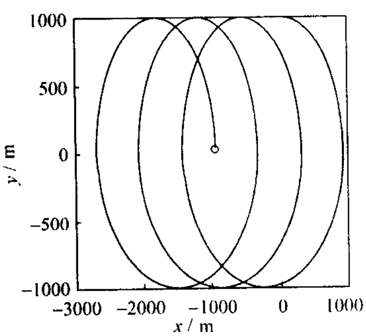

图　1-2c

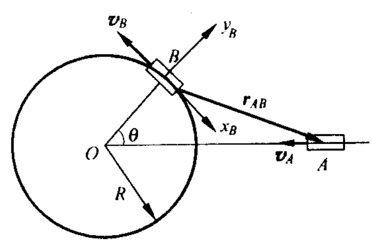

图　1-2d

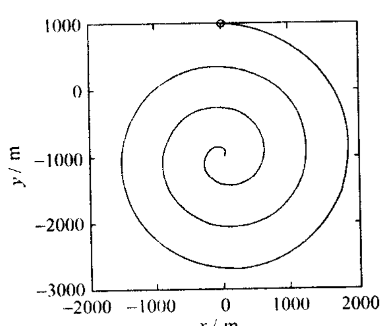

图　1-2e

其中 r_{BA} 就是 B 车上的乘客所看到的 A 车的向径，把 r_{BA} 向动坐标系 Bx_By_B 投影有：

$$\left.\begin{aligned} x &= (x_0 - v_A t)\sin\omega t \\ y &= (x_0 - v_A t)\cos\omega t - R \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

在前面所给的参数下，可得方程(2)的轨迹为图 1-2e。

可以发现：A 车和 B 车上的乘客所看到的对方的相对运动方程和相对运动轨迹完全不同。

讨论：我们知道 $r_{AB}=-r_{BA}$，但为什么双方所看到的相对运动轨迹不同？在什么情况下相对轨迹相同但反向？因为相对运动轨迹是在动坐标中得到的，本题中与 A 车固连的是平动系，而与 B 车固连的是转动系。我们知道，同一个向量在不同的坐标中有不同的坐标分量，因此两者所看到的相对运动轨迹不同是自然的结果。由此知道，当两个坐标系相对平动时，两者所看到的相对运动轨迹相同但反向。

例 1-3 图 1-3a 所示齿轮机构中，大齿轮 O 半径为 R，小齿轮 O_1 半径为 r，小齿轮上 E 点到 O_1 的偏心距为 e，求小齿轮上 E 点的运动轨迹，并讨论该轨迹的特点。

解：建立坐标如图 1-3a 所示，其中设 OO_1 与 x 轴夹角为 θ，O_1E 与水平线夹角为 φ。由运动学知识有

$$\begin{cases} x_E = (R-r)\cos\theta + e\cos\varphi \\ y_E = (R-r)\sin\theta - e\sin\varphi \\ R\theta = r(\varphi+\theta) \end{cases}$$

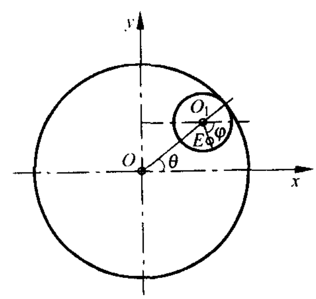

图 1-3a

简化后有

$$\begin{cases} x_E = (R-r)\cos\theta + e\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \\ y_E = (R-r)\sin\theta - e\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

引入无量纲化参数 $x^*=\dfrac{x_E}{r}$，$y^*=\dfrac{y_E}{r}$，$\xi=\dfrac{R}{r}$，$\eta=\dfrac{e}{r}$ 后有

$$\begin{cases} x^* = (\xi-1)\cos\theta + \eta\cos[(\xi-1)\theta] \\ y^* = (\xi-1)\sin\theta - \eta\sin[(\xi-1)\theta] \end{cases}$$

讨论：(1)若 ξ 为无理数，则轨迹曲线不封闭。图 1-3b 为 $\xi=\sqrt{3}$、小齿轮转 20 圈时 E 点的运动轨迹图形。(2)若 ξ 为有理数，则轨迹曲线封闭。进一步设 $\xi=\dfrac{m}{n}$，m、n 为不可约自然数，则曲线的周期为 $2n\pi$，并且曲线有 m 个尖点或花瓣。图 1-3c 为 $\xi=7/5$、$\eta=0.6$、转 5 圈时 E 点的运动轨迹图形。(3)$\eta=1$ 时曲线有尖点；$\eta<1$ 时尖点变为圆凸；$\eta>1$ 时曲线的尖点变为花瓣；$\eta=0$ 时曲线为圆。(4)$\xi=2$，$\eta=1$ 时曲线退

化为直线；$\xi=1$，曲线退化为一个点。

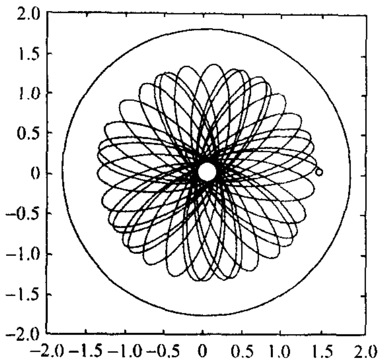

图 1-3b

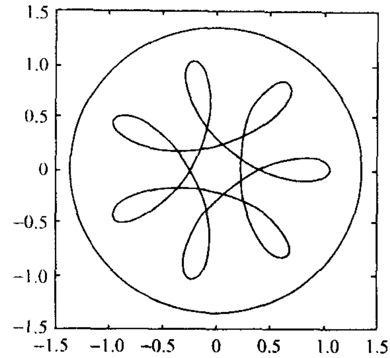

图 1-3c

总之，通过改变参数，这个简单机构上的一点 E 的运动轨迹竟是变化多端的各种曲线，你是否感到很惊讶？

四、常见错误

问题1 图 1-4 所示结构中，杆 OA 长为 l，BC 长为 $2l$。$\angle BOA=\theta=\omega t$，其中 ω 为常数。求当$\angle OBC=\angle BOA$ 时 C 点的速度。下面有两种解答，虽然答案相同，但都是错误的。请问两个解答中各有什么问题？

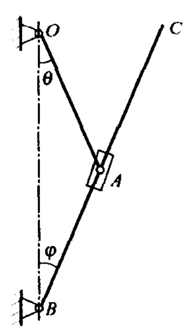

图 1-4

解答 1：采用极坐标形式，C 点的坐标为

$$\begin{cases}\rho=2l\\ \varphi=\angle BOA\end{cases}$$

根据题意，$\varphi=\theta=\omega t$，所以 $\dot{\varphi}=\dot{\theta}=\omega$

所以 C 点的速度为

$$\begin{cases}v_\rho=\dot{\rho}=0\\ v_\varphi=\rho\dot{\varphi}=2l\omega\end{cases}$$

解答 2：根据题意，当$\angle OBC=\angle BOA$ 时，OB 长度为 $2l\cos\theta$，则在一般位置，由三角形关系，有

$$\frac{\sin\varphi}{l}=\frac{\sin(\pi-\theta-\varphi)}{2l\cos\theta}$$

$$2\cos\theta\sin\varphi=\sin(\theta+\varphi)$$

$$-2\sin\theta\sin\varphi\cdot\dot{\theta}+2\cos\theta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}=\cos(\theta+\varphi)\cdot(\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

当 $\theta=\varphi$ 时，有

$$-2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}+2\cos^2\theta\cdot\dot{\varphi}=\cos(2\theta)\cdot(\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

从而 $\dot{\varphi}=\dot{\theta}=\omega$，故 C 点速度与解答 1 相同。

提示：(1)$\varphi=\theta$ 是否总是成立？(2)在一般位置时，OB 长度的表达式是什么？

问题 2 设杆 OA 长为 l，绕 O 轴转动，OB 为铅垂线，如图 1-5 所示。已知 $\angle AOB=\omega t$，其中 ω 为常数，求 A 点的速度。由于坐标系的方向选择不同，结果答案不相同。请问解答中是否有问题？

解答：采用极坐标形式，角 θ 的正方向是从 OB 到 OA，φ 的正方向是从 OA 到 OB。根据几何关系，始终应有 $\theta=\varphi=\omega t$。则很容易求出

$$v_\theta=l\dot{\theta}=l\omega,\quad v_\varphi=l\dot{\varphi}=l\omega$$

这两种解答中 A 点速度大小相等，但方向不同。

提示：(1)坐标正方向应该如何选取？(2)虽然 $\theta=\varphi$，但是 $\dot{\theta}$ 是否等于 $\dot{\varphi}$？

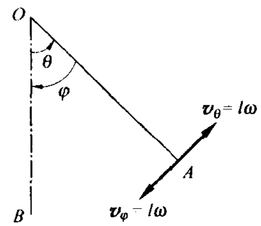

图 1-5

五、疑 难 解 答

1. 向量描述与坐标系有无关系？

对运动的描述可以采用向量描述法。向量描述与坐标系无关，而且简洁、方便，得到的是向量方程，多用于理论分析，是一种客观的描述。但在具体计算中，往往要将向量在坐标系中表示出来，得到标量方程。由于坐标系的选取具有主观性，因此可能得到不同的标量方程，例如速度和加速度公式在直角坐标和极坐标中的表达式就不同。

2. 求导与投影的次序是否可交换？

设 $\boldsymbol{P}$ 为任意向量，$\boldsymbol{e}$ 为单位向量。这个问题写成公式形式就是

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\boldsymbol{e}\overset{?}{=}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e})}{\mathrm{d}t}$$

如在极坐标中有

$$\boldsymbol{\rho}=\rho\boldsymbol{e}_\rho,\qquad \boldsymbol{v}=\dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\rho=\dot{\rho},\quad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi=\rho\dot{\varphi}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{e}_\rho)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\dot{\rho},\quad \left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}t}=0$$

因此有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \boldsymbol{e}_\rho = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}\cdot \boldsymbol{e}_\rho)}{\mathrm{d}t},\quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \boldsymbol{e}_\varphi \neq \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}\cdot \boldsymbol{e}_\varphi)}{\mathrm{d}t}$$

这似乎没有规律。实际上，

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{P}\cdot \boldsymbol{e})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{P}\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t}$$

因此，一般在平动坐标系中，求导与投影的次序可以交换；在转动坐标系中，求导与投影的次序不可以交换。在极坐标中$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \boldsymbol{e}_\rho = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\rho}\cdot \boldsymbol{e}_\rho)}{\mathrm{d}t}$是因为碰巧$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho}{\mathrm{d}t}$与$\boldsymbol{\rho}$垂直，它们的点乘为零。

3. 什么是纯滚动？

以圆盘在水平面上沿直线运动为例，纯滚动就是圆盘的边缘上的点与水平面上直线的点存在一一对应关系，或者说在运动过程中接触点的速度为零。

六、趣味问题

1. 利用有关的理论力学知识，试设计一个简单的机构，使之可画三叶玫瑰线$\rho = a\cos 3\theta$。

解：本题是例 1-3 的反问题，本质是将运动分解。

对于$\rho = a\cos 3\theta$，在图 1-6 所示的直角坐标中写成：

$$\begin{cases} x = a\cos 3\theta\cos\theta \\ y = a\cos 3\theta\sin\theta \end{cases}$$

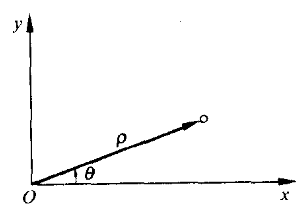

图 1-6

利用三角公式可得

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}[\cos 4\theta + \cos 2\theta] \\ y &= \frac{a}{2}[\sin 4\theta - \sin 2\theta] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

再由运动学知识，认为x由x_e与x_r组成，根据例 1-3 有

$$\left.\begin{aligned} x_E &= x_e + x_r = (R-r)\cos\varphi + e\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right) \\ y_E &= y_e + y_r = (R-r)\sin\varphi - e\sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

变换$\varphi \to 4\theta$后有

$$\left.\begin{aligned} x_E &= (R-r)\cos 4\theta + e\cos\left(4\frac{R-r}{r}\theta\right) \\ y_E &= (R-r)\sin 4\theta - e\sin\left(4\frac{R-r}{r}\theta\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

对照方程(1)、(3)的系数有

$$R=\frac{3}{2}a,\quad r=a,\quad e=\frac{1}{2}a \tag{4}$$

所以，做一个图 1-3a 的机构，取(4)式的参数，即可画出 $\rho=a\cos 3\theta$ 的三叶玫瑰线。

2. 假想在平原上有一只野兔和一只猎狗，在某一时刻同时发现对方。野兔立即向洞穴跑去，猎狗也立即向野兔追去。在追击过程中，双方均尽全力奔跑，假设双方速度大小不变，方向可变。问：

(1) 若野兔始终沿直线向洞穴跑去，求猎狗的运动方程和运动轨迹。

(2) 若野兔始终沿直线向洞穴跑去，试确定猎狗的初始位置范围，使得猎狗在这一范围内出发，总可以在野兔进洞前追上它。

(3) 若猎狗已处于前述范围内，则野兔始终沿直线跑向洞穴肯定会被追上，那么野兔是否可以沿曲线安全跑进洞穴(设速度大小不变)？画出这种情况下双方的运动轨迹。

(4) 若猎狗经过训练，追击时不是直接追向野兔，而是追向野兔奔跑的前方。试给出一种计算提前量的方法，并画出双方的运动轨迹。

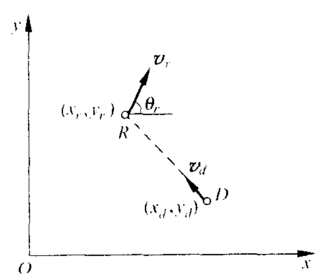

图 1-7a

解：(1) 为方便可如图 1-7a 建立坐标。在任意时刻 t，野兔 R 的位置为 (x_r, y_r)，奔跑的方向与 x 轴夹角为 θ_r。猎狗 D 的位置为 (x_d, y_d)，奔跑的方向由 D 指向 R。且设 v_r、v_d 大小均为常量，$\frac{v_d}{v_r}>1$。出于一般性的考虑，认为 θ_r 可以变化，则 t 时刻野兔的位置为

$$\left.\begin{aligned} x_r &= x_{r0} + \int_0^t v_r\cos\theta_r\,\mathrm{d}t \\ y_r &= y_{r0} + \int_0^t v_r\sin\theta_r\,\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

而猎狗在追击过程中满足

$$\sqrt{\dot{x}_d^2+\dot{y}_d^2}=v_d,\quad \frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d}=\frac{y_r-y_d}{x_r-x_d} \tag{2}$$