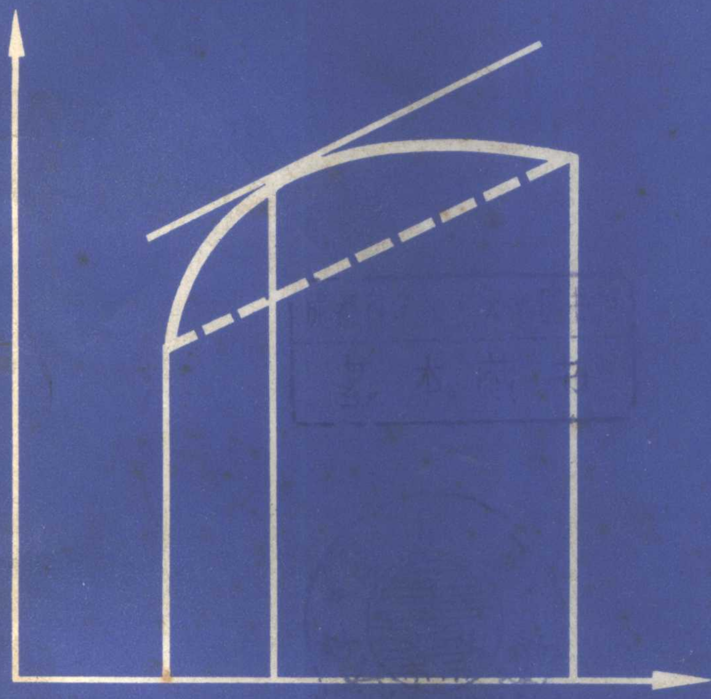
高等学校试用教材



数学分析

上册

东北师范大学 延 边 大 学
四平师范学院 内蒙民族师范学院 数学系 合编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

上册

东北师范大学　延边大学
四平师范学院　内蒙民族师范学院　数学系合编

人民教育出版社

本书是以吉林师范大学、四平师范学院、延边大学、内蒙民族师范学院数学系合编的《数学分析讲义》(校际交流，未公开出版)为基础，根据高等师范学校数学分析教学大纲修订成的．大纲中的选学内容，除编者认为应作基本内容的编入外，其余选学内容没有编写在内．

本书分两册，上册共十章，主要内容为函数与极限，一元函数微积分的基本理论与应用．可作高等师范院校和师范专科学校数学系学生的试用教材或教学参考书．

本书由高等学校理科数学教材编审委员会委托刘世伟、金圣一先生初审，并由董延闿编委复审．

高等学校试用教材

数学分析

上　册

东北师范大学　延边大学
四平师范学院　内蒙民族师范学院　数学系合编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

外文印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印张12.125　字数 300,000

1982年9月第1版　1983年1月第1次印刷

印数 00,001—15,000

书号 13012·0797　　定价 1.15 元

前　言

数学分析是高等师范院校数学专业的一门重要基础课，对后继课程以及为深入理解中学教材都起着重要的作用．本书作为教材，我们编写时，有如下几点想法。

1. 力求深入浅出，通俗易懂，便于自学．引入概念时，尽量做到由直观到抽象．阐述理论时，注意分析其来龙去脉．这样，虽费些笔墨，但却有利于读者对问题的掌握和自学。

2. 适当地多选些例题，便于读者对正文的理解．另外，在每一节都选配了一定数量的难易适当的习题，期望通过读者亲自动手，熟习数学分析基本运算并掌握处理问题的基本手法。

3. 为了便于初学者，我们将一些定理的论证适当移后，而这些定理仍按原顺序提出并应用．这样，既分散了难点，又保持了数学分析的系统．另外，如此处理也有利于师专数学专业使用本书，只要适当删去某些章节即可．

4. 为节省篇幅以及各院校情况不同，对高等师范院校"数学分析"教学大纲中选学的内容没有编写，其中有一小部分我们认为应做为基本内容的就选编在内．

1977 年 7 月，由吉林师大杨思讱、申京浩，四平师范学院张诚璞，延边大学孙纪方，通辽师范学院赵瑞清合作编写了"数学分析讲义"，它是本书的前身．讲义及其修订本曾连续四届作为东北师大数学系"数学分析"课的教材．在此基础上，现在这本书由东北师大杨思讱、刘玉琏负责主编修订的，另参加修订的有东北师范大学申京浩、简嘉奎、李世金，延边大学孙纪方，四平师范学院陈保

存，内蒙民族师范学院俞崇庆．各章习题经东北师范大学数学分析教研室部份同志审订．本书的正式出版过程中，由刘世伟、金圣一同志初审，董延闿同志复审，初、复审者提出了许多宝贵的修改意见和建议，我们根据这些意见和建议作了修改，在此表示衷心的感谢．

恳切希望读者对本书的缺点和错误给予批评指出．

编　　者

1982，1，13

目　　录

第一章 函　　数

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象．函数是中学数学重要内容之一，它又是数学分析主要研究对象．根据本课程学习的需要，这一章在读者已有函数知识的基础上，对函数进行较系统的复习和整理．

§1.1 实 数 集

数学分析所涉及的数都是实数，也就是说数学分析是在实数集上讨论的．为此我们先复习实数的一些性质．

一、实　　数

实数由有理数和无理数两大类组成．有理数包括整数和分数．我们知道，任何不等于零的有理数都可以表示成既约分数 $\frac{p}{q}$ 的形式，其中 p, q 是互质的整数．有理数（分数）还可表示为无限十进循环小数；反之，任何无限十进循环小数也可表示为分数．除了这种数外，我们称无限十进不循环小数为无理数．当我们按一定法则能写出一个无限不循环小数的任意位数时，这无理数就是已知的．

在实数集上可以定义其大小以及运算等．这样，实数集有如下一些性质：

1. 实数是有序的，即任意两个实数 a, b，必满足下述关系之一：$a<b, a=b, a>b$；且如果 $a<b, b<c$，则 $a<c$．

2. 实数对加、减、乘、除(除数不为零)四则运算是封闭的，即任意两个实数施行加、减、乘、除等运算，其结果仍是实数.

3. 实数的加法、乘法与实数的序有如下关系：如果 a, b, c 是实数，且 $a<b$，则 $a+c<b+c$；如果 $a<b$，则当 $c>0$ 时，$ac<bc$；当 $c<0$ 时，$ac>bc$.

4. 任意两个正实数 a 与 b，总存在自然数 n，使得 $nb>a$. 这个性质称为**阿基米德性**.

5. 有理数和无理数在实数中是稠密的，即任意两个不同实数之间，存在有理数和无理数.

6. 实数集与数轴上的点有着一一对应关系，即任一实数在数轴上有唯一一个点与它相对应，反之，数轴上任一点，有唯一一个实数与它相对应. 这样，全体实数所对应的点就无空隙地填满了整个数轴，全体实数的这种性质称为实数集的连续性①.

实数集与数轴上的点一一对应，今后我们将经常利用数轴上的点来表示实数，从而点和数不加区别.

二、数　集

在日常活动中，我们常常会碰到集这个概念. 例如数学分析中，要考虑实数的全体所组成的集合；计算人口增长率时，统计某年度出生婴儿的全体等；又如一个班全体学生也成一个集合. 总之，我们把具有某种特定性质的(可以是具体的也可以是抽象的)事物的全体称为**集合**(简称集)，组成集合的事物称为这个集合的**元素**. 由数组成的集合叫做**数集**. 例如全体自然数组成自然数集，全体有理数组成有理数集，全体实数组成实数集. 对于一个集来说，必须能确切地判断任何事物或是这个集的元素，或不是这个集的元素，例如自然数集，所有自然数都是这个集的元素，此外别的

① 在这里我们把直线看作是连续的.

任何数或事物都不是这个集的元素.

如果元素 a 属于集 A, 则记为 $a\in A$; 如果元素 a 不属于集 A, 则记为 $a\overline{\in} A$. 例如 A 是偶数集, 则 $2\in A$, 而 $3\overline{\in} A$.

为了研究问题的需要, 把不含任何元素的集称为空集; 记作 $\varnothing$. 例如, 若集 A 是方程 $x^2+1=0$ 实根的全体, 则 A 是空集, 即 $A=\varnothing$.

如果集 A 是由具有性质 P 的元素 x 所组成, 常将集 A 表示为

$$A=\{x\,|\,x \text{ 具有性质 } P\}$$

在 $\{\cdots\cdots\}$ 中, "|"之前表示集 A 是由元素 x 组成, "|"之后表示元素 x 所具有的性质. 例如:

$A=\{n\,|\,n=1, 2, \cdots\}$ 表示 A 是全体自然数集.

$A=\{x\,|\,x^2-x-6=0\}$ 表示 A 是方程 $x^2-x-6=0$ 根的集.

$A=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ 表示 A 是以原点为心的单位圆内 (不包括圆周) 所有点组成的点集.

集 A 的所有元素都属于集 B, 这时说集 B 包含着集 A, 记为 $A\subset B$. 例如, A 是有理数集, B 是实数集, 显然 $A\subset B$.

下面给出今后常用的数集——区间和邻域.

设 a, b 为两个实数, 且 $a<b$.

数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 叫做**开区间**, 记为 (a, b). 在数轴上, 它表为介于 a 与 b 两点间的全部点集, 但端点 a 与 b 不包括在内.

数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 叫做**闭区间**, 记为 $[a, b]$. 在数轴上, 它表为包括端点在内的介于 a, b 两点间的全部点集.

类似地还有:

$$(a, b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}. \quad [a, b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$$

$$(a, +\infty)=\{x\,|\,a<x\}, \quad (-\infty, a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}$$

$$(-\infty, +\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$$

设 δ 为正数, a 为某一实数, 把数集

$$(a-\delta, a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

叫做点 a 的 δ **邻域**. a 的 δ 邻域有时也用记号 $U(a,\delta)$表示.

三、数集的确界

定义 设E是一个数集，如果存在一个数 M，使数集E中的一切数 x, 有 $x\leqslant M$(或 $M\leqslant x$), 则称数集E有上(或下)界，数M叫做数集E的上(下)界．如果数集既有上界又有下界，则称数集 E 有界. 反之, 称数集E无界.

例 1 一切真分数所成的数集是有界的. 因为, 一切真分数 x 都小于 1 大于 -1, 所以 1 是一切真分数的上界, -1 是它的下界.

例 2 一切自然数所成的数集, 有下界, 而无上界.

例 3 一切整数所成的数集, 既无上界又无下界.

从数集的上、下界的定义看出，如果一个数集有上界，则它有无穷多个上界; 如果有下界, 则有无穷多个下界. 这就提出一个问题，在无穷多个上界(或下界)中，有没有最小上界(或最大下界)呢?

定义 设E是一个数集，如果存在一个数 β，满足下列条件:

(1) E 中任何一个数 $x\leqslant\beta$;

(2) 不论任意给定的 $\varepsilon>0$ 怎样小, 至少存在一个数 $x_0\in E$, 使

$$x_0>\beta-\varepsilon,$$

则称数 β 为数集E的**上确界**, 记为

$$\beta=\sup E \quad 或 \quad \beta=\sup_{x\in E}\{x\}.$$

(sup 是 supremum 的缩写, 就是"上确界"的意思.)

定义的第一个条件说明, β是E的上界之一; 而第二个条件说明, 凡是小于β的任何数都不是E的上界. 也就是说, 上确界β是E的最小上界, 且由条件(2), 这样的β最多有一个.

定义 设E是一个数集, 如果存在一个数 α 满足下列条件:

(1) E 中的任何一个数 $x \geq \alpha$;

(2) 不论任意给定的 $\varepsilon>0$ 怎样小,至少存在一个数 $x_0 \in E$,使

$$x_0 < \alpha + \varepsilon,$$

则称数 α 为数集 E 的**下确界**,记为

$$\alpha = \inf E \quad \text{或} \quad \inf_{x \in E}\{x\}.$$

(inf 是 infimum 的缩写,就是"下确界"的意思.)

定义的第一个条件说明,α 是 E 的下界之一;第二个条件说明凡是大于 α 的任何一个数都不是 E 的下界. 也就是说,下确界 α 是数集 E 的最大下界,且由条件(2),这样的 α 最多有一个.

例 4 证明数集 $E=\left\{\frac{1}{n} \mid n \text{ 是自然数}\right\}$ 下确界是 0,上确界是 1.

证明 (1) 显然,对 E 中任一数都有 $\frac{1}{n}>0$;

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,E 中存在元素 $\frac{1}{n}$,使得 $\frac{1}{n}<0+\varepsilon$;这只要取自然数 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可.

按下确界的定义,$\inf E=0$.

容易看出:(1) 在 E 中任一元素 $\frac{1}{n} \leq 1$;(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,只要取 $n=1$,就有 $\frac{1}{n}=1>1-\varepsilon$. 按上确界定义,$\sup E=1$.

例 5 证明数集 $E=\left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \text{ 是自然数}\right\}$ 的上确界是 1,下确界是 $\frac{1}{2}$.

证明 (1) 因为 $n+1>n$,所以 E 中任何一个元素都满足 $\frac{n}{n+1}<1$.

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,只要 n 取得足够大,在数集 E 中必存在元素 $\frac{n}{n+1}$,使得

$$\frac{n}{n+1}>1-\varepsilon.$$

事实上，为了找这样的自然数 n，解上面不等式得 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，所以只要取自然数 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，即 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，就有

$$1-\frac{1}{n+1}>1-\varepsilon \text{ 或 } \frac{n}{n+1}>1-\varepsilon.$$

按上确界的定义，$\sup E=1$.

仿例 4 讨论，不难得到 $\inf E=\frac{1}{2}$.

由例 4, 5 可以看出，一个数集的上、下确界可以属于这个集合，也可以不属于这个集合.

现在自然提出如下问题：是否"有上界的数集就必有上确界，有下界的数集就必有下确界"呢？这要涉及到所讨论问题是立足于哪个数集上. 如果局限在有理数集上讨论，那末上述命题就不一定对. 下面举例予以仔细说明.

如下构造有理数集 Q 的两个子集：$A=\{r\,|\,r^2<2$ 的正有理数$\}$与 $B=\{r\,|\,r^2>2$ 的正有理数$\}$. 可以证明：A 里没有最大数，B 里没有最小数.

事实上，对 A 中的每一个 r，即 $r^2<2$，总能找到一个 $p=r+\frac{1}{n}$，使得

$$p^2=\left(r+\frac{1}{n}\right)^2<2, \tag{1}$$

即 $p\in A$，且 $r<p$. 这只要 n 取得足够大就能做到. 因不等式(1)相当于

$$r^2+\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<2 \text{ 或 } \frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<2-r^2, \tag{2}$$

由于 $\frac{2r}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{2r+1}{n}$ $(n>1)$，所以只要 $\frac{2r+1}{n}<2-r^2$，即当 $n>$

$\frac{2r+1}{2-r^2}$时，上述不等式(2)也即不等式(1)成立．因此，A 里没有最大数．

类似地可证集 B 里没有最小数．

若所提问题局限在有理数集 Q 上讨论，那末，显然，集 A 有上界，且集 A 的所有上界①恰组成集 B，可是 B 里没有最小数，从而集 A 在有理数集 Q 中没有最小上界(即上确界)．同样，集 B 有下界，集 B 的所有下界的集，是由集 A 和所有非正的有理数所组成．由于 A 里没有最大数，所以 B 在有理数集 Q 中没有最大下界(即下确界)．

上面讨论说明：有理数集 Q 在数轴上所对应的点，尽管在数轴上处处稠密，可是在数轴上还到处存在着空隙．实数系的性质 6 直观地指出，这些空隙恰由那些无理数所对应的点填满．因此，若所提问题是在实数集上讨论，这时，无理数 $\sqrt{2}$ 是 A 的上确界，是 B 的下确界．可见，对实数集有如下性质．

实数集的确界性质 有上界的数集必有唯一的上确界；有下界的数集必有唯一的下确界．

通过上述看出，实数系从本质上不同于有理数系．这也正是实数系能在数学分析中起基础作用的重要原因．

习　　题

1. 在数轴上画出下列数集所表示的区间：

   (1) $\{x \mid (x-2)(x+3)<0\}$．　(2) $\{x \mid -3<\frac{1}{x+3}<3\}$．

   (3) $\{x \mid \frac{2}{x-2}<5\}$．　(4) $\{x \mid x^2-16<0, x^2-2x\geqslant 0\}$．

2. 证明数集 $E=\left\{\frac{1}{2n} \middle| n=1,2,3,\cdots\right\}$ 的上确界是 $\frac{1}{2}$，下确界是 0．

---

① 注意：不存在 $r^2=2$ 的任一有理数

3. 设E是一切真分数组成的数集，证明它的上确界是1，下确界是-1.

4. 设数集$\{-x\}$是由数集$\{x\}$的相反数组成，试证明：

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.　　(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

5. 设$\{x+y\}$为所有$x+y$的数集，其中$x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$，试证明：

(1) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

(2) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

§1.2 绝对值不等式

绝对值及其不等式是数学分析中研究问题常用的工具之一. 这一节根据本课程的需要，对它们进行简单的讨论.

定义 任何实数a的绝对值，记为$|a|$：当$a\geqslant 0$时，有$|a|=a$；当$a<0$时，有$|a|=-a$.

由绝对值的定义容易看出，对于任何实数a，不等式$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$总是成立的. 在数轴上，某数的绝对值就是该数的对应点到原点的距离. 两个相反数的绝对值是相等的.

下面我们讨论绝对值的几个性质.

1. 不等式$|a|\leqslant b$成立的必要充分条件是$-b\leqslant a\leqslant b$.

证明　必要性 由$|a|\leqslant b$，有$-|a|\geqslant -b$，再由$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$，有$-b\leqslant -|a|\leqslant a\leqslant |a|\leqslant b$，从而有不等式$-b\leqslant a\leqslant b$.

充分性 当$a\geqslant 0$时，有$|a|=a$，所以$|a|\leqslant b$；当$a<0$时，$|a|=-a$，再由$-b\leqslant a$，有$b\geqslant -a$，从而有不等式$|a|\leqslant b$.

这个性质说明不等式$|a|\leqslant b$和$-b\leqslant a\leqslant b$是等价的.

2. 不等式$|a|<b$成立的必要充分条件是$-b<a<b$. 这个性质的证明同性质1类似，留给读者作为练习. 由这个性质容易看出绝对值不等式$|x-a|<\delta$可表为$a-\delta<x<a+\delta$.

3. 两个数之和的绝对值不大于每个数的绝对值之和，即$|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

事实上，由$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$和$-|b|\leqslant b\leqslant |b|$，得$-(|a|+$

$|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$. 由性质 1, 有 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

由这个性质可推得 $|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

4. 两个数差的绝对值不小于两数绝对值之差, 即 $|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

事实上, 因 $a=(a-b)+b$, 根据性质 3, 有 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$, 从而有 $|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

由这个性质可推得 $|a|-|b|\leqslant|a+b|$.

除这些性质外, 还有积的绝对值等于绝对值的积; 商的绝对值等于绝对值的商, 即

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|;\qquad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0).$$

例 1 解不等式 $\qquad 2|x|-1<0$.

解 原式移项, 除 2 得

$$2|x|<1\quad 或\quad |x|<\frac{1}{2}.$$

由性质 2,

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

例 2 解不等式 $\qquad |5-2x|>3$.

解 由绝对值定义, 有

$$5-2x>3, \tag{1}$$

与

$$-(5-2x)>3, \tag{2}$$

由 (1) 式, $-2x>-2$, $x<1$. 由 (2) 式, $5-2x<-3$, $-2x<-8$, $x>4$.

所以不等式的解是 $x<1$ 和 $x>4$.

例 3 解不等式 $\qquad |x-10|\leqslant 0.005$.

解 由性质 1, 有

$$-0.005\leqslant x-10\leqslant 0.005,$$