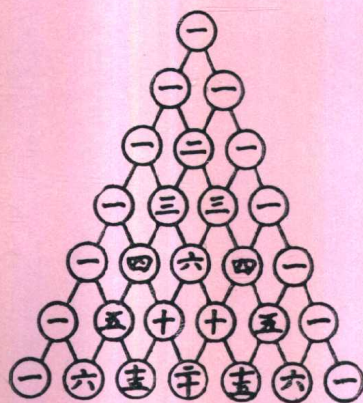


六年制重点中学高中数学课本

代 数

第 三 册



人 民 教 育 出 版 社

六年制重点中学高中数学课本

(试 用 本)

代 数

第 三 册

人民教育出版社数学室编

★

人民教育出版社出版

天津教育出版社重印

天津市新华书店发行

天津新华印刷二厂印刷

★

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张3.5 字数72,000

1983年11月第1版 1984年5月第1次印刷

印数00,001—58,000

书号 K7012·0538 定价 0.23元



一、本书是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》编写的，供六年制重点中学高中三年级第一、三类型使用。

二、本书内容包括：一元多项式和高次方程；排列，组合，二项式定理；概率。学完这些内容，约需 46 课时。其中标有“*”号的内容，供学生选学。

三、本书的习题共分三类：练习，习题，复习参考题。

1. 练习 主要供课堂练习用。

2. 习题 主要供课内外作业用。

3. 复习参考题 在每章之后配备 **A**、**B** 两组复习参考题。**A** 组题主要供复习本章知识时使用；**B** 组题略带综合性、灵活性，仅供学有余力的学生参考使用。

为了因材施教，使教学更有针对性和灵活性，本书配备的练习、习题和复习参考题 **A** 组数量较多，便于教学时根据实际情况选用。

四、本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本（试用本）《数学》第三册的有关章节，大部分内容是以原来章节为基础编写的。

五、本书由人民教育出版社数学室编写。参加编写工作的有饶汉昌、蔡上鹤、方明一。全书由吕学礼校订。

目 录

*第一章 一元多项式和高次方程.....	1
一 一元多项式	1
二 高次方程	17
第二章 排列, 组合, 二项式定理.....	42
一 排列与组合	42
二 二项式定理	68
第三章 概率.....	84

*第一章 一元多项式和高次方程

一 一元多项式

1.1 一元 n 次多项式

我们在初中学习过整式。单项式与多项式都是整式(单项式可以看作是特殊的多项式)。

以 x 为元的一元多项式的一般形式有

$$\text{一元一次式 } ax+b,$$

$$\text{一元二次式 } ax^2+bx+c,$$

$$\text{一元三次式 } ax^3+bx^2+cx+d,$$

等等, 其中 $a \neq 0$ 。

一般地, 以 x 为元的一元 n 次多项式的一般形式可以写成

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

这里 n 是确定的自然数, $a_n \neq 0$ 。

我们把系数 $a_i (i=0, 1, \cdots, n)$ 都是复数的一元 n 次多项式叫做复系数一元 n 次多项式。类似地, 把系数都是实数(或有理数、整数等)的一元 n 次多项式叫做实系数(或有理系数、整系数等)一元 n 次多项式, 它们都是复系数一元 n 次多项式的特殊情形。在本章中提到的多项式, 如果不特别说明, 都是指复系数多项式。

单独的一个非零数 a_0 , 可以看作零次多项式(事实上, 当

$x \neq 0$ 时, $a_0 = a_0 x^0$). 系数都是零的多项式叫做零多项式, 零多项式没有确定的项数与次数.

当 x 在复数集 C 上取值时, 由于复数集中加法、减法、乘法总可以实施, 一元 n 次多项式总有确定的值, 所以, 当 x 表示复数时, 我们可以把一元 n 次多项式看作定义在复数集 C 上的函数, 并记作 $f(x), g(x)$ 等. 当 $x = a + bi$ 时, $f(x)$ 的值记作 $f(a + bi)$. 很明显, 不论 x 在 C 上取什么值, 零多项式的值都等于 0, 所以零多项式可以记作数 0.

本章中, 我们规定 x 表示复数.

练习

1. 设 $f(x) = x^2 - 5x + 7$, 求:

(1) $f(0)$; (2) $f\left(-\frac{i}{5}\right)$;

(3) $f(3 + 2i)$; (4) $f\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

2. 零次多项式与零多项式有什么区别?

1.2 综合除法

我们在初中已经学过实系数多项式的加、减、乘、除等运算. 复系数多项式同样有这些运算. 一元多项式相加(包括相减)、相乘的结果仍是一元多项式, 并且加乘运算满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

一个一元多项式除以另一个一元多项式, 并不是总能整除, 当被除式 $f(x)$ 除以除式 $g(x)$ (不是零多项式), 得商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$ 时, 就有下列等式:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

其中 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数，或者 $r(x)$ 是零多项式。

当 $r(x)$ 是零多项式时，就是 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除。

一个一元多项式除以一个一元一次式，有一种简便的计算方法——综合除法。

先用一般的除法来计算 $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 除以 $x - b$ ：

$$\begin{array}{r}
 \frac{a_3x^3 + (a_2 + a_3b)x^2 + [a_1 + (a_2 + a_3b)b]x + a_0}{x - b} \\
 \underline{a_3x^3 + a_3bx^2} \qquad \qquad \qquad + a_1x \qquad \qquad \qquad + a_0 \\
 (a_2 + a_3b)x^2 \qquad \qquad \qquad + a_1x \\
 \underline{(a_2 + a_3b)x^2 - (a_2 + a_3b)bx} \\
 [a_1 + (a_2 + a_3b)b]x \qquad \qquad \qquad + a_0 \\
 \underline{[a_1 + (a_2 + a_3b)b]x - [a_1 + (a_2 + a_3b)b]b} \\
 a_0 + [a_1 + (a_2 + a_3b)b]b
 \end{array}$$

这里所得的商式是 $a_3x^2 + (a_2 + a_3b)x + [a_1 + (a_2 + a_3b)b]$ ；
余式是 $a_0 + [a_1 + (a_2 + a_3b)b]b$ ，它不含 x ，所以它是一个常数。
下面把它叫做余数。

商式中各项的系数及余数分别是

$$a_3, \quad a_2 + a_3b, \quad a_1 + (a_2 + a_3b)b;$$

$$a_0 + [a_1 + (a_2 + a_3b)b]b.$$

其中第一个数就是被除式中第一项的系数，把这个数乘以 b 再加上被除式中下一项的系数就得第二个数，依此类推，最后得到余数。

因此，上面的除法可以用下面的简便算式来进行：

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_3 & & a_2 & & a_1 & & a_0 & & b \\
 & & a_3b & & (a_2 + a_3b)b & & [a_1 + (a_2 + a_3b)b]b & & \\
 \hline
 a_3 & a_2 + a_3b & a_1 + (a_2 + a_3b)b & & a_0 + [a_1 + (a_2 + a_3b)b]b & & & &
 \end{array}$$

这里，第一行是被除式按降幂排列时各项的系数，如果有缺

项, 必须用零补足, 移下第一个系数, 乘以 b , 加上第二个系数, 依次进行, 算得的第三行就是商式各项的系数及余数. 用这种算式进行的除法叫做综合除法.

被除式的次数不是三次时, 综合除法同样适用.

例 1 用综合除法计算:

$$(1) (x^3 + 8x^2 - 2x - 14) \div (x + 1);$$

$$(2) (2x^4 + 5x^3 - 24x^2 + 15) \div (x - 2).$$

解: (1) $x + 1$ 就是 $x - (-1)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & +8 & -2 & -14 & \\ & -1 & -7 & +9 & \\ \hline & 1 & +7 & -9 & -5 \end{array}$$

$\therefore$ 商式是 $x^2 + 7x - 9$, 余数是 -5 .

(2) 被除式缺一次项, 用 0 补足, 得

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & +5 & -24 & +0 & +15 & \\ & +4 & +18 & -12 & -24 & \\ \hline & 2 & +9 & -6 & -12 & -9 \end{array}$$

$\therefore$ 商式是 $2x^3 + 9x^2 - 6x - 12$, 余数是 -9 .

例 2 用综合除法计算下列各式, 并把结果写成“ $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ”的形式:

$$(1) (4x^4 - 7x^2 - 7x - 5) \div \left(x - \frac{3}{2}\right);$$

$$(2) (6x^4 - 5x^3 - 3x^2 - x + 4) \div (2x + 1).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{解: (1)} & 4 & +0 & -7 & -7 & -5 & \frac{3}{2} \\ & +6 & +9 & +3 & -6 & & \\ \hline & 4 & +6 & +2 & -4 & -11 & \end{array}$$

$\therefore 4x^4 - 7x^2 - 7x - 5$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)(4x^3 + 6x^2 + 2x - 4) - 11.$$

(2) $2x+1$ 就是 $2\left(x + \frac{1}{2}\right)$, 先将 $6x^4 - 5x^3 - 3x^2 - x + 4$ 除以 $x + \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r} 6 \quad -5 \quad -3 \quad -1 \quad +4 \quad \Big| -\frac{1}{2} \\ \quad \quad -3 \quad +4 \quad -\frac{1}{2} \quad +\frac{3}{4} \\ \hline 6 \quad -8 \quad +1 \quad -\frac{3}{2} \quad \Big| +\frac{19}{4} \end{array}$$

$$\therefore 6x^4 - 5x^3 - 3x^2 - x + 4$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(6x^3 - 8x^2 + x - \frac{3}{2}\right) + \frac{19}{4}$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \left(6x^3 - 8x^2 + x - \frac{3}{2}\right) + \frac{19}{4}$$

$$= (2x+1) \left(3x^3 - 4x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) + \frac{19}{4}.$$

由例 2 的第(2)小题可知, $f(x)$ 除以一般的一元一次式 $px \pm q$, 也可以利用综合除法: 先将 $f(x)$ 除以 $x \pm \frac{q}{p}$, 所得的商式除以 p 就是所求的商式, 所得的余数就是所求的余数.

练习

用综合除法计算(第 1~3 题):

1. $(x^3 + 6x^2 - 11x - 14) \div (x - 3).$
2. $(x^5 - 4x^3 - 8) \div (x - 2).$
3. $(3x^4 + 7x^3 - 15x - 20) \div (x + 2).$

用综合除法计算下列各式，并且把所得的结果写成

“ $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ ”的形式(第4~6题):

4. $(x^3+1)\div(x+1)$.

5. $(27x^3-10)\div(3x-2)$.

6. $(20x^5+9x^4-8x^3+12x^2-35x-12)\div(5x+6)$.

1.3 余数定理

设有多项式 $f(x)=x^3-7x^2+12x+27$ ，那么 $f(5)=5^3-7\times 5^2+12\times 5+27=125-175+60+27=37$ ；另一方面，如果把这个多项式除以 $x-5$ ，求余数，那么用综合除法可得

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & +12 & +27 & 5 \\ & & +5 & -10 & +10 & \\ \hline & 1 & -2 & +2 & +37 & \end{array}$$

我们发现，所得的余数正好也是 37。这就是说，多项式 $f(x)=x^3-7x^2+12x+27$ 除以 $x-5$ 所得的余数正好等于 $f(5)$ 。

对一般的多项式，有下面的重要定理：

余数定理 多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数等于 $f(b)$ 。

证明： 设多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的商式为 $q(x)$ ，余数为 r ，则有

$$f(x)=(x-b)\cdot q(x)+r.$$

用 $x=b$ 代入等式的两边，得

$$f(b)=(b-b)\cdot q(b)+r.$$

由此即得余数 $r=f(b)$ 。

⑥ 此定理又叫做余式定理、剩余定理或裴蜀定理。裴蜀 (Etienne Bézout, 1730—1783 年)，法国数学家。

根据余数定理, 既然多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数 r 等于 $f(x)$ 在 $x=b$ 时的值 $f(b)$, 那么 r 就可以由 $f(b)$ 来求得, 反过来, $f(b)$ 也可以由 r 来求得.

例 1 设 $f(x)=x^8+3$, 求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 所得的余数.

解: 根据余数定理, 所求的余数等于 $f(-1)=(-1)^8+3=4$.

例 2 设 $f(x)=x^5-12x^3+15x-8$, 求 $f(6)$.

解: 用综合除法求 $f(x)$ 除以 $x-6$ 所得的余数:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & -12 & 0 & 15 & -8 & 6 \\ & +6 & +36 & +144 & +864 & +5274 & \\ \hline & 1 & 6 & 24 & 144 & 879 & +5266 \end{array}$$

根据余数定理, 余数 5266 等于 $f(6)$, 所以

$$f(6)=5266.$$

练习

1. 设 $f(x)=5x^4-x^2+6$, 求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 所得的余数.
2. 设 $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+9$, 求 $f(4)$.
3. 已知 $f(x)=16x^4-14x^3-15x^2-24x+38$, 求 $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
4. 设 $f(x)=x^6+a^3$, 求 $f(x)$ 除以 $x-ai$ 所得的余数.

1.4 因式定理

从余数定理可以推出一个重要的定理——因式定理.

因式定理 多项式 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$ 的充要条件是 $f(b)=0$.

证明: (1) 充分性. 设 $f(b)=0$, 则根据余数定理, $f(x)$

除以 $x-b$ 所得的余数也等于 0. 因此 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$.

(2) 必要性. 设 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$, 则 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数等于 0. 根据余数定理, 有 $f(b)=0$.

例 1 求证 n 为任何正整数时, x^n-a^n 都有因式 $x-a$.

证明: 设 $f(x)=x^n-a^n$, 那么 $f(a)=a^n-a^n=0$. 根据因式定理, x^n-a^n 有因式 $x-a$.

例 2 m 为何值时, 多项式 $f(x)=x^5-3x^4+8x^3+11x^2+m$ 能被 $x-1$ 整除?

解: $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除, 就是 $f(x)$ 有因式 $x-1$. 根据因式定理, 充要条件是 $f(1)=0$, 即 $1-3+8+11+m=0$. 由此可得 $m=-17$.

练习

1. 不用除法, 求证多项式 $x^4-5x^3-7x^2+15x-4$ 有因式 $x-1$.
2. 求证 n 为正偶数时, x^n-a^n 有因式 $x+a$; n 为正奇数时, x^n+a^n 有因式 $x+a$.
3. 求证 $x^{2n}-1 (n \in N)$ 有因式 $x-i$, 又有因式 $x+i$.
4. 已知 $f(x)=x^3-8x+l$ 有因式 $x+2$, 确定 l 的值.

1.5 利用综合除法、因式定理来分解因式

设有多项式 $x^6+x^4-x^2-1$, 我们把它在复数集 C 中分解因式, 得

$$\begin{aligned} & x^6+x^4-x^2-1 \\ &= x^4(x^2+1)-(x^2+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^4 - 1)(x^2 + 1) \\
 &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 1) \\
 &= (x + 1)(x - 1)(x + i)^2(x - i)^2.
 \end{aligned}$$

这个一元六次式有六个一次因式，其中有两个相同因式 $x + i$ ，两个相同因式 $x - i$ 。

关于复系数一元 n 次多项式的因式分解，有下面的定理：

定理 1 任何一个复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 有且仅有 n 个一次因式 $x - x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，把其中相同的因式的积用幂表示后， $f(x)$ 就具有唯一确定^①的因式分解的形式：

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}, \quad (*)$$

其中 $k_1, k_2, \dots, k_m \in N$ ，且 $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ ，复数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 两两不等。

这个定理的证明超出中学数学范围，本书从略。

我们把分解结果 $(*)$ 中的 $x - x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 叫做多项式 $f(x)$ 的 k_i 重一次因式。例如：多项式 $x^2 - 6x + 9$ 有 2 重一次因式 $x - 3$ ；多项式 $(x - 4)(x + 2)^2(x - 5)^3$ 有 1 重一次因式 $x - 4$ ，2 重一次因式 $x + 2$ ，3 重一次因式 $x - 5$ 。

由定理 1 可以得到：

推论 如果 $x - a, x - b (a \neq b)$ 都是复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 的因式，那么它们的积 $(x - a)(x - b)$ 也是 $f(x)$ 的因式。

证明： 因为 $f(x)$ 的分解结果 $(*)$ 是唯一确定的，所以 a

① 这里所说的“唯一确定”，不考虑各一次因式的书写顺序，也不考虑常数因子。例如，我们把 $4x^2 - 16 = (2x + 4)(2x - 4)$ 与 $4x^2 - 16 = 4(x - 2)(x + 2)$ 等等看成同一种分解形式。

一定等于某个 x_i , b 一定等于某个 x_j ($i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, m$, 且 $i \neq j$), 即 $(x-a)(x-b)=(x-x_i)(x-x_j)$, 由此可见, $(x-x_i)(x-x_j)$ 是 $f(x)$ 的因式.

对于一个任意的复系数一元 n 次多项式 $f(x)$, 要求出它的一次因式, 没有一般的方法. 但是, 如果 $f(x)$ 是整系数多项式, 那么进一步运用下列定理, 就能使我们较快地求得它的形如 $x - \frac{q}{p}$ (其中 p, q 是互质的整数) 的因式, 或者确定它没有这种形式的因式.

定理 2 如果整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 有因式 $x - \frac{q}{p}$ (其中 p, q 是互质的整数), 那么 p 一定是首项系数 a_n 的约数, q 一定是末项系数 a_0 的约数.

例如, $15x^2 - 17x + 4$ 有因式 $3x - 1$, $5x - 4$, 即 $3\left(x - \frac{1}{3}\right)$, $5\left(x - \frac{4}{5}\right)$, 3 与 5 都是首项系数 15 的约数, 1 与 4 都是末项系数 4 的约数. 又如, 如果 $2x^4 - x^3 - 13x^2 - x - 15$ 有 $x - \frac{q}{p}$ 形式的因式 (其中 p, q 是互质的整数, 下同), 那么 p 只可能是 $1, 2, q$ 只可能是 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

要注意定理中“ p 是 a_n 的约数, q 是 a_0 的约数”只是“整系数多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 有因式 $x - \frac{q}{p}$ ”的必要条件, 而不是充分条件 (为什么).

下面证明定理 2.

证明: 因为 $f(x)$ 有因式 $x - \frac{q}{p}$, 所以 $f\left(\frac{q}{p}\right) = 0$, 即

$$a_n\left(\frac{q}{p}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{q}{p}\right) + a_0 = 0.$$

把第二项起的各项移到右边, 并将两边都乘以 p^{n-1} , 得

$$\frac{a_n q^n}{p} = -(a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q p^{n-2} + a_0 p^{n-1}).$$

等式的右边是一个整数, 所以 $\frac{a_n q^n}{p}$ 也是一个整数, 即 p 能整除 $a_n q^n$. 但因 p, q 互质, 所以 p 的任何一个质因数都不是 q 的约数, 从而也不是 q^n 的约数^①. 由此可知, p 一定是 a_n 的约数.

同理, 把上面的等式写成

$$\frac{a_0 p^n}{q} = -(a_n q^{n-1} + a_{n-1} q^{n-2} p + \cdots + a_1 p^{n-1}),$$

可以证明 q 一定是 a_0 的约数.

推论 如果首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 有因式 $x - q$, 其中 $q \in \mathbb{Z}$, 那么 q 一定是常数项 a_0 的约数.

利用定理 2 及其推论, 我们可以较快地确定一个整系数一元一次式是不是某整系数一元 n 次多项式的因式.

例 1 把 $f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$ 分解因式^②.

分析: 先考虑 $x - q$ ($q \in \mathbb{Z}$) 形式的因式, 因为 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式, 根据定理 2 的推论, 可能出现的

① 例如: $p = 2 \times 5 = 10$, $q = 3 \times 7 = 21$; p 的任何一个质因数 (2 或 5) 都不是 q 的约数, 从而也不是 $q^n = 3^n \times 7^n$ 的约数.

② 如果没有特别说明, 本章中所说的因式分解, 都是指在复数集 $\mathbb{C}$ 中的因式分解.

$x-q$ 这样的因式有 $x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, x \pm 6$.

判断 $x-1, x+1$ 是不是 $f(x)$ 的因式时, 只要根据因式定理, 计算 $f(1), f(-1)$ 是不是等于零就可以了. 因为 $f(1) = -14 \neq 0, f(-1) = 4 \neq 0$, 所以 $x-1, x+1$ 都不是 $f(x)$ 的因式.

判断 $x-2, x+2, \dots$ 是不是 $f(x)$ 的因式时, 可以计算 $f(2), f(-2), \dots$ 是不是等于零. 用综合除法, 由于

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -10 & -6 \\ & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & -4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -10 & -6 \\ & & -2 & 2 & \\ \hline & 1 & -1 & -8 & \end{array}$$

(上面左式中 -4×2 不是 -6 的相反数, 右式中 $-8 \times (-2)$ 不是 -6 的相反数, 已经说明相应的余数都不是零, 所以不必继续演算了.) 可见 $x-2, x+2$ 都不是 $f(x)$ 的因式. 但

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -10 & -6 \\ & & 3 & 12 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

可知 $x-3$ 是 $f(x)$ 的因式. 所以

$$x^3 + x^2 - 10x - 6 = (x-3)(x^2 + 4x + 2).$$

因为方程 $x^2 + 4x + 2 = 0$ 的两个根是 $-2 \pm \sqrt{2}$, 于是,

$$x^3 + x^2 - 10x - 6 = (x-3)(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}).$$

解答时, 只需写出结果是因式的试验过程, 其他过程不必写出.

解:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -10 & -6 \\ & & 3 & 12 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 + x^2 - 10x - 6 \\ = (x-3)(x^2 + 4x + 2) \end{aligned}$$

$$=(x-3)(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}).$$

例2 把 $f(x)=2x^4-x^3-13x^2-x-15$ 分解因式.

分析: $f(x)$ 首项系数不是 1, 根据定理 2, 可试验 $x \pm 1$, $x \pm 3$, $x \pm 5$, $x \pm 15$, $x \pm \frac{1}{2}$, $x \pm \frac{3}{2}$, $x \pm \frac{5}{2}$, $x \pm \frac{15}{2}$.

因为 $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$, 所以 $x+1$, $x-1$ 不是 $f(x)$ 的因式. 但

$$\begin{array}{r|l} 2 & -1 & -13 & -1 & -15 & 3 \\ & +6 & +15 & +6 & +15 & \\ \hline & 2 & +5 & +2 & +5 & 0 \end{array}$$

所以,

$$f(x)=(x-3)(2x^3+5x^2+2x+5).$$

继续分解 $2x^3+5x^2+2x+5$. 这个多项式的首项系数是 2, 末项系数是 5, 所以只要试验 $x \pm 1$, $x \pm 5$, $x \pm \frac{1}{2}$, $x \pm \frac{5}{2}$ 就可以了. 但因 $x \pm 1$ 不是原来多项式 $f(x)$ 的因式, 所以也不是这个多项式的因式. 由

$$\begin{array}{r|l} 2 & +5 & +2 & +5 & -\frac{5}{2} \\ & -5 & +0 & -5 & \\ \hline & 2 & +0 & +2 & 0 \end{array}$$

得

$$\begin{aligned} 2x^3+5x^2+2x+5 &= \left(x+\frac{5}{2}\right)(2x^2+2) \\ &= (2x+5)(x^2+1). \end{aligned}$$

(实际上, 利用分组分解法也容易得到这个结果.)

x^2+1 在复数集 C 中还能继续分解因式, 所以