

25165



技互數學

技互數學

下冊

互

(3)31

201038

67

行



25165

202
333
720404

37754

7.2

技 工 數 學

下 册

編 者 劉 立 十
劉 立 十

工 藝 書 店 印 行

北京市書刊出版業營業許可證出字第〇二九號

版權所有



翻印必究

一九五二年十月初版

一九五三年六月四版

技 工 數 學

下冊 人民券壹萬玖千元整

編	者	劉	立	十
		劉	行	三
出	兼	張	良	辰
發	人			
版				
行				

總發行所 工 學 書 店

北京西交民巷鐵兒胡同12號 • 電話 0928 號

書號1015 31×43^{1/32} 105千字 5801—800 冊(京二廠印)

目 次

第三編 幾 何 (80小時)

第一章 總論 (16小時) 1 ~ 36

- (一) 幾何學的源起與發展
- (二) 定義、公理與定理
- (三) 幾何圖形
- (四) 線, 面, 角的基本概念
- (五) 常用的記號及術語
- (六) 簡易幾何畫

第二章 直線及直線形 (22小時) 37 ~ 79

- (七) 角的性質
- (八) 三角形 (I)
- (九) 平行線
- (一〇) 三角形 (II)
- (一一) 四邊形及多邊形
- (一二) 三角形 (III)
- (一三) 定理的分析

第三章 圓 (21小時) 79 ~ 113

- (一四) 圓周與直線的相互位置
- (一五) 初步定理
- (一六) 兩圓周的種種相互位置
- (一七) 圓周角和其他幾種角的分析
- (一八) 圓的內接和外切多邊形及圓的作圖題
- (一九) 軌跡

第四章 比例及相似形 (18小時) 114 ~ 142

- (二〇) 代數在幾何學中的應用
 (二一) 相似形(Ⅰ)
 (二二) 關於圓與直角三角形的比例線段
 (二三) 相似形(Ⅱ)

第四編 三角 (30小時)

第一章 角的量法 (3小時)143~148

- (一) 引言 (二) 角的意義

- (三) 角的單位

第二章 三角函數 (9小時)149~169

- (四) 銳角三角函數 (五) 餘角三角函數

- (六) 特別角三角函數 (七) 任意角三角函數

第三章 直角三角形的解法 (3小時)170~176

- (八) 解直角三角形 (九) 已知一邊及一銳角

- (一〇) 已知任意兩邊的解法

★第四章 複角三角函數 (6小時)177~185

- (一一) 和角三角函數 (一二) 差角三角函數

- (一三) 倍角三角函數 (一四) 積與和的變換

第五章 任意三角形的解法 (5小時)186~195

- (一五) 三角形邊角間的函數 (一六) 解任意三角形

關係

★第六章 三角形及多邊形的性質 (4 小時)196~200 .

(一七) 三角形的面積 (一八) 三角形內切圓半徑

(一九) 正多邊形的面積及其周界

附：三角函數表

“★”說明：爲了配合教學實際時數，第四章與第六章是
可以刪去的。

第三編 幾何

第一章 總論

(一)幾何學的源起與發展

1. 鐵絲與鉛絲形狀是一樣，物質不一樣；鐵軌與鐵輪，物質是一樣，形狀不一樣，籃球和排球，物質形狀都一樣，大小不一樣，冬日與夏日，物質形狀大小完全一樣，位置不一樣。（是從動的地球上來看太陽）關於一切事物的研究，可以就自然現象或自然物質去研究，也可就其數量或其形狀大小和位置來研究。幾何學，便是專門研究物體形狀大小的科學，在處理兩個以上的物形時，並論及其相互間位置的關係，故又名形學，是數學的一環。

2. 按希臘文的原意，幾何學即測地術。其所以這樣命名，是因為在古代埃及國裏尼羅河每年泛濫，為了確定勞動人民退水後原有的地形，於是創造了一套簡單的測量術，這便是幾何學的開端，也就是說古代的幾何學，主要目的，是偏重在地面上距離與面積的測量，至於各種理論，則為其後長時間多數人經驗的積累，至紀元前三百年歐幾里得到埃及教學時，才把幾何學的原理和事實，詳為

整理及證明，並加上自己的發明，編成“幾何原本”一書，今日的初等幾何教本，都是從這本書上取材的。

3. 幾何學的基礎，完全建立在許多定義，公理，和基本定理上，只要能把握這些基礎事物的學習，是不難應用到測繪，建築、機械、物理、天文、航海等實用科學上來的，因此幾何學，確是今日技術工人主要武器之一，我們應該悉心的去體會它，以期得心應手，廣泛運用。

(二) 定義、公理與定理

幾何學是實事求是的科學，最重推理，凡是幾何學裏肯定的真理，都以命題的形式來表示，這些命題重要的有下列幾種：

1. 定義：把各種事物，分別加以一定的名義，並指出它的特性，以求名正言順，不相混淆，這就稱為定義。上面說“幾何學是研究物體形狀大小位置的科學”便是幾何學的定義。

2. 公理：積累經驗，不須證明，而為羣衆所公認的真理，稱為公理。譬如說“甲量等於乙量，丙量也等於乙量，則甲乙丙三量都相等”這便是數學上的基本公理。

3. 定理：由一種陳述，根據其原因，能確切證實其結果，為一定不移的道理時，稱為定理。原因屬於假設

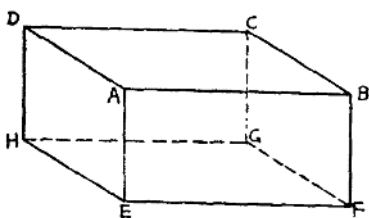
份，結果屬於終結部分，所以說定理的組成，是要包括這兩部份的。

(三)幾何圖形

1.體、面、線、點的相互關係：

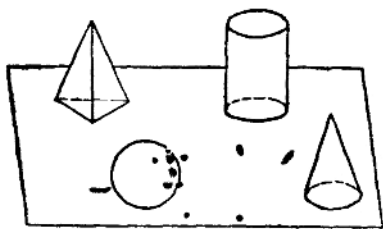
(甲)凡實物，必佔有空間的一定部分，其所佔空間的部分稱為幾何體，或簡稱體。下面甲乙兩圖，都是有規則的立體，其他的形體尚多，只要佔有空間一定部分的統統稱為體。

(甲)



(乙)幾何體是由面來和空間隔開的，所以說立體的界稱為面。如甲圖上的 $ABCD$ 為上面， $ABEF$ 為側面。

(乙)



(丙)面的一部分與另一相鄰部分，是由線來交接的，所以說面的界稱為線。上面甲圖中的 AB ，或 BC 等都是。

(丁)一線的兩端是由點來限制的，所以說線的界稱為點，兩線相交處也稱點。甲圖中的 A, B, C, \dots 都是點。

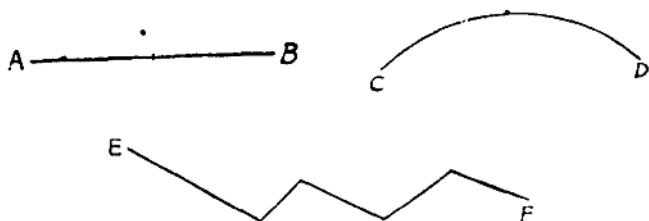
2. 由之可知幾何體，面、線與點，都不是獨立存在的，但憑抽象觀念來分析，像粉筆不能代表幾何體，黑板面不能代表幾何上的面，板上畫的點或線，也不能代表幾何上的點或線。這是因為想像中的幾何面，沒有厚度，線沒有寬度與厚度，點沒有長寬與厚度的緣故，不過為求研究便利起見，點、線、面、體不僅可以單獨研究，同時還用圖及不完滿的記號來表示。

3. 不論是點、線、面，或體凡在空間有一定形狀的，一般都稱為幾何圖形。幾何圖形，是可以不變更形狀在空間移動的，假設兩個幾何圖形用移形法使一個完全密合在另一個上面，這兩個幾何圖形稱為全等形。這種方法稱為疊合法。

(四) 線、面、角的基本概念

1. 線：線的形態，大約有三種，胡琴上扭緊了的弦，可以表示直線，碗口的週界，可以表示曲線，折彎了的火藥可以表示折線，根據這些概念，不難了解。

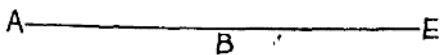
(甲)直線：是最簡單最基本的線，幾何學上常簡稱線，如下圖中 AB，即代表直線的 AB 線段；在直線上任取一段，與他段相重，是能密合的，由之可知在空間內任何兩點，都可以連成一條直線，也只能連一條直線。



(乙)曲線：是沒有一處為直線的線，上圖中CD即表示一段曲線，同時也可知道圓周，不過是在其上任一點距中心等遠的一條封閉曲線而已。

(丙)折線：是幾條不同方向的直線連接，而成的線，如上圖中EF，即表示折線的一種形態，並且還可推知三角形、四邊形、多角形的周，都是閉合了的折線。

在實際上，直線的兩端，都可無限延長，也可在直線上，任意截取一部份，下圖中BE，是AB的延線，即把AB線由B延長到E的意思，但AB



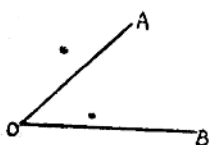
線，又可說是AE線中截取的一段，若AB與BE相等時，B點即為AE線段的二等分點或稱中點，又在同一平面內不相交的兩直線稱為平行線，平行線間的距離是相等的。

2. 面：面的形態，也有二種，較好的窗戶上所裝的玻璃，可以表示平面，皮球的外殼，可以表示曲面，從這些概念中，也能知道。

(甲)平面：在面上任取兩點連成直線，此直線上各點，都能和面上密接時，這種面才是平面。在一平面上，可以任取一部份，組成各種不同的圖形。本編是專門研究平面上的幾何圖形，故又稱平面幾何學。

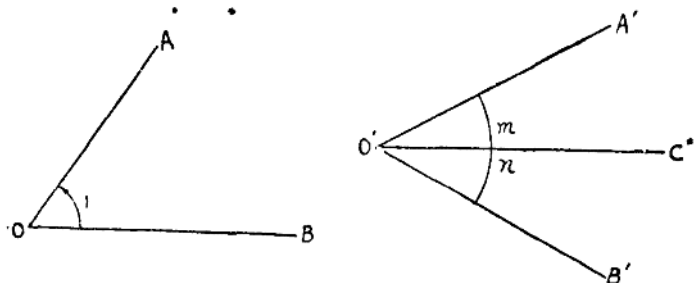
(乙)曲面：是沒有一處是平面的面。

3. 角：由一點出發的兩個半直線，(如下圖中的 O



A 與 OB) 所組成的圖形，稱為角，構成角的半直線，稱為邊，兩邊出發的公共點稱為頂點，或簡稱頂。由於角的两邊是半直線，故角之大小與邊的長短無關，角的邊，把這角所在的平面，分為角內區與角外區兩部分。如上圖畫有陰影線的部分，即表示角內區。空白的部分當然表示角外區，因此可知角內區即表示此角的大小。

(甲)角的記法：普通常用大寫的英文字母來表示，寫記的時候，頂點的字母，放在其餘兩個字母的中間，如下面左圖，可記為角AOB或角BOA，有時，因為它僅是單獨的一個角，亦可僅記角頂的字母，角O。又如下圖中角 A' O' B' 是由角 A' O' C' 與角 C' O' B' 組合而成的，在記法

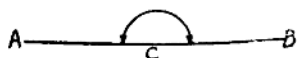


上，往往因角內記有小寫英文字母如 m, n ，或數目字 $1, 2, \dots$ 等，亦可僅用角 m ，角 n ，角 1 ，等來表示。

(乙)角的重合：要比較兩角的大小，也和一般幾何圖形一樣，只要兩角能完全密合，則此兩角為等角。例如上圖中把左邊的 AOB 放在右邊的 $A'O'B'$ 上，先使頂 O 與 O' 相合，邊 OA ，沿 $O'A'$ 而下，兩角的角內區，都在 OB 的同一邊，然後看 OA 是否落在 $O'A'$ 上，相合則兩角相等； OA 落在角 $A'O'B'$ 的角內區以外，則角 AOB 大於角 $A'O'B'$ ，落在角內區以內，則小於角 $A'O'B'$ ，又若在上面右圖中，角 $A'O'C'$ 等於角 $C'O'B'$ 時， $O'C'$ 即稱為角 $A'O'B'$ 的二等分線。

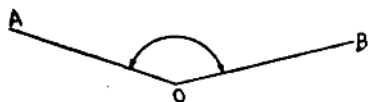
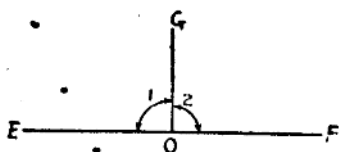
(丙)角的類別：角可以單獨按其大小形狀來研究，也可以其與另一角的相互關係來研究，大體說來，約有下面幾種：

平角：角的兩邊在同一直線上，但其方向相反，如次圖



角ACB, 兩邊AC, 與BC, 是在同一直線上, 不過方向是相反的, 因角頂既不凸出, 又不回入, 故依其形態命名平角。

直角: 平角的一半即直角, 如下面左圖中, 角EOF是一平角, 角1等於角2, 則角1與角2都是直角, 因GO與



EF 正直相交, 故命此名, 直角的兩邊互稱垂線

線, 頂點稱為垂足, 兩邊則有相互垂直的關係。

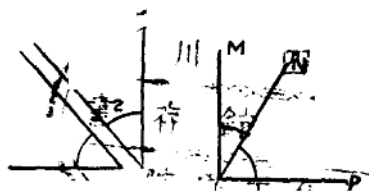
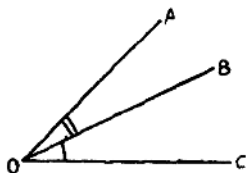
銳角: 小於直角的角為銳角, 如上面右圖, 角CGD即銳角。

鈍角: 小於平角大於直角的角為鈍角, 如上面下圖中角AOB 即鈍角。

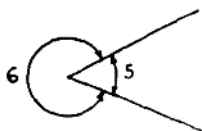
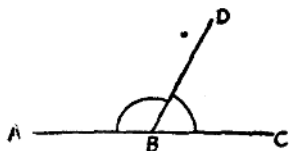
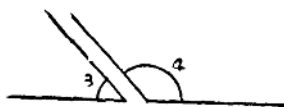
隣角: 兩角有公共的頂點, 又公共一邊, 角內區分別在此公共邊的兩邊, 則此兩角互為隣角, 如下面左圖中角AOB與角BOC就是。分別來說角AOB是角BOC的隣角,

角BOC也是角AOB的隣角。

餘角：兩角的和等於一直角時，則此兩角互為餘角，如下面中圖的角1，與角2，右圖的角MON與其隣角NOP，都是互為餘角。



補角：兩角的和等於一平角時，則此兩角互為補角，

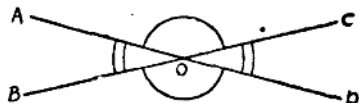


如上面左圖中角3與角4，右圖的角ABD及其隣角DBC，都是互為補角。

共軛角：兩角共頂共邊而角內區相反時，則此兩角為共軛角，如上面右圖角5與角6，其和為兩平角即一周角，角5小於平角，又稱劣角，角6大於一平角又稱優角，通常所說的角，是指劣角而言。

對頂角：兩角共頂，一角的兩邊是他角兩邊通過頂點

的延長線時，則此兩角稱為對頂角，如圖



角AOB的AO邊與BO邊，和角COD的CO邊與DO邊分別成兩相交直線，頂點相當交點，所以又可說相交兩直線，必組成兩對對頂角。

(丁)角的量法：量角的大小，有一種專門的儀器即量角器。這種儀器是半圓形的，它把半圓周分成180等分，每分即一度，要量角AOB的大小，可將量角器的底線，和OA邊相合，並使圓心和角頂相會，然後再看OB邊落在那裏即可在所刻的度數上，念出其度數的近似值來。

習 題 一

(1) 試研究點、線、面、個別移動，所留的痕跡是什麼？根據上面學過的點線面體的定義，證明：“線含有無數的點，面含有無數的線，立體含有無數的面”是否屬實。

(2) 設某銳角為 n° ，它的餘角同補角各為若干度？

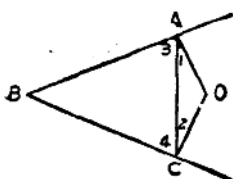
(3) 時針在三點時，兩針成什麼角？六點鐘呢？二點鐘及四點鐘呢？

(4) 試證：⊖兩補角的二等分線互相垂直。⊖兩餘角

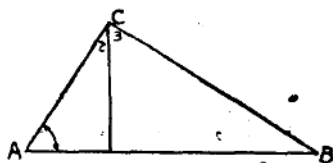
的二等分線組成銳角。

(5) 試用代數式表示銳角和鈍角的意義，直角和平角的關係。

(6) 假使把一個圓分成四等分，則在中心的各角成多少度？六等分或八等分十二等分呢？

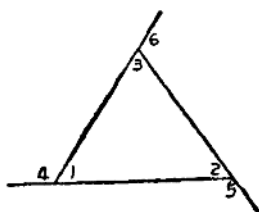


(a 圖)



(b 圖)

(7) 如圖a若 OA 垂直於 AB , OC 垂直於 BC , 而角3等於角4, 試證角1等於角2.



(c 圖)

(8) 若圖b中 BC 垂直於 AC , 角A為角2的餘角, 試證角A等於角3.

(9) 三角形內，是有三個角的，如圖C中的角1，角2，角3，若延長一邊，則與未延長的另一邊組成另一個角，如圖C中的角4，角5，角6，前者稱為三角的內角，後者稱為外角。

⊖何以三內角相等時，三外角也相等。