

顿志林 高家美 编著 ■

弹性力学 及其在岩土工程中的 应用

煤炭工业出版社 ■

弹性力学及其在岩土工程中的应用

顿志林 高家美 编著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书以岩土工程中的天然岩土材料为研究对象,将其视为各向同性或各向异性的弹性体,用弹性力学的理论和方法,以丰富的内容阐述了弹性力学的基本理论、求解方法和工程应用,书中包括:第一篇基本理论,第二篇平面问题,第三篇空间问题。

全书强调了基本理论的完整性和严密性,围绕岩土工程中的实际问题展开讨论,既说明应用弹性力学的基本理论解算工程实际问题的过程,又对于各种概念,结合岩土工程的力学现象作了说明。本书可作为矿井建设、工程地质、交通土建、水工建筑、建筑工程、国防工程、采矿工程等专业的本科生和研究生教材或参考书,也可供上述专业的工程技术人员和科教人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学及其在岩土工程中的应用/顿志林,高家美
编著. —北京:煤炭工业出版社,2003
ISBN 7-5020-2078-0

I. 弹… I. ①顿…②高… III. 弹性力学-应用-岩
土工程 IV. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 076278 号

弹性力学及其在岩土工程中的应用

顿志林 高家美 编著

责任编辑:黄 朝 阳

*

煤炭工业出版社 出版

(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)

北京房山宏伟印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本 787×1092mm¹/₁₆ 印张 24

字数 569 千字 印数 1—1,050

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

社内编号 4849 定价 66.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,本社负责调换

序

本书是作者根据自己多年从事弹性力学和岩土工程的科研成果及教学体会编著而成。在本书与读者见面之前，曾于1988年4月印成讲义（上、中、下三册）供焦作工学院矿井建设、工程地质、采矿工程、测量工程、矿山机械等专业的研究生和本科生使用多次。作者试图在弹性力学的经典理论与岩土工程的实际问题结合方面做一些尝试，使本书成为一本《弹性力学及其在岩土工程中的应用》方面的专著。在内容安排上，本书突出了以下几点。

1. 重视基本理论和概念，本书内容丰富、概念清楚、层次分明，并且条理性强、思路明确。

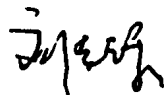
2. 全书以岩土工程中的某些实际问题为线，说明应用弹性力学解算实际问题的过程；对于各种概念，也结合岩土工程的力学现象作了说明。

3. 详细介绍了弹性力学的两种基本求解方法——应力法和位移法，并对应力法作了重点讨论。在用应力法中的应力函数法求解弹性力学问题时，关键是寻求满足弹性力学基本方程和边界条件的应力函数。对于平面问题，在平面直角坐标系和平面极坐标系中分别介绍了相应坐标系中如何根据“应力函数及其导数在弹性体边界上的力学意义”寻求应力函数的方法，为寻求弹性力学问题的应力函数提供了一种方法，避免了寻求应力函数的盲目性；另外，还利用复氏变换法给出了各向同性体和各向异性体问题应力函数的一般形式，利用复变函数法将满足双调和方程的应力函数用两个解析函数表示。对空间问题，在圆柱坐标系中利用汉克尔变换法分别给出了空间轴对称问题和一般空间问题应力函数的一般通式形式。

4. 结合岩土工程问题的无限域、各向异性、层状的特点，书中对平面问题中的半平面体以及空间问题中的半空间体作了重点介绍，给出了求解各向异性弹性体和层状弹性体问题的方法。

我认为作者在弹性力学及其在岩土工程中的应用方面做了成功的尝试，本书的出版将有助于提高我国岩土工程界的弹性力学应用水平。

中国工程院院士



2001年8月

前 言

我们根据多年从事弹性力学和岩土工程方面的教学和科研成果，编著了《弹性力学及其在岩土工程中的应用》一书。在本书出版之前，于1988年4月印成讲义（上、中、下三册）供焦作工学院矿井建设、工程地质、采矿工程、测量工程、矿山机械等专业的硕士研究生和本科生使用。作者试图在弹性力学的经典理论与岩土工程的实际问题结合方面做一些尝试。

本书由顿志林、高家美、田敏钦共同撰写，其中顿志林撰写本书的第一、二、三、十、十一、十二、十三、十四、十五章，高家美撰写本书的第四、五、七、八章，田敏钦撰写本书的第六、九章，最后全书由顿志林、高家美共同统稿、定稿。

中国工程院院士、波兰科学院外籍院士、中国岩石力学与工程学会副理事长、中南大学教授刘宝琛博士是岩石力学与工程方面有影响的学术权威，刘院士审阅了全书并作序，作者对此万分感谢。

本书的撰写，得到了焦作工学院土木工程系主任、教授杨小林博士后，焦作工学院土木工程系副主任、副教授曾宪桃博士，焦作市永固岩土工程公司经理王林海工程师以及作者的硕士研究生刘干斌的大力支持和帮助，焦作工学院重点学科建设基金对本书出版给予了资助，作者在此一并表示由衷的感谢。

由于撰写时间紧张，书中欠妥之处难免，恳请读者指正。

作者于焦作工学院

2001年6月

目 录

第一篇 基 本 理 论

第 1 章 绪 论	1
1.1 弹性力学的任务和研究方法	1
1.2 基本假设	2
1.3 空间问题和平面问题	4
1.4 单连通体 (域) 和多连通体 (域)	4
第 2 章 应力理论	6
2.1 外力和内力	6
2.1.1 外 力	6
2.1.2 内 力	7
2.2 一点的应力状态	8
2.2.1 应力的概念	8
2.2.2 应力分量的符号规则	9
2.2.3 剪应力互等定律	11
2.2.4 过物体内一点任意斜截面上的应力	11
2.2.5 一点应力状态的坐标变换	13
2.2.6 主应力、应力状态的不变量	15
2.2.7 剪应力极值	19
2.2.8 应力张量的分解及其不变量	22
2.2.9 八面体和八面体应力	24
2.3 平衡 (运动) 微分方程	28
2.4 应力边界条件	32
第 3 章 变形几何理论	37
3.1 位 移	37
3.2 一点的应变状态	40
3.2.1 应变分量及其与位移分量的关系	40
3.2.2 几种特殊应变的讨论	46
3.2.3 物体内一点任意方向的应变	49
3.2.4 一点应变状态的坐标变换	52

3.2.5	主应变、应变不变量、体积应变	53
3.2.6	剪应变极值	56
3.2.7	应变张量的分解及其不变量	57
3.2.8	八面体应变	59
3.3	变形连续条件	63
3.4	已知应变求位移及位移边界条件	70
第4章	弹性体应力和应变间的关系	79
4.1	各向同性弹性体的广义虎克定律	79
4.2	弹性体的变形势能和余能	86
4.3	各向异性弹性体的广义虎克定律	94
第5章	弹性力学问题的建立和一般原理	103
5.1	弹性力学问题的建立	103
5.1.1	弹性力学问题的基本方程	103
5.1.2	弹性力学问题的边界条件	105
5.1.3	弹性力学问题的提法	105
5.1.4	弹性力学问题的分类	105
5.2	用位移法解弹性力学边值问题	106
5.3	用应力法解弹性力学边值问题	113
5.4	线性弹性力学的叠加原理	117
5.5	线性弹性力学的唯一性定理	120
5.6	圣维南原理	124

第二篇 平 面 问 题

第6章	平面问题的直角坐标解答	128
6.1	平面应变问题和平面应力问题	128
6.1.1	平面应变问题	128
6.1.2	平面应力问题	130
6.1.3	平面问题中的主应力问题	133
6.2	平面问题的建立	136
6.2.1	基本方程	136
6.2.2	边界条件	138
6.2.3	平面问题的提法	138
6.2.4	全平面应变问题的建立	138
6.3	平面问题的位移解法(位移函数法)	141
6.4	平面问题的应力解法(应力函数法)	145
6.5	应力函数 φ 及其导数在弹性体边界上的力学意义	156

6.6 常体力的变换	162
第7章 平面问题的极坐标解答	165
7.1 平面问题极坐标中的基本方程	165
7.1.1 平衡微分方程	165
7.1.2 几何方程	168
7.1.3 物理方程	170
7.1.4 应力边界条件	171
7.2 平面问题极坐标的应力函数法	173
7.3 几个与极角无关的弹性力学问题解	176
7.3.1 周围受均布拉力作用的圆盘	179
7.3.2 厚壁圆筒问题	180
7.3.3 曲梁问题	182
7.4 半无限楔形体和半无限平面问题	187
7.4.1 在楔顶受集中力作用的楔形体	188
7.4.2 半无限平面边界上受垂直集中力作用的问题	189
7.4.3 半无限平面边界上受分布载荷作用的问题	194
7.4.4 侧面受均匀分布剪应力作用的楔形体	198
7.4.5 侧面受一段均布压力作用的楔形体	202
7.5 无限平板中圆孔附近的应力集中	210
7.6 极坐标中平面问题的通解	218
7.7 对径受压圆盘中的应力分析	227
第8章 平面问题的复变函数解答	232
8.1 平面问题的复变函数表示	232
8.1.1 应力函数的复变函数表示	232
8.1.2 应力的复变函数表示	233
8.1.3 位移的复变函数表示	234
8.1.4 合力和合力矩的复变函数表示	235
8.1.5 平面问题的复变函数提法	236
8.2 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的表达形式	236
8.2.1 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的确定程度	237
8.2.2 多连通有限域中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的表达式形式	238
8.2.3 多连通无限域中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的表达式形式	240
8.3 反平面问题和单向拉(压)问题的复变函数提法	242
8.3.1 反平面问题的复变函数表示	242
8.3.2 单向拉(压)问题的解	244
8.4 保角映射解法	245
8.4.1 圆域问题的解	245

8.4.2	保角映射与曲线坐标	251
8.4.3	基本公式的变换	253
8.4.4	用保角映射法求解平面问题的一般步骤	255
8.5	椭圆孔附近的应力计算	257
8.5.1	在无限远处受有均布载荷 q 时椭圆孔附近的应力计算	257
8.5.2	在椭圆孔边界受有均布压力 q 时椭圆孔附近的应力计算	268
第9章	平面问题的傅氏变换解答	270
9.1	用傅氏变换法求解平面问题概述	270
9.2	实 例	273
第10章	各向异性弹性体平面问题的傅氏变换解答	282
10.1	各向异性体平面问题的建立	282
10.1.1	平面应力问题和平面应变问题	282
10.1.2	基本方程	283
10.1.3	各向异性体平面问题的提法	285
10.2	各向异性体平面问题的解法	285
10.2.1	各向异性体平面问题的应力函数	285
10.2.2	应力分量和位移分量的傅氏变换表达式	286
10.2.3	各向异性体平面问题的两种求解思路	287
10.3	各向异性体半无限平面边界上受集中力作用的问题及其推广	287
10.4	各向异性体无限大平面内作用一集中力的问题及其推广	290

第三篇 空 间 问 题

第11章	空间轴对称问题的基本解法	295
11.1	空间轴对称问题的基本方程	295
11.1.1	平衡微分方程	296
11.1.2	几何方程	297
11.1.3	物理方程	297
11.1.4	边界条件	298
11.2	空间轴对称问题的两种基本解法	298
11.2.1	位移法	298
11.2.2	应力法	299
11.3	半无限弹性体在边界上受法向集中力作用的问题	304
11.4	半无限弹性体在边界矩形面积上作用均布法向荷载的解	308
11.5	竖井井筒围岩的应力和位移	309

第 12 章 空间轴对称问题的汉克尔变换解法	314
12.1 汉克尔变换法求解空间轴对称问题概述	314
12.2 任意斜向轴对称荷载作用下弹性半空间体问题的解	316
12.3 几种圆形面积上作用轴对称垂直荷载的弹性半空间体问题	319
12.3.1 在圆形面积上作用均布垂直荷载问题的解	319
12.3.2 在圆形面积上作用半球形垂直荷载问题的解	323
12.3.3 圆形刚性承载板下弹性半空间体问题的解	325
12.3.4 在圆形面积上作用任意轴对称垂直荷载问题的解	327
第 13 章 空间球对称问题的解法	330
13.1 球对称问题的基本方程	330
13.2 球对称问题的求解方法	332
13.3 空心球受均布压力问题的解答	333
第 14 章 圆柱坐标中空间问题的汉克尔变换解法	335
14.1 圆柱坐标系中空间问题的基本方程	335
14.2 圆柱坐标中空间问题的应力函数法一般解	336
14.3 任意非轴对称荷载作用下弹性半空间体问题的解	342
14.4 单向水平荷载作用下弹性半空间体问题的解	344
14.5 在圆形面积上作用单向水平荷载的弹性半空间体问题的解	346
第 15 章 层状空间弹性体问题的汉克尔变换解法	353
15.1 轴对称荷载作用下双层弹性体半空间体问题的解	353
15.1.1 在任意斜向轴对称荷载作用下双层弹性半空间 连续体问题的解	353
15.1.2 在圆形面积上作用轴对称垂直荷载的双层半空间 连续体问题的解	257
15.1.3 在圆形面积上作用轴对称垂直荷载的双层半空间 滑动体问题的解	360
15.2 在圆形面积上作用单向水平荷载的双层半空间体系问题的解	365

第一篇 基本理论

第1章 绪论

1.1 弹性力学的任务和研究方法

在岩土工程中我们经常遇到岩土的动力学问题，这些问题不解决，岩土工程的设计和施工就没有科学性，就是工程做完，也不能保证它的使用性，为此我们在某些情况下把岩土工程所涉及的岩土视为弹性体，用弹性力学的理论和方法，对其在外力作用下或由于温度改变等原因所产生的应力、应变和位移进行研究。弹性力学同材料力学、结构力学等一样，是固体力学的一个分支。

《弹性力学及其在岩土工程中的应用》这门学科，可以用来分析岩土或构件的强度和刚度，确定它的工作状态，提高其可靠性和安全度。另一方面，与上述的目的相反，可以更有效地破坏工程岩土，用最少的能耗取得最大的效益，如爆破工程、各种地下工程开挖、煤岩和矿石破碎等。

弹性力学和材料力学、结构力学的建立是一样的，但在研究对象和研究方法上有所不同。材料力学和结构力学的基本研究对象是杆件和杆件系统，弹性力学的研究对象要广泛得多，除杆件外，还包括板、壳、块体以及它们所组成的结构，如地下工程、挡土墙、坝体、地基，机械工程中的起重、运输和动力机械中各种形状的零件等都是弹性力学的研究对象。在研究方法上，弹性力学从最普遍的情况出发，求解时，由严格理论及其建立的基本方程和边界条件构成的数学边值问题，它不采用材料力学和结构力学中采用的平面假设或其他简化条件。因而，弹性力学的方法在理论上更具有严密性，在应用上更具有广泛性。

本书包括三部分内容，即基本理论、求解方法和工程应用。

在基本理论中，论述弹性体的应力、应变及位移的基本方程和相关问题。这些基本方程是：平衡微分方程、变形几何方程、物理方程以及问题的边界条件。对不同形状的弹性体，考虑到求解问题的方便，采用了不同的坐标系。

求解方法是讨论如何由弹性力学的数学边值问题出发，求解出弹性体内的应力、应变和位移等未知函数。为此，可采用把上述基本方程化为以应力分量为基本未知函数的应力法，也可采用以位移分量为基本未知函数的位移法。不论是应力法还是位移法，其求解方程都是高阶偏微分方程组，因而，常根据问题的性质使用逆解法和半逆解法。从数学方法上来说，又可将求解方法分为多项式法、三角级数解法、复变函数法、积分变换法、差分法、变分法、有限元法、边界元法等。除了上述解析和数值计算方法外，还可应用电测和光测等实验技术。

工程应用是讨论弹性力学的理论、方法和结果在各种岩土工程中如何应用的问题。本

书在弹性力学应用于岩土工程方面做了有益的尝试。

掌握弹性力学的理论和方法,对于解决岩土工程中的实际问题和进行科学研究具有重要意义。虽然,岩土工程中的力学问题是十分复杂的,表现为介质的多样性,地质条件的多变性,影响因素的不稳定性等,单靠弹性力学一门学科不能圆满解决问题,必须多学科配合,相互渗透和补充,才能收到良好的效果,但是,塑性力学、断裂力学、流变力学等都要直接用到弹性力学的一些基本方程和求解方法。可以说弹性力学是利用固体力学的其他分支学科解决岩土工程问题的基础。岩土工程中的许多理论问题,如地下工程围岩稳定性理论、矿山压力理论、岩层移动理论、边坡稳定性理论、坝基及建筑物地基理论等等,其理论基础就包含弹性力学。岩土工程中出现的许多力学现象,如地下工程的冒顶、底鼓、岩爆等,往往需要用到弹性力学的理论来分析这些现象形成的机理、发展规律和影响因素。对于用数学模拟、物理模拟、现场实测方法来研究岩土工程问题时,也需要以弹性力学的理论作指导。因此,弹性力学是解决岩土工程实际问题和进行科学研究的一种工具。

1.2 基本假设

为了由岩土工程问题中的已知量求出未知量,必须建立这些已知量与未知量之间以及各未知量之间的关系,从而导出一套求解的方程。在导出方程时,由于工程岩土材料是多种多样的,其成份、结构、内部组织及受地质因素影响程度等存在较大差异,因而受载后反映出来的力学行为或力学现象可能很不一样。如果精确地考虑所有各方面的因素,导出的方程则非常复杂,实际上不可能求解。在弹性力学中,把各类工程岩土材料和其他材料所组成的构件和结构抽象为弹性体,研究其受力后所产生的应力和变形,而不是局限于某一种材料。这就要求对实际研究对象做出具体假设,抓住主要的本质因素,略去次要的、非本质的因素,一是可使问题简化,另一方面又保留事物的本质。所以,我们特作出如下基本假设:

(一) 物体是连续的

所谓物体是连续的,就是认为整个物体的体积被组成这个物体的物质微元所填满,没有任何空隙。这样,物体内的一些物理量,例如应变、应力、位移等,才可能是连续的,因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律,才可能用微积分的数学手段来分析物体受力后各物理量的变化。严格来说,一切物体都是由微粒组成的,微粒之间都有空隙,都不符合连续性假设。尤其是对于天然岩土材料,它本身包含有许多微裂隙、孔隙、节理、充填物等,材料的组织结构具有“表面上的”非连续性。这就使得目前在岩土工程领域的研究中,对工程岩土材料的连续性表示怀疑。因此,在弹性力学中,必须考虑连续性假设的合理使用范围。

连续性假设中所说的物质微元,同理论抽象的数学点不同,物质微元是有大小的。物质微元的尺寸决定于所研究物体的尺寸。只有满足物质微元的临界尺寸,才能保证物体的连续性。物质微元的临界尺寸是指能保证物体抽象为连续体的物质微元的最小尺寸,也称为连续微元尺寸。连续性模型表示物体只有含充分多的一定尺寸的微元才能抽象为连续体。组成连续体的连续微元尺寸应满足:①连续微元尺寸与所研究物体相比要足够的小,使之在数学处理时可以近似作为数学点看待,能保证各物理量从一微元到另一微元连续变化,避免把物质的非均质性平均化;②连续微元和其中所含的孔隙、颗粒尺寸相比足够的大,包

含了足够数量的孔隙和颗粒，以保证每个单元截面上的物理量均值连续变化，便于取各物理量的统计平均值作为单个微元的物理量。显然由满足上述条件的连续微元所组成的物体，都可以近似抽象为连续体。

从连续微元尺寸应满足的条件可知，研究对象不同，其相应的连续微元尺寸也不同。在微观力学领域，所研究的物体是分子尺度，因而微观连续微元尺寸应是原子尺度，后者和前者相比足够小，同时微观连续微元又要包含足够多的原子。在细观力学领域，所研究的物体是晶粒集合体的尺度，晶粒、晶面发育不同、成分不同、粒间缝隙不同都会对颗粒集合体内部的粒间作用力产生较大影响，其相应的细观连续微元尺寸应选作颗粒尺度。在宏观力学领域（如岩土弹性力学领域），所研究的是像边坡岩体工程、地下岩土工程、地基岩土工程和区域地壳稳定工程等规模巨大的工程物体，要研究如此大范围的应力、应变、位移等物理量变化，其宏观连续微元尺寸可以是10mm~100m左右。后者微元尺寸和前者相比足够小，保证了工程岩土体中包含了足够多的连续微元。同时，连续微元与包含其中的岩块、结构面等相比又足够大，使之又包含了足够多的岩块、孔隙、节理，便于求出微元的平均物理量。

从上述分析可知，物体的连续性实际上是一种模型，是一个相对概念，在不同尺度，其连续性内涵不尽相同。在宏观领域内，不能用微观或细观的连续性内涵去理解，反之亦然。否则就很难体会出连续性概念的真谛，从而也不能正确地理解和应用。另一方面，尽管在不同尺度范围连续性内涵不同，但都可能同时满足连续微元条件，都可以用连续性模型来描述。

从变形体力学发展史来看，19世纪初哥西（Cauchy）建立应力理论时，把金属固体材料抽象为连续体，当时就有一部分科学家提出质疑。他们提出实际的“金属固体材料包含着晶体和不同数量的颗粒”。直到1845年，圣文南（S. Venant）解决了这个问题。他建议把哥西的“无限个应力单元”改成“大量的有限个单元”，“每个单元包含了大量的晶粒”，并指出哥西的“点应力”，可以看作“每个单元的平均应力”。圣文南的精辟解释使当时的科学家对金属固体的连续性有了一个正确的理解。现在，再也没有人怀疑对金属固体材料能否用连续体力学理论分析的问题了。同理，我们可以把圣文南的解释推广到解释工程岩土的连续性，不过后者的尺寸范围更大而已。这样，我们今天不会对工程岩土的连续性表示怀疑，而可以用连续体力学理论去分析解决岩土工程问题，建立岩土弹性力学，并以此为基础发展岩土塑性力学、岩土流变力学等学科。

（二）物体是均匀的

所谓物体是均匀的，就是认为物体内不同点处的材料都有相同的性质。因此，从物体任何点取出的微单元体，其性质可作为整体的代表，对它分析后所得出的结论可以应用于整个物体之中。一般说来，由同一种材料组成的物体，例如，一些种类的岩土、金属材料等，能较好地符合该假设。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的，例如某些种类的岩石、混凝土等，只要每一种材料的颗粒远小于物体，而且在物体内均匀分布，这种物体也可以当做是均匀的。对于由厚层状岩土所组成的工程物体，我们可以把它看作是在各自本层内的均匀体，这样从某层内任何点取出的微单元体就可以代表其所在层的整体性质。

（三）物体是完全弹性的

所谓物体是完全弹性的，就是指当物体受力时，一定的力导致一定的变形，变形与加

载过程无关而只取决于最终的受力状态,如果所加的外力被取消时,其变形也完全消失。应力与变形间的这种关系称为物体的弹性关系,具有弹性关系的物体称为弹性体。如果弹性体完全服从虎克(R.Hooke)定律——应变与引起该应变的那个应力分量成比例,则具有这种应变与应力成线性弹性关系的物体称为线弹性体;应力和应变之间具有非线性弹性关系的物体称为非线性弹性体,但在本书中仅讨论线性弹性体。由材料力学可知:脆性材料的物体,在应力未超过比例极限以前,可近似地看作完全弹性体;塑性材料的物体,在应力未达到屈服极限以前,也可以近似地看作完全弹性体。

弹性的概念是对物体的一种抽象。严格来说,自然界没有任何一种物体符合绝对的完全弹性假设,更何况复杂的天然岩土材料。但是要找出一种模型使之能符合岩土的一切应力与变形间特定关系,看来不是不可能至少也是非常困难的。合理的要求是所抽象的模型能反映一定条件下岩土材料应力和应变关系的主要特征。对完整均匀坚硬的岩体在低应力水平下,应该说把其视为线性弹性体来处理是可行的。对于层状和裂隙较发育的岩土,如果层理和裂隙等不连续面的间距尺寸与问题的整个尺寸相比是足够小的话,也可近似用弹性体模型来分析其在低应力水平下的应力、应变和位移。

(四) 物体的位移和应变是微小的

以上三个方面的假设属于物理方面的基本假设,这里讨论的是几何方面的假设。

所谓位移和应变是微小的,就是说受力后整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,而且,应变和转角都远小于1。这样,在建立物体变形以后的平衡微分方程时,就可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸,而不致引起显著的误差(见2.3节),在考察物体的应变和位移时,转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计(见3.2节)。这样,就使得平衡微分方程和几何方程都简化为线性方程,简化了问题。

1.3 空间问题和平面问题

如果所研究的物体形状是空间坐标 (x, y, z) 的函数。所受的载荷等外界作用也是空间坐标 (x, y, z) 的函数,则物体内的应力、应变和位移也必然是空间坐标 (x, y, z) 的函数,这样的弹性力学问题称为空间问题。它在数学上属于三维问题,所以空间问题也叫做三维问题。

但是,如果物体有特殊的形状(三个方向尺寸中的一个尺寸远大于或远小于其他两个方向的尺寸),并受到特殊分布形式的外载荷作用时,则物体内的应力、应变和位移只是两个坐标 (x, y) 的函数,这样的弹性力学问题称为平面问题。它在数学上属于二维问题,所以平面问题也叫二维问题。平面问题可分为平面应变问题和平面应力问题。

1.4 单连通体(域)和多连通体(域)

如果物体所占的区域只有一个连续边界,就称此物体为单连通体(域);反之,如果物体所占的区域多于一个连续边界,就称此物体为多连通体(域)。也可把单连通体定义为没有孔洞的物体,把多连通体定义为开有一些孔洞的物体。图1.4-1为平面单连通体,图1.4-2为平面多连通体,图1.4-3为一锚环,它是一圆环环绕与其共面但不相交的轴旋转而成的物体。它是空间多连通体的一个例子。

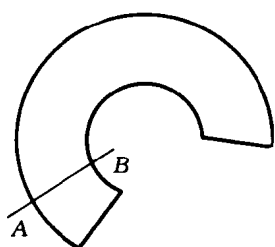


图 1.4-1 单连通体

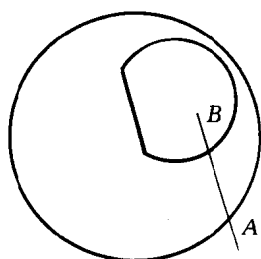


图 1.4-2 平面多连通体

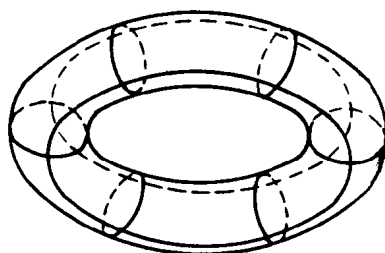


图 1.4-3 空间多连通体

第2章 应力理论

应力是弹性力学的一个主要概念,应力理论是弹性力学的基本理论。

本章介绍有关外力和内力的基本概念,重点介绍一点的应力状态理论,这是主要部分,其内容包括应力的定义、应力符号的规定、剪应力互等定律、应力张量的分解、八面体应力、一点应力状态的坐标变换、主应力等;进而讨论物体在平衡(或运动)时不同点的应力分量之间的关系,即平衡(或运动)微分方程及应力边界条件。

正如在前1章里指出的,弹性力学是研究外力作用下处于平衡(或运动)状态下的任意形状物体中应力、应变和位移的分布问题。因而应首先讨论外力和内力,进而讨论应力。

2.1 外力和内力

2.1.1 外力

弹性力学中的外力是指物体产生变形或获得加速度的原因。

作用于物体使物体产生变形的力可分为体积力和表面力,两者分别可简称为体力和面力。

所谓体力(体积力),就是加在物体每个质点上的力,如重力、惯性力等。对于岩土工程来说,其体积力主要是自重力。

一般来说,物体内部各点所受的体力是不同的。为了表明该物体在某点 A 所受体力的大小和方向,围绕这一点取一微元体,它包含着 A 点且体积为 ΔV 。若作用于 ΔV 的体积力为 $\Delta \vec{Q}$,则在 ΔV 体积内体力的平均集度为 $\Delta \vec{Q}/\Delta V$ 。如果把所取的那一微元体不断缩小,即 ΔV 不断减小,则 $\Delta \vec{Q}/\Delta V$ 将不断地改变大小、方向和作用点。现在,令 ΔV 无限减小而趋于 A 点,若体力为连续分布,则 $\Delta \vec{Q}/\Delta V$ 将趋于一定的极限 $\vec{f}$,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V} = \vec{f} \quad (2.1-1)$$

这个极限矢量 $\vec{f}$,就是该物体在 A 点所受体力的集度(单位体积上的作用力)。矢量 $\vec{f}$ 在直角坐标系 $oxyz$ 三个坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 f_x 、 f_y 、 f_z 称为该物体在 A 点的体力分量。体力分量的符号规则为(或更广泛些,外力符号规则)沿坐标轴正方向的体力分量为正,反之为负。体力的因次是[力]/[长度]³,其单位为 N/m^3 。

所谓面力(表面力),就是加在物体表面上的力,例如流体压力、岩石地下工程中衬砌与围岩间接触力等。在一些问题的分析计算时,我们也常把原岩应力视为面力。物体在其表面上各点所受面力的情况,一般是不相同的。为了表明该物体在其表面某一点 A 所受面力的大小和方向,围绕这一点 A 取一微元面,它包含着 A 点,其面积为 ΔS ,设作用于 ΔS 上的面力为 $\Delta \vec{Q}$,则面力的平均集度为 $\Delta \vec{Q}/\Delta S$ 。与上述体力相似,令 ΔS 无限减小而趋于 A 点,假定面力为连续分布,则 $\Delta \vec{Q}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\vec{F}$,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta S} = \vec{F} \quad (2.1-2)$$

此极限矢量 $\vec{F}$ 就是该物体在 A 点所受面力的集度(单位面积上的作用力)。矢量 $\vec{F}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 F_x, F_y, F_z 称为该物体在 A 点的面力分量。它们沿坐标轴的正方向为正,反之为负。面力的因次为[力]/[长度]²,其单位为 N/m^2 ,称为帕斯卡(Pa),简称帕(Pa)。

另外,在弹性力学的外力中,还经常出现集中力作用于物体的情况。对于集中力,可以将其理解为作用在与物体相比很小面积内一定大小的力,或者说,它是一定大小的力作用于无限小面积内的极限情况。可以想象,在集中力作用点附近的小区域内,应力是很大的,致使材料进入塑性变形状态而超出弹性力学讨论问题的范围。因此,在弹性力学里讨论的实际上是集中力作用点附近小区域以外的问题。

集中力可以用 Dirac- δ 函数表示。例如,有一集中力 p 作用于物体表面一点 (x_0, y_0, z_0) 上, p 的三个直角坐标分量为 (p_x, p_y, p_z) ,则可用 Dirac- δ 函数表示为

$$\{p\} = \begin{bmatrix} p_x \delta(x - x_0) \\ p_y \delta(y - y_0) \\ p_z \delta(z - z_0) \end{bmatrix} = [p_x \delta(x - x_0), p_y \delta(y - y_0), p_z \delta(z - z_0)]^T \quad (2.1-3)$$

需指出的是,这里引进 Dirac- δ 函数表示集中力的主要目的在于利用 Dirac- δ 函数的如下性质:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) dx dy dz = f(x_0, y_0, z_0) \quad (2.1-4)$$

对于一维问题,则 (2.1-4) 式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (2.1-5)$$

物体不管是在体力作用下,还是在面力作用下,在其内部必产生内力。

2.1.2 内力

在受到外力作用后所引起的物体内部一部分与另一部分之间的相互作用力称为内力。

研究物体的内力所采用的方法一般为截面法。如图 2.1-1 所示。一物体在外力 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \dots$ 作用下处于平衡状态,为了显示内力,可以假想用一截面 π 将所研究的物体分成两部分 I 和 II。由于整体是平衡的,所以物体的任何一部分也都处于平衡状态。但是,作用于 I 部分的外力 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ 并不平衡,它们和第 II 部分物体通过截面 π 作用于第 I 部分的力才组成平衡力系。II 部分通过截面 π 而作用于 I 部分的力是由于外力 $p_1, p_2, p_3 \dots$ 所引起的物体内部一部分对另一部分

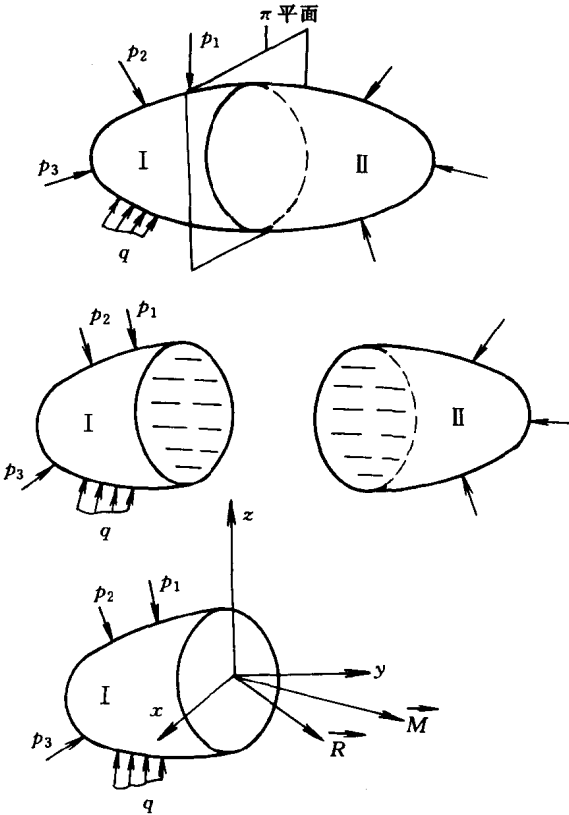


图 2.1-1 截面法示意图