

机床零件的计算

Д. Н. 烈歇托夫著



商务印书馆

513 60

623
22
1

机 床 零 件 的 計 算

Д. Н. 烈歇托夫著
趙为鐸 趙聖斌 鄺明澤

商 务 印 书 馆

005283

本書系根据苏联國立机器制造書籍出版社(Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы)出版、烈歇托夫(Л. Н. Решетов)所著並由苏联科学院通訊院士吉庫新(В. И. Дикунин)校訂的“机床零件的計算”(Расчет деталей станков)一書1945年版譯出。原書系由苏联金屬切削机床試驗研究所(Экспериментальный научно-исследовательский институт металлорежущих станков)組織編寫。

本書闡明金屬切削机床零件的計算,其所根据的是強度、磨損和振動的現代理論和机床制造的实践。

許多种零件的寿命計算在本書中均已引述。本書並着重討論了机床構造为满足高精度要求所必需的剛度的問題。

本書系供机床制造部門的設計工程师之用,但亦可供高等工業学校學生學習“机械零件”課程及“金屬切削机床”課程时作参考。

本書由大連工学院趙为鐸、趙聖斌与哈尔滨工業大学酈明合譯。

机 床 零 件 的 計 算

烈歇托夫著

趙为鐸 趙聖斌 酈明等譯

★ 版權所有 ★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

15017·23

1956年7月上海第1版

開本 850×1168 1/32

1956年7月上海第1次印刷

字數 129,000

印張 5 3/16

印數 1—12,000

定價(9) ¥ 0.70

目 錄

I. 机床零件的工作能力衡量标准	5
1. 靜載强度	5
2. 疲勞	7
3. 机械磨損	12
4. 热量	12
5. 剛度	13
6. 振动	14
II. 床身和導軌	20
7. 床身	20
8. 直線运动導軌	23
III. 傳动	43
9. 帶傳动	43
10. 鏈傳动	49
11. 齒輪傳动	53
12. 蝸桿傳动	71
13. 無級摩擦傳动	80
IV. 軸和主軸	83
14. 軸	83
15. 主軸	94
16. 旋轉的頂尖	99
V. 軸承	101
17. 滾動軸承	101
18. 滑動軸承	110
VI. 聯軸器和制动器	119

VII. 机构	125
19. 行星机构	125
20. 馬尔基斯机构	127
21. 往复运动机构	129
22. 凸輪机构	133
23. 進給机构的机件	134
24. 飛輪	136
VIII. 夾压裝置	139
25. 夾头	139
26. 固定螺釘	144
IX. 基礎	148
附錄	153
参考書刊	160

I. 机床零件的工作能力衡量标准

机床零件工作能力的最重要的衡量标准为：

(1) 载荷在一次施加之下的强度(系限制许多夹具, 螺桿等件的一般标准);

(2) 在長時間的变载荷作用下的强度(齒輪的輪齒, 滚动軸承, 軸, 彈簧等);

(3) 机械磨損(軸承, 導軌, 蝸輪, 齒輪和鏈輪的輪齒, 摩擦离合器等等);

(4) 加热, 及其引起的热变形和“咬住”(軸承, 蝸桿蝸輪傳动等等);

(5) 剛性(床身, 柱架, 床鞍, 刀架, 軸等);

(6) 振动(彈性系統: 机床——工件——刀具, 其中有主軸, 橫樑, 刀架, 刀具, 主运动和進給运动的傳动機構, 地基等)。

根据上述許多标准而計算各种机件时, 可划分为: 把材料整体看做承担工作的計算和表層的計算。

1. 靜載强度

在充分可靠的計算中, 各种原鋼和調質鋼的許用应力可根据各該材料相對於屈服点的安全系数为1.1—1.4來选取(失数——用於屈服限对强度限的比值大者, 小数——用於比值小者)。

如果不具备上述条件, 以及可能存在內应力或材質不均, 而對於淬硬鋼——如有变化激烈的断面时, 安全系数应適当地加大。

应力的集中通常對於非淬硬鋼並不削弱其強度；因为由於材料的局部塑流將使应力圖平齐。對於螺紋，环形溝槽等件通常甚至還呈現某种程度的增強。

抗拉屈服限 σ_s 是記載在手册、标准規範和技術条件中的一个很重要的材料特性：非淬硬鋼的 $\sigma_s \approx 0.55 \sigma_b$ ，式中 σ_b —強度限；淬硬鋼——平均为 $(0.75—0.85) \sigma_b$ （大数——適用於淬硬后硬度較高的鋼，小数——硬度低的）。

抗弯，抗扭以及在断面上的应力不是均匀分佈的其他应力状态下的屈服限系根据橫断面的形狀而定；这时，如所週知，因为相隣的受更大載荷的纖維的影响制止產生殘余变形（即所謂“維持現象”）。

在弯曲作用下，鋼的屈服限的变化范围为：薄壁形的等於 σ_s ，矩形断面的为 $(1.25—1.3) \sigma_s$ ，和圓形断面的为 $(1.3—1.4) \sigma_s$ 。在扭轉作用下，其屈服限的理論数值为：薄壁环形断面的为 $0.58 \sigma_s$ ，圓形断面为 $0.65 \sigma_s$ 。

鑄鐵的許用弯曲应力（在充分精确的計算情形下）可取抗弯強度限对安全系数为 3—4 的比值（小数——用於圓形断面，大数——用於矩形断面和某些受力面距离中和軸較远的断面）。經過机械加工的鑄鐵零件的应力可提高 20%。

因为鑄鐵的拉、压許用应力是採取对強度限的比值，所以可以和断面形狀無關；在受拉力时取圓形断面的許用弯曲应力的 0.45—0.6，而在受压力时取其 1.8—1.9 倍（大数——用於強度高的鑄鐵）。

在受扭力时，其許用应力可根据巴哈（Bach）的推荐，即對於薄壁环形断面为圓形断面的許用弯曲应力的 0.4—0.45，圓形的为 0.5—0.6，矩形的为 0.7—0.8^{[1] ⊖}。

⊖ 本書中的 [] 号內所标数字系指卷末参考書刊的編号。譯者註

對於鑄鐵零件，由於鑄鐵的材質不勻，有很大的內部應力集中，所以由其形狀所引起的應力集中係數一般並不予以考慮或用得很小。

在靜載荷以及變載荷的作用下，對於重要的特殊情形的計算利用奧金格 (И. А. Одинг) 的強度的部分安全係數法最為合理 [2, 並見 1]。

在複雜的應力狀態下，對於脆性材料，特別是鑄鐵應該採用莫爾 (Mohr) 的強度理論，而對於通常多因剪切而破壞的韌性材料，特別是鋼料應採用第三強度理論 (最大剪應力) 或採用變形能理論。

因為在機械製造中，在過去和現在都普遍採取選用減低的許用應力，以假想的靜力強度計算來代替壽命和剛度等的計算，因而在實際中也就使所選用的應力，遠較只受靜力強度因素所限制的應力為低。

接觸體表層的靜載強度，如所週知，系用海爾次 (Herz) 的公式^①進行計算。對於韌性材料，如完全不存在材料的塑流現象，則在其接觸面上的許用單位壓力可取 $\sigma_{許用} = 2\sigma_s$ ，式中 σ_s — 屈服限。因為在接觸體內部材料的局部塑流並不是危險和嚴重的，所以這些數值可以提高。當某處雖然發生不大的壓光現象和時間的影響沒有形成殘余變形的危險時，其極限單位壓力可按在接觸面上不存在塑流的情形選取，並可取等於 $\sigma_{許用} = 3\sigma_s$ ；而對於圓接觸面甚至還可再提高一些。

如果這一條件無法維持，例如，當軟鋼零件夾持在卡盤中時，則在較軟的材料上的壓痕大小可根據勃氏硬度數進行估計。

2. 疲勞

疲勞的計算在形式上不同於靜載強度計算的為：

① 見附錄 1 (153 頁)。

(1) 根据材料的疲劳限选取許用应力;

(2) 不僅对脆性材料, 並且对韧性材料也应考虑应力的集中。

材料的基本动載特性——在对称循环下的弯曲疲劳限 σ_{-1} , 可由手册中动載强度的資料选取^[3,4](並見附錄 2, 156 頁)或平均取鋼料为 $0.45\sigma_b$ (从高強度的淬硬鋼为 $0.4\sigma_b$ 到軟鋼为 $0.5\sigma_b$), 對於鑄鉄可取 $0.4\sigma_b$ (在 $0.35—0.5\sigma_b$ 之間)。这些数据系適用於小型試样的: 對於直徑在 50 公厘左右的鋼軸, 其疲劳限应降低 15—30%, 直徑 100 公厘左右的軸应降低 30—40%。硬鋼制的或断面变化激烈的机件, 其降低值应取大数^① (詳細見^[5] 及 14 節)。

經過渗碳, 氰化及特別是氮化的結果可顯著提高疲劳限; 即經過这种处理后, 机件的疲劳限可提高 50—130%。

这种处理對於断面变化激烈的零件可得最好的效果。

鋼料的扭轉疲劳限取 $\tau_{-1} = 0.58\sigma_{-1}$, 而拉-压疲劳限 $\sigma_{-1z} = 0.7\sigma_{-1}$ 。鑄鉄的取

$$\tau_{-1} = (0.75—0.9)\sigma_{-1}。$$

当应力变化在从零到最大之間时, 鋼的疲劳限等於:

$$\sigma_0 = (1.6—1.8)\sigma_{-1}; \tau_0 = (1.7—2.0)\tau_{-1}。$$

动应力集中系数最好根据疲劳試驗來选取 (見 14 節, 及动載强度的参考資料^[3,4])。动应力集中系数也能夠根据材料对切痕的敏感指数的精确数值, 由靜应力集中系数算出。

在考虑应力集中和尺寸效果的充分精确計算中, 其安全系数大致与靜載計算时的一样, 即大約为 1.3—1.5。

在复雜的应力状态下, 通常對於鋼制零件多用索德 尔 堡 (C. R. Soderberg) 的計算法或用賽林森 (C. B. Серенсен) 的強度的橢

① 通常, 在計算中应尽量利用断面尺寸为 30—50 公厘的机件試驗所得的应力集中系数的数据; 这时就不必把具有急剧变化的降低强度的尺寸系数数值特別減小 (較光軸的数值)。

圖法則^①。

用於軸的各种計算公式見 83—84 頁。

根据海尔次的研究,極限許用單位压力可取等於在相应的載荷循环次数下的表層疲劳限。在基准載荷循环次数 10^7 下,對於線的初接触(圓柱間的壓縮),其單位压力可取 $(0.25—0.3)H_B$ 公斤/公厘²。式中小数用於非淬硬鋼,大数——淬硬鋼^②。

如初接触为点时(球与球,圓环与圓环,圓柱体十字交叉等等),其許用單位压力可提高到 1.5 倍。

鑄鉄在線的初接触时,其許用單位压力可取約为抗弯强度限的 1.5 倍。

最先進的計算方法,特別是对於在变化的用量下工作的零件,就是計算其寿命,因为这样可以制造出最經濟而合理的机器構造:即其主要的零件可以有相同的計算寿命,並在需要时對於某些容易購買替換的零件可以減低其使用寿命。

这种計算系以座标系:“总載荷循环次数 n_H —破坏应力 σ ”的疲劳曲線为基础的(圖 1)。

通常,疲劳曲線都由兩部分組成,即:第一部分,其曲線可由方程式 $\sigma^{m_0} \cdot n_H = \text{const}$ 表示,式中 m_0 —對於一定的材料和应力状态是一个常数;第二部分——系一直線: $\sigma = \sigma_r$, 式中 σ_r —疲劳限。

如疲劳曲線的方程式用極限載荷表示时也有类似的形式:在

① 如所週知,索德爾堡的計算法系以強度的第三假設为根据,在反复載荷的 σ_1 到靜載荷的 σ_2 之間,其極限应力(在各种非对称循环下的)与平均应力为直線关系。强度的橢圓法則系以高夫(H. J. Gough)和波拉德(H. V. Pollard)对金屬材料的反复載荷下的弯曲和扭轉疲劳試驗及在計算公式中導入附加的材料特性——也就是抗剪屈服限,而將靜載强度学說修正的結果为根据。

② 如果載荷的总計算循环次数小於疲劳限达到定值时的循环次数(圖 1)和如果不是按照相当於基准循环次数的效果載荷進行計算时,則其許用單位压力应按下述疲劳限和載荷循环次数間的关系予以修正。如所週知,布氏硬度数为 $(2.8—2.95)\sigma_b$ (大数——用於鎳鉻鋼,小数——碳鋼)或 $(9—10)R_C$, R_C —洛氏 C 的硬度数。

第一部分, $Q^m \cdot n_{\Sigma} = \text{const}$; 而第二部分, $Q = \text{const}$ 。對於在应力和

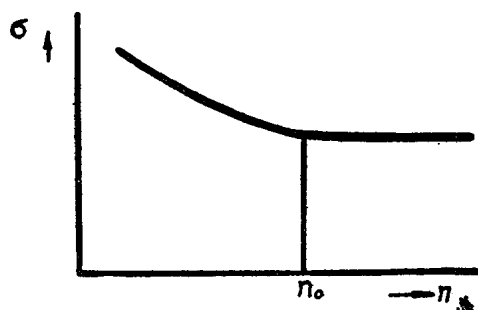


圖 1. 疲勞曲線。

載荷成正比的应力状态下, $m = m_{\sigma}$; 對於在接触应力的状态下, 应力和載荷間的关系如下: $m = \frac{m_{\sigma}}{2}$ 。当初接触为線时, $m = \frac{m_{\sigma}}{3}$ —在初接触

为点时。對於接触应力(表層的計算), 系数 m 应取等於 3; 在弯曲作用时, m 並不像接触应力时那样保持一定的数值, 一般在弯曲时取 $m = 9$ 。

相当於达到疲劳耐久限(从这一点开始曲線轉变为平行於横坐标軸的直線)的循环次数 n_0 , 系由材料、应力的种类、試样的尺寸等而定。

通常, 計算鋼的零件时, 取 n_0 等於 10^6 — 10^7 (小数用於断面尺寸小的零件, 大数——当断面尺寸大时, 以及有压入配合及接触应力时, 但淬硬鋼的接触应力除外)。輕合金的 n_0 可增大到 10^8 , 青銅——到 2.5×10^8 。淬硬鋼在接触应力下, n_0 的数值很大, 而几乎总是要較实际所能遇到的載荷总循环次数还大。

在計算时, 零件的所需使用期限及其工作用量的变化可概略地由寿命系数算出, 这个系数系以一个因子的形式被列入承受最大載荷时的計算公式中^① [49, 53]。

① 目前在实际运用中, 關於寿命的計算有滚动軸承(全世界各國都採用)和齒輪[由莫瑞特(H. E. Merritt)所拟定的經過机械加工的齒輪的英國标准, 白金漢(Buckingham)的計算, 和由彼得魯謝維奇(А. И. Петрусьевич)所拟定的苏联中央工藝及机器制造研究所(ЦНИИТМАШ)減速箱制造局的計算]。寿命的計算也可以应用於各种軸以及其他類似的机件上。

在一般的情况下,寿命系数 k 可由已知的疲劳方程式求出:

$$(Q_1^m n_1 T_1 + Q_2^m n_2 T_2 + Q_3^m n_3 T_3 + \dots) 60 = (k Q_1)^m n_0$$

式中 Q_i , n_i , T_i —分别为在用量 i ($i=1, 2, 3, \dots$) 时的载荷, 每分钟的载荷次数和工作小时数;

Q_1 —在轉数 n_1 时作用的最大载荷(寿命系数系根据这个最大载荷算出)。

对于 n_0 很大的材料和应力状态, 取在 10^7 次应力循环时的疲劳限作为计算的特性, 并将计算公式中的 n_0 换为 10^7 。

上面的方程式就是表示全部用基准载荷循环次数 n_0 期间的效果(相当)载荷 $k Q_1$ 的作用, 来代替各个载荷 Q_1, Q_2, Q_3 等在其所给的工作时间内的作用。

寿命系数的计算公式也可以写成如下的形式:

$$k = \sqrt[m]{\frac{60 T n_1}{n_0}} \sqrt[m]{\sum \frac{T_i \cdot n_i}{T \cdot n_1} \left(\frac{Q_i}{Q_1} \right)^m}$$

上式中新出现的符号: T —总计算时间, 以小时计; Σ —总和的符号。

式中的第一个因式, 即系零件的使用期限的系数, 第二个——工作用量变化系数。对于轉数为等比数列的变速箱和無級減速箱中的零件, 其工作用量的变化系数可以预先以某些極簡單的假設算出(見后)。

受接触应力的淬硬鋼, 以及在实际所能遇到的载荷循环次数的范围内無一定疲劳限的其他各种材料, 其寿命系数可以大於 1, 也可以小於 1。对于非淬硬鋼和具有类似非淬硬鋼那样的疲劳曲線的材料, 其寿命系数可以小於 1 或等於 1。这时, 如果根据计算所得的寿命系数大於 1 时, 就应该取其等於 1; 因为这种情形就是说相当於全部计算载荷的效果循环次数大於 n_0 , 因而也就是零件系在平行於载荷次数軸的疲劳曲線区域内进行工作。寿命系数的

最小值系由不產生塑性变形的条件而定。

滚动軸承的計算,由於在样本中對於各种轉数都附有許用載荷,所以非常簡單。如果計算的使用期限不同於載荷表中所取的时数(通常是5000小时),在計算式中才引用使用期限系数;这个系数的数值也是附在样本中的。

实验証明:受弯曲載荷作用的材料,在不大的循环次数內,虽受超过疲劳耐久限的某些过载,並不減低其疲劳耐久限。在降低疲劳耐久限的情形下所可能承受的过载系由实验曲線,即所謂的福阮赤(French)曲線而定^[10]。这些資料表明:在作疲劳的計算时,在大多数情形下是可以不考慮最大的起动过载及其他情形。

3. 机械磨損

为了保証零件对机械磨損有足夠的寿命,須決定在实际中所确定的許用單位压力值(導軌,滑动軸承)或預定形成超过接触面粗度之和的油層厚度的条件(重要的滑动軸承)。

到目前为止,在参考書刊中關於机床零件的实际磨損的資料,也像關於一般用途的机器零件的磨損以及一般材料的耐磨性的資料一样,都还很少^[11—16]。

4. 热量

通常,在机床制造中關於热的計算也就是校驗工作体的热量温度,以及查明热变形的影响。

温度可由热平衡方程式算出。热的逸散可以根据实验的資料計算^[17]。

例如,關於滑动軸承的有拉適氏(Lasche),卡萊立芝(Karelitz)等的实验資料。在机器零件的工作温度的範圍內,鑄鉄箱壁的散热系数可根据空气的流通情况取10—15千卡/公尺²·度·小时。

通常,極限温度系受潤滑油的吸附油膜的堅強度或热变形而定。

热变形對於各个單獨零件的工作情形(减小間隙及由此而引起“咬住”)或對於机床的精度(因線膨脹系数和床身与地基的温度等的差別所引起的床身弯曲)都有很大的影响。

5. 剛度

關於剛度的計算必須對於零件材料的基本体積的变形和表層的变形都加以考慮。

零件的基本变形可以根据材料力学的熟知公式算出。在表面粗度範圍內的表層变形可根据沃基諾夫 (Вотиннов, 苏联金屬切削机床試驗研究所, ЭНИМС) 的試驗,即变形与單位压力間 $\delta = kp$ 的直線关系为基础作概略地估計^[19]。如接合处的貼合良好並且單位压力大約在 10—20 公斤/公分²左右时,對於鑄鉄零件間的接合取如下数值:鉋制的 $k = 0.2$ 公微/公斤/公分²,刮制的 $k = 0.13—0.15$ 公微/公斤/公分²,磨制的 $k = 0.06$ 公微/公斤/公分²,研磨的 $k = 0.05$ 公微/公斤/公分²。

当新机床的接合表面非常大和單位压力較小时(光加工的机床導軌),就是在很好的安裝情形下,其变形也可大到5倍。

傳动机件所需要的剛度,特別是軸的剛度主要是根据傳动件和軸承的正常工作条件而定。進給系的剛度,特別是進給桿,凸輪軸等的剛性系由刀架的均匀移动条件而定。

主軸,心棒(心軸),后頂尖,床身,刀架,升降台等的剛度系由工件所需达到的精度而定。

關於穩定性的計算也可以屬於剛度的問題。

在机床中需要作穩定性計算的主要的零件有承受压縮作用的導螺桿和連桿。

橫向弯曲对穩定性的巨大的影响必須予以特別的注意^[20,21];

因此在計算水平安裝的導螺桿和連桿的縱向翹曲時,其安全系數應比垂直的為大。

對於許多情形的縱向翹曲計算可以歸為有中間支座的桿件的計算^[22]。

6. 振動

目前,關於机床振動的技術計算還僅限於機件的固有振動週期的近似計算和避免共振(固有振動的週期和擾動外力週期的重合)的方法,以及確定破壞的原因及對其改善的辦法。

在机床上可能出現很多種的振動。其中主要的有:(1)在週期性的擾動外力作用下的強迫振動;(2)自動振動^①或自激振動,在這種振動中,維持振動過程的變動力系由振動本身所誘起,而所需的能量則由一定的能源獲取(原動電動機);(3)因變化的剛度所引起的振動。

引起強迫振動的週期力主要有:因旋轉機件的不平衡而誘起的力,傳動機件所引起的力(因傳動帶的接縫和不均勻,輪齒的齒距和齒廓誤差,鏈輪齒數的有限性等等),變化的切削力等等。

自動振動系因金屬接觸時(其中也包括在切削時)隨着速度的增高而引起摩擦力顯著降低,切削力對切屑單元長度的坐標的關係等原因而發生。如繼續這種振動現象會促使工件在其前一轉或在刀具前一行程所得的被加工表面上產生波紋^[27]。

自動振動系由偶然的外力所引起,而增長到一定的振幅;在這個振幅下,由自激機構所得的能量和消散的能量達到平衡。在切削時,自動振動的週期系接近於振動系或其某些原件的固有振動週期。例如,在車床上有相當於主軸和工件或刀架和導軌的固有振動週期的低頻率自動振動,及相當於車刀固有振動週期的高頻

① 有時,自動振動可假定為衰減振動而算出。

率自动振动。

在進給傳動機構中,常常會出現自动振动現象,以至引起不均勻的進給。这种振动系屬於衰减型,也就是当“負衰减”力較之彈性力或振动体的質量很大时就產生这种振动。这种振动具有非正弦曲線的性質,並且其頻率完全不同於振动系的固有頻率。防止这种振动的主要的有效办法——增加傳動機構的剛度或在進給系中引用螺桿,而在用齒條進給時,应尽量在接近执行機構處採用自鎖的蝸輪傳動等^①。

屬於有变化剛度的及因而成为振动來源的零件,例如,有:滚动軸承由於滚动体对載荷平面的各个瞬时位置关系的不同,受弯曲載荷的有長鍵槽的軸,齒輪的輪齒(因为接触点沿齒廓的移动)等。

對於最簡單的振动系,其固有振动的頻率(每秒鐘的週期数)可根据表1的計算公式。承受集中載荷並考慮本身質量的樑的固有振动的低頻率,最簡單的就是利用相当的無重樑的公式近似地決定,这时載荷的質量(或重量)应增大为樑的相当質量(或重量)。其相当系数如下:在橫振动时,如載荷在端部的懸臂樑—— $\frac{33}{140}$; 載荷在中央的双支点樑—— $\frac{17}{35}$; 一端固定另端帶有圓盤的軸,在扭轉振动时—— $\frac{1}{3}$ 。

如所討論的最簡單的振动系可由受有若干个集中的或分佈的質量所代表时,則橫向振动的低頻率可按但凱萊(Dunkerley)的公式概略算出

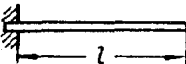
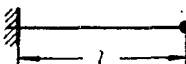
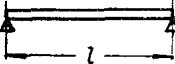
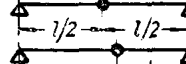
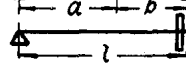
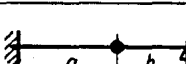
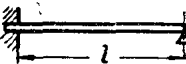
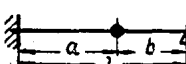
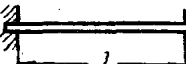
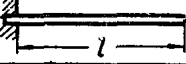
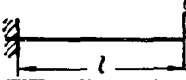
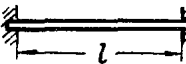
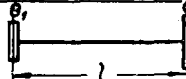
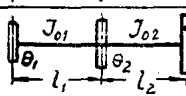
$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} + \dots,$$

式中 f —振动系及其全部質量的固有振动頻率;

① 完全免除由於摩擦力的变化所引起的自动振动的办法,为达到摩擦系数和速度同时增加的区域(靠提高速度,改善潤滑等),但通常这是很难實現的。

f_1, f_2, f_3 —梁及其个别質量的固有振动頻率(表 1); 这些单独質量的总和等於全系的質量(在这些質量之中不僅包括所安裝件的質量,並包括所討論的物体或其个别部分的質量)。

表 1. 固有橫向和扭轉振动的頻率

均質梁的橫向振動	有集中質量的極輕梁的橫向振動
$f = a_n \sqrt{\frac{9EJ}{Wl^3}} \quad 1/\text{秒}$	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9K}{W}} \quad 1/\text{秒}$
 $a_1 = 0.56$ $a_2 = 3.57$ $a_3 = 9.84$	 $K = \frac{3EJ}{l^3} \cdot 2200$
 $a_1 = 1.57$ $a_2 = 6.28$ $a_3 = 14.1$	 $K = \frac{48EJ}{l^3}$  $K = \frac{3EJl}{a^2b^2}$  $K = \frac{3EJ}{l\delta^2}$
 $a_1 = 2.45$ $a_2 = 7.96$ $a_3 = 16.6$	 $K = \frac{12EJl^3}{a^3b^3(3l+b)}$
 $a_1 = 3.57$ $a_2 = 9.84$ $a_3 = 19.3$	 $K = \frac{192EJ}{l^3}$
均質梁的扭轉振動	有圓盤的軸的扭轉振動
$f = a_n \sqrt{\frac{6J_0}{\theta l}} \quad 1/\text{秒}$	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{\theta_1}} \quad \text{式中:}$
 $a_1 = 0.25$ $a_2 = 0.75$ $a_3 = 1.25$	 $K = \frac{GJ_0}{l}$
 $a_1 = 0.5$ $a_2 = 1$	 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K(\theta_1 + \theta_2)}{\theta_1\theta_2}}$ 式中: $K = \frac{GJ_0}{l}$ 
$f = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \pm \sqrt{\left(\frac{K_1}{\theta_1} + \frac{K_1 + K_2}{\theta_2} + \frac{K_2}{\theta_3}\right)^2 - \frac{4K_1K_2}{\theta_1\theta_2\theta_3} (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}} \quad \text{式中:}$	
$K_1 = \frac{GJ_{01}}{l_1}; \quad K_2 = \frac{GJ_{02}}{l_2}$	