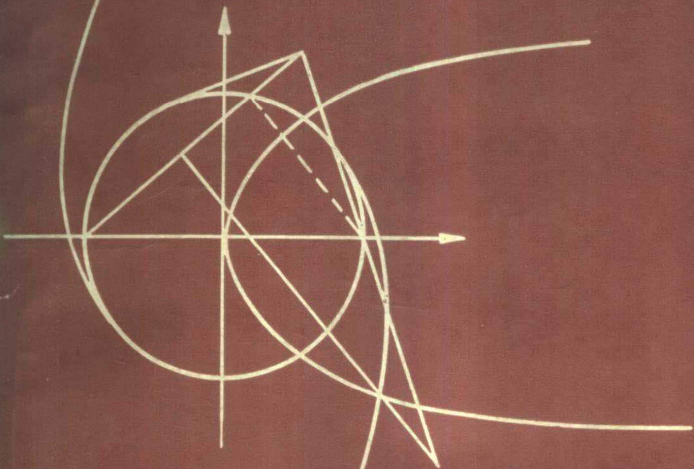
自然丛书（数学）



数理逻辑漫谈

$\exists x \ A(x)$

$\forall x \ A(x)$

山东科学技术出版社

自然丛书（数学）

数理逻辑漫谈

莫绍揆

山东科学技术出版社

一九八〇年·济南

内 容 提 要

本书是《自然丛书（数学）》中的一本。它对数理逻辑是怎样一门科学？研究些什么？有什么主要内容等读者急需知道的问题，作了初步地回答，较详细地讲述了数理逻辑的简史、性质、内容。它对数理逻辑的基本概念和一些特殊概念的特殊问题也作了讨论，使读者看后，对数理逻辑有一个大概的认识。本书还介绍了学习数理逻辑时应该注意的一些问题以及一些学习参考书。

本书文笔朴实，说理清楚，可供中学文化水平的广大读者学习参考

自然丛书（数学）
数理逻辑漫谈
莫绍揆
*
山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东人民印刷厂印刷
*
787×1092毫米32开本　2.625印张　51千字
1980年8月第1版　1980年8月第1次印刷
印数：1—8,700
书号 13195·35　定价 0.23元

《自然丛书（数学）》编辑委员会名单

出版说明

《自然丛书》是按中国科协与国家出版局联合制定的《一九七八——一九八五年全国重点科普图书出版规划》而组织编写的一套科普读物。本丛书包括数学、物理、化学、天文、地学和生物六大基础学科，由科学普及出版社、山东科学技术出版社和吉林人民出版社联合编辑出版。科学普及出版社负责编辑出版天文和物理部分，山东科学技术出版社负责编辑出版数学和地学部分，吉林人民出版社负责编辑出版化学和生物部分，

本丛书比较系统地介绍六大基础学科的基础知识、基本理论、一般应用技术及现代新发展，并适当介绍一些有关的边缘学科的知识。在表现形式上，力求深入浅出，通俗易懂，生动活泼，图文并茂。

本丛书供中等文化程度的广大读者阅读，旨在帮助他们丰富知识，开阔眼界，提高科学文化水平，增长社会主义建设才干，更好地为社会主义现代化建设服务。

目　录

一　数理逻辑简史

数理逻辑的内容非常丰富。现在，我们就从它的发展过程来说起吧。因为一件东西，无论多么复杂，如果能够从它的发展历史研究起，就容易弄清楚它的基本特性。

追溯数理逻辑的历史，可以追溯到传统的亚里士多德逻辑。现在，一般是把数理逻辑区别于传统逻辑。作这样的区别以后，有资格成为数理逻辑创始者的，共有三人。

第一个创始者是莱布尼兹（G. W. Leibniz）。他首先提出一个想法，希望创造一种“通用语言”（universal language），利用这种语言（实际上是一套符号），可以把一切哲学上（至少逻辑学上）的概念表达出来。这种语言要能为全世界的人所懂，不受自然语言的限制。这种语言符号简单，结构合理，它消除了自然语言的种种不合理的语言规则，以便于分析和综合。然后，再造一种演算，叫做推理演算，用以做推理工具。由于它是建立在通用语言之上的，所以它可以不必再处处顾到语言的内容含意，只需象数学那样对符号加以处理（所谓运算或演算），便可以获得所需的推理结果。由于对符号的处理是严格的，简单易懂的，因此该推理结果不会错误（即使有错误，也是容易检查出来，容易改正的）。因为这种想法是莱布尼兹首先提出来的，所以，

虽然莱布尼兹本人并未实现他的思想，人们仍然认为他是数理逻辑的创始者。

第二个创始者是布尔（G. Boole）。他创造一套符号来表示逻辑推理中的基本概念“并且”，“或者”，“非”等。并找到了对这些符号作运算时所应该遵守的运算规则，得出了有名的布尔代数（也可叫做逻辑代数）。他的符号体系相当完备（实质上它包括了全部的传统亚里士多德逻辑），而且还建立了有关这些符号的运算规则，所以他的确是数理逻辑的创始者。

布尔所发展的布尔代数，作为数学上的一个抽象系统来说是无可指责的。但作为逻辑代数（即作为以逻辑推理为研究对象的科学）来说，却有一个致命的缺点。原来，布尔是用一些符号来表示逻辑概念与逻辑关系的，但处理这些符号（例如推出有关这些符号的性质）时却又使用日常的逻辑推理方式。这实际上是承认了逻辑推理以后再讨论逻辑推理。这一个恶性循环是必须克服的。克服这一缺点的功绩是属于弗雷格的。

第三个创始者是弗雷格（G. Frege）。他指出了，我们可以不使用日常逻辑推理，只根据一些极简单的、机械的规则就可以了。这些规则是那么简单而机械，以致我们可以认为它们没有“推理”的味道，这样上述的恶性循环就可以避免了。此外弗雷格还有一大功绩。虽然布尔的符号体系实质上包括了整个传统逻辑(在某种意义上说它是完备的)，但人们早就知道：传统的亚里士多德逻辑是不完备的，有好多推

理过程不能表示成三段论。但是应该怎样补充呢？这却是一个难题，一千多年以来一直没有解决。由于近代数学的发展，特别由于微积分学的出现，这个缺点就更加突出地为人们所注意了。弗雷格正确地指出：我们必须引进量词（如“所有”、“有些”）的符号，量词的符号与以前所使用的符号有一个大不相同之处，按照以前的符号体系，如果$A(x)$是一个依赖于x的公式，那么含有$A(x)$的公式也必依赖于x。但引入了量词$\forall x$（一切x均有……）$\exists x$（有x使得……）以后，却出现下列现象：

$A(x)$依赖于x，但$\forall xA(x)$和$\exists xA(x)$都不依赖于x。因此，在$\forall xA(x)$和$\exists xA(x)$中的变元x叫做约束变元。一公式的真假和其中的约束变元是没有关系的。事实上：

$\forall xA(x)$表示：一切x均使$A(x)$真。

$\exists xA(x)$表示：有x使$A(x)$真。

量词$\forall x$，$\exists x$等把原来依赖于x的公式$A(x)$，变成不依赖于x的公式$\forall xA(x)$，$\exists xA(x)$，这是从来没有的现象，所以量词的引入，确是一件崭新的事情。

由于量词的引入，今天大家才承认：数理逻辑中所使用的符号体系的确是完备的，它能够把一切数学公式，一切自然科学公式乃至于一切日常语言叙述都表达出来，只用传统逻辑（乃至只用布尔代数）是不能完成这个任务的。

由于弗雷格有这两个贡献，有人建议说：弗雷格才是数理逻辑的真正创始者，这个建议似乎还未受到多数人的注意，

但是弗雷格这两大贡献的重要性却是大家一致承认的。

在本书中我们不想争论这三人谁是数理逻辑的真正创始者（或者分别叫做创始者，完成者等），我们只想强调，在数理逻辑的发展中，这三个人是起着重要作用的。这三个人的贡献主要是在纯逻辑的范围之内。但是数理逻辑的发展还从各方面受到推动力（这是由于数理逻辑是一门边缘科学的缘故），这里我们列举两个较为主要的推动力。其一，是数学基础研究方面的推动力。其二，是生产技术方面，尤其是电子数字计算机方面的推动力。

数学基础方面的动力，首先是非欧几何的产生。我们知道，长时间里大家都对欧几里德的的第五公设（平行公理）的自明性表示怀疑，觉得它可能是定理而不是公理，即它似乎应该可以从其它公理推出来。但是种种的尝试（尝试把它从其余公理推出来）都失败了。这样人们又产生一个新猜测：也许第五公理不能从其余公理推出来。要证明这个新猜测，只有使用反证法，即：承认其余的公理公设而否认第五公设，看看会不会推出矛盾来。承认其余的公理公设但否认第五公设，这便是非欧几何的做法，结果并没有产生矛盾。这样我们既建立了非欧几何，又证明了第五公设是不能从其余的公理公设推出来。

但是我们凭什么理由来断定“非欧几何并没有产生矛盾”呢？当然，迄今为止在非欧几何内的推演都没有碰到矛盾，但我们如何保证继续推下去仍然不会碰到矛盾呢？非欧几何的建立者，洛巴契夫斯基（Н. И. Лобачевский）指出，

可以在欧氏几何与他所建立的非欧几何之间建立一种对应（所谓建立“翻译字典”），使得当非欧几何中有什么定理时欧氏几何中必有相应的定理，如果非欧几何中产生矛盾，那么欧氏几何中亦必相应地产生矛盾，然而大家承认欧氏几何没有矛盾。有了这个证明之后，我们才敢断定非殴几何不会矛盾，而上述的新猜测才算得到了证明。这种证明方法可以叫做化归法，即把非欧几何的不矛盾性化归为欧氏几何的不矛盾性。

但是，人们很快便发现，既然必待证明了不矛盾性以后才承认非欧几何可以成立，那么通常的欧氏几何乃至数学分析、代数、算术等，不是也必待证明了它们的不矛盾性以后才能承认它们吗？否则，对非欧几何要求那么严格，对通常数学的要求又那么宽大，这不是不够公平了吗？于是，人们又把欧氏几何的不矛盾性化归于算术（即自然数论）的不矛盾性（实际上，还需假设集合论的不矛盾性）等。这样的逐步化归，迟早会达到一个尽头，作为化归的终点的那个不矛盾性又怎样证明呢？

在历史上，还从另一条道路出发，要求我们对实数论的不矛盾性进行证明，这就是数学分析（主要是微积分）的基础问题。

原来，近代数学的出现，开始于牛顿（I. Newton）和莱布尼兹对微积分的发明，无论微分或积分都出现无穷小的问题。试就微分而论：

微分学的创立，在于对不等速运动的处理。就等速运动

而言，速度便是所走的距离除以所花的时间。对不等速运动而言，它既是不等速的，当然速度是随时而变的，那么，在一个给定时刻上的速度该怎样计算呢？在古代，这是无法计算的。当时，人们只能够计算在一段时候内的平均速度，这就是该段时间内所走的距离除以该段时间。至于在一个给定时刻上的速度，当时人们只会计算它的近似值，即只能在该时刻附近取一小段时间Δt，计算该段时间内所走的距离ΔS，然后得该段时间内的平均速度为$\Delta S/\Delta t$。当然我们相信，如果Δt越小，则平均速度$\Delta S/\Delta t$和真正速度便越接近。但无论Δt如何小，只要$\Delta t \neq 0$，则$\Delta S/\Delta t$只能是平均速度，只能是真正速度的近似值，而非真正速度。如果$\Delta t = 0$，则$\Delta S/\Delta t$变成$0/0$而毫无意义。这就是说，要求得真正速度而非速度的近似值，必须令$\Delta t = 0$，但要使$\Delta S/\Delta t$有意义，又必须$\Delta t \neq 0$。这是两个互相矛盾的条件，这便是当初微积分学出现时数学家所碰到的难题。

我们承认，当时的数学家对这个问题的解答是有毛病的，不够满意的。例如，牛顿把Δt、ΔS叫做"消失量"，他说："两个消失量的终极比值要理解为既不是在消失前，也不是消失以后，而是恰在消失时的比值。"

在《自然哲学原理》一书中，他引入数量的"契机"(moment)这个概念，即其瞬间的增量或减量，他还对"契机"建立了一系列的性质，这些都是很令人不解的。

莱布尼兹则引入无穷小，把它作为微分学、积分学的基础，建立忽略高阶无穷小的原理，他试图把无穷小量代以成

比例的有限量，无穷小（“不可表明的”）特征三角形伴以相似的“可表明的”有限三角形，但推导时，他还是回到无穷小。

他又认为可能的出路是：把无穷小看作虚构的或理想的概念，用以发明定理或简化论证。他说，无穷小是不是真的存在，它们有没有严格的根据？“我想这可能仍然是个疑问。”

微积分学的创立者这些含混的甚至有些自相矛盾、不够妥当的言论，导致了人们对微积分学的怀疑，使反对微积分学的人高兴极了。最高兴的是著名的大主教贝克莱（G. Berkeley），他说：“这些流数（即今日的导数）是什么？是消失增量的速度。那么上述的消失量又是什么？它们既不是有穷量，也不是无穷小量，也不是空无所有。我们是否可以说，它们是消失量的鬼魂？”

“近代分析的对象和推论，并没有比宗教的神秘和信念得到更清楚的理解和更明白的推导”。

他断定无限小量是“难解的，讨厌的，臆断的”，是“很荒谬的”。又断言微积分学是“分明的诡辩”，它建立在“很荒谬的”无穷小量上，并且提高到那样惊人的高度，实则只是建立了一套空间楼阁。

可以说，贝克莱实际上是宣判了微积分学的死刑。

我们承认，当时数学家对微积分学的立论有毛病，有缺点，贝克莱把它提出来，加以强调，促使数学家们注意，加以解决，从这个意义上说，贝克莱对微积分学的发展是有一

定功劳的。但他抓住当时微积分学的一些缺点大肆攻击，不留余地，宣判它的死刑，这却大错特错了。历史的发展表明，被宣判死刑的不是微积分学，而是贝克莱对微积分学的攻击言论。

为了解答上述的微积分学基础的困难，人们发展了极限论。有关极限的各种性质最初是利用几何直觉而推导的，但几何学内并没有讨论极限，也没有讨论连续性，把极限论建基于几何直觉上是不够妥当的。后来狄德金（R.Dedekind）和康托（G. Cantor）详尽地发展了实数论，在实数论基础上完善地发展了极限论。这样一来，微积分学的基础才算建立起来。微积分学的基础在极限论，极限论的基础在实数论，人们当然要问：实数论的基础是否牢固呢？亦即，实数论是相容的、不自相矛盾的吗？如把实数论的相容性化归到别的理论后，我们仍然要问，作为终极的那个理论的相容性如何证明呢？

这时不能再使用化归法，而必须想法直接证明，必须对数学所用的概念以及推理方法作通盘的详细检查，这样所研究的范围便大大超出传统的三段论逻辑乃至于原有的数理逻辑的体系了。这就产生了证明论，它是数理逻辑的主要内容之一。

或许有人说，非欧几何的公理没有直觉自明性，所以对非欧几何我们要求不矛盾性的证明，通常数学所用的公理是有直觉自明性的（所谓不证自明的），所以对通常数学无需要求不矛盾性的证明，这不能说是不公平。

但十九世纪末集合论大大发展，把以前不大敢充分使用的概念及方法充分使用以后，在集合论的推理过程中却发生了矛盾。集合论中的概念及公理可以说是具有直觉自明性的，但充分发展之后却碰上了矛盾。足见拿直觉自明性来作不矛盾的保证是靠不住的。即使说，集合论矛盾的发展，不在于充分发展直觉自明的公理，而在于发展过程中误用了一些不合理的约定或假设。但这也表明：直觉自明性不能防止不合理约定的误用，从而直觉自明性仍不能作为不矛盾性的保证。

自从集合论中出现了矛盾以后，不但克服这些矛盾要花费数学家的大量精力（可以说，这个工作迄今还未完成），更重要的是：集合的概念以及集合论所用的方法几乎是数学的各部门都用到的，而且是不可缺的。这些概念及方法既然在集合论中引起了矛盾，我们有什么理由保证它不在别的数学部门中带来矛盾呢？这样，通常数学中所用的公理尽管有直觉自明性，而其不矛盾性的证明仍然不能缺少。因此，证明论的重要性也就易见了。

至于生产技术方面的推动力，最主要的是电子数字计算机的出现。为什么电子计算机的出现对数理逻辑有巨大的推动力呢？

首先，从某种意义说，电子数字计算机是数理逻辑与一些科学技术（主要是机械方面及电子学方面）的成果。

布尔所发展的逻辑代数有一个致命的缺点，即它假定了逻辑推理而讨论了逻辑推理。我们知道，在数学的研究中，

我们是假设了一些公理，然后根据逻辑的推理方式而推出各种定理。对一般的数学而言，这是没有问题的，因为在数学中，我们本来假定逻辑学是已知的，同时也假定各种逻辑推理方式是可以使用的，但在逻辑代数中，所研究的、所要推出的正是这些推理方式本身。这时在推理过程中，如果象通常数学那样使用这些推理方式，这不是恶性循环吗？在“没有推出某某推理方式”之前，怎样能够使用该推理方式呢？如果我们已承认了通常的推理方式没问题，那么我们就用不着把它推出来。如果我们对这些推理方式的可靠性发生怀疑，那么利用可疑的推理方式所推出的结果有什么可靠的价值呢？这正是布尔的逻辑代数的致命缺点。

上面说过，这个缺点已经被弗雷格克服了。为了克服这个缺点，他创造一套新符号，对这套符号的运算推演，无需使用通常的逻辑推理方式，只使用寥寥几条极简单、机械的规则便可以推出通常的逻辑推理方式，也可以推出数学上所使用的各种数学推理与数学演算。换句话说，一些十分复杂的推理方式及数学演算可以化归为极简单、机械的几种规则（变换）。这种化归，可以说是弗雷格的一个大贡献。

正因为这些推理与演算可以还原成为极简单、机械的规则，便使人们猜测：有可能用机器来代替人作某些演算，代替人作某些思考。当然还原的结果，必然把人类每一动作分解为很多的极简单动作，但如果利用电子计算机，这些极简单的动作都可以在极短的时间内完成，再由于机器不需要休息、睡觉，便有可能使机器的运算速度远远超过人们的运算

速度。由于电子学、机械学的发展，使这种想法得到了实现，即今日使用的电子数字计算机。所以在一定意义上说，电子数字计算机是数理逻辑与生产技术的联合成果。

今天，因为电子数字计算机已经出现，大家对于用机器代替人来进行某些思考的可能性，已经认为是不成问题的了。但是在当初数理逻辑学家开始提出这种代替的可能性时，却受到一些大数学家的嘲笑。法国数学家彭加来(Poincaré)便是其中一个。当时一些数理逻辑学家说，既然推理过程已经可以还原为一些很简单的机械动作，那么理论上说，可以造一架机器代替人们来进行推理。但彭加来却说（大意如此）：我们现在有屠宰机器，当把牛羊赶上屠宰机器的一端后，机器便把这些牛羊屠宰制成罐头，从另一端送出来。而上述想法等于想制造一部机器，当把公理、定义送进其一端后，各式各样的定理便从机器的另一端送出来。这种想法是很可笑的，而且是不可能实现的。

普因加来说这句话还不到五十年，电子数字计算机诞生了。在脑力方面，电子数字计算机所节省的人力绝不少于在体力上屠宰机所节省的人力，而电子数字计算机本质上便是彭加来所嘲笑的那一种机器（细节方面当然并不全同）。

电子数字计算机诞生后，反过来又给数理逻辑提出许多新课题，大大地推进了数理逻辑的发展。关于这点可以从两方面来说。

第一，是电子数字计算机的制造方面。我们知道，计算机必须使用电子管（或同等效能的东西），从而使用电路。