ZIDONGKONGZHI
LILUN
YITIXIANGJIE

自动控制理论习题详解

姜衍智　朱振青　编

陕西科学技术出版社

自动控制理论
习题详解

姜衍智　朱振青　编

陕西科学技术出版社

内容简介

本书按照高等工科院校“自动控制理论”课程章节排列次序分别选编了拉氏变换、传递函数、方框图变换、瞬态响应、静态准确度、频率响应法、根轨迹法、系统稳定性判别、控制系统的校正、非线性系统、离散系统控制、矩阵运算、状态空间分析法、能控性和能观测性，用Ляпунов定理分析系统的稳定性等十五个方面的典型习题共293题。并介绍了各种实用的解算方法。

本书主要供高等工科院校有关专业学习“自动控制理论”课程的学生作为教学参考书，亦适于一般工程技术人员自学自动控制理论时参考。

自动控制理论习题详解

姜衍智　朱振青　编

陕西科学技术出版社出版

陕西省新华书店发行　西安交通大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张15.5　字数331,000

1981年11月第1版　1981年11月第1次印刷

印数 1—10,000

统一书号：15202·37　定价：1.70元

前　　言

在现代科学技术和工程领域中，自动控制理论和实践日益起着重要的作用。目前在宇宙航行、导弹制导、冶金、化工、电力、机械制造、交通运输以及轻纺工业系统得到广泛的应用，近几年来，在社会科学研究领域中，控制理论也得到应用和推广。

自动控制理论的本身也在不断的发展，它不仅提供了分析动态系统稳定性能的方法和改善系统的动态品质，目前已发展到求取系统控制的最佳方案，并开始研究自适应自学习系统。

为了建设“四个现代化”，我国广大科学工作者和工程技术人员都力求掌握自动控制理论方面的知识，高等工科院校很多专业都开设了“自动控制理论”和“自动控制工程”课程，为了帮助在校学生和以自学为主的工程技术人员学习和掌握自动控制理论知识，我们编写了这本习题解，作为学习参考资料。

书中习题部分取材于国外习题集及有关文献，部分题目是自拟的。题目排列次序按一般教科书章节次序排列。题目的份量，难度都是以本科大学生为本书主要对象拟定的。考虑到读者对现代控制理论较为生疏，因此在这方面的选题比例较大。

书中对每个选题都作出详细解答，为了较全面的介绍在自动控制理论中已有的各种题目的类型和各种有效的解题的方法，已注意到力求避免选取相同类型的题目和采用相同方

法去求解不同的题目。

本书稿承蒙西安交通大学热能教研室、控制系统教研室、西北工业大学403教研室、陕西机械工业学院自动教研室有关同志审阅，并提出宝贵意见，特此致谢。

由于编者个人水平所限，再加上时间较为匆忙，缺点和错误在所难免，恳切地希望广大读者指正。

编　者

一九八一年四月

目　　录

第一章　拉氏变换复习

(一)拉氏变换的定义：

对于函数 $f(t)$，定义 $F(s)$ 是它的拉氏变换

$$F(s)=\int_{0^*}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

这里 $f(t)$ 必须满足以下条件：

(1) 当 $t<0$ 时，有 $f(t)=0$；

(2) 当 $t>0$ 时，$f(t)$ 分段连续；

(3) 当 $t\to\infty$时，$f(t)$ 不比指数项增大得更快。

工程上实际处理的函数都能满足这些条件。

这里要注意：当 $f(t)$ 在 $t=0$处包含一个脉冲函数时，0^* 应从 0^- 算起，其它情况在工程上都从 0^+ 算起。

1-1　已知 $f(t)=Ae^{-at}$　(A，a 是常数)，求 $F(s)$。

［解］　$$F(s)=\int_0^{\infty} Ae^{-at}\cdot e^{-st}dt$$
$$=A\int_0^{\infty} e^{-(a+s)t}dt$$
$$=\frac{A}{s+a}$$

1-2　已知 $f(t)=A\sin\omega t$　(A,ω 是常数)，求$F(s)$。

［解］　$$F(s)=A\int_0^{\infty}(\sin\omega t)\cdot e^{-st}dt$$

因为 $$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$
$$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$$

所以 $$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$$

因此

$$F(s)=\frac{A}{2j}\int_0^\infty(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})e^{-st}dt$$
$$=\frac{A}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]$$
$$=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

1-3 若$\mathscr{L}\{Af(t)\}=AF(s)$成立，试证明

$$\mathscr{L}\{Atf(t)\}=-A\frac{dF(s)}{ds}$$

［证］ 根据拉氏变换定义

$$AF(s)=A\mathscr{L}\{f(t)\}=A\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

对两边求 s 的微分

$$A\frac{dF(s)}{dt}=A\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$
$$=A\int_0^\infty\frac{d}{ds}[e^{-st}f(t)]dt$$
$$=A\int_0^\infty[-te^{-st}f(t)]dt$$
$$=-A\mathscr{L}\{tf(t)\}$$

故 $$\mathscr{L}\{Atf(t)\}=-A\frac{dF(s)}{ds}$$

(二)常用的拉氏变换定理:

1. 线性定理: 若 $g(t)=f_1(t)+f_2(t)$

则 $G(s)=F_1(s)+F_2(s)$

又若 $g(t)=\alpha f(t)$ （α 是实数）

则 $G(s)=\alpha F(s)$

2. 衰减定理: 若 $g(t)=f(t)\cdot e^{-\alpha t}$

则 $G(s)=F(s+\alpha)$

3. 延时定理: 若 $g(t)=f(t-\alpha)\cdot U(t-\alpha)$

则 $G(s)=e^{-\alpha s}F(s)$ （U 是单位函数）

4. 积分定理: 若 $f(t)=\int g(t)dt$

则 $F(s)=\dfrac{G(s)}{s}+\dfrac{f(0)}{s}$

5. 微分定理: 若 $g(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$

则 $G(s)=SF(s)-f(0)$

6. 初值定理: $f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$

7. 终值定理: $f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$

注意终值定理的应用条件是: $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在，且 $sF(s)$ 在复平面右半面（包括虚轴）上没有极点。

例如 $f(t)=\sin\omega t$，因为 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 不存在，且

$sF(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot s$ 在 $s=\pm j\omega$ 处有极点。

应用条件不满足，$f(\infty)$ 不存在。

1-4 求 $f(t)=e^{-at}\sin\omega t$ 的拉氏变换。

[**解**] 设 $g(t)=\sin\omega t$

则 $G(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

根据衰减定理 $F(s)=G(s+\alpha)=\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

1-5 求图 1-1 中各函数的拉氏变换。

[**解**] 应用延时定理

(a) $f(t)=u(t)-u(t-T)$

所以 $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s}e^{-sT}=\dfrac{1}{s}(1-e^{-sT})$

(b) $f(t)=tu(t)-2tu(t-T)+tu(t-2T)$

所以 $F(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s^2}e^{-sT}+\dfrac{1}{s^2}e^{-2sT}$

$$=\frac{1}{s^2}(1-e^{-sT})^2$$

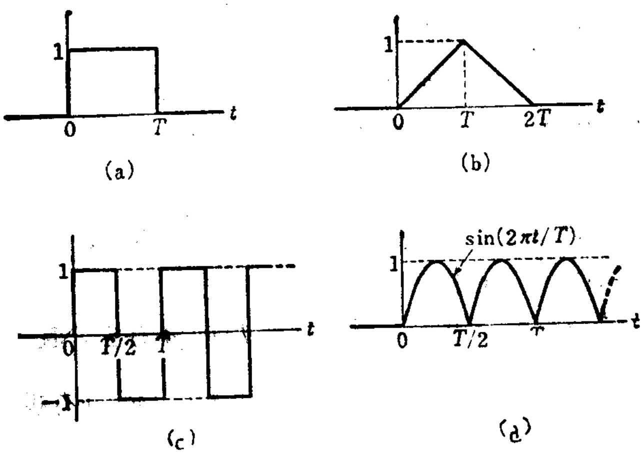

图 1-1 各函数的图形

(c) $$f(t)=u(t)-2u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$+2u(t-T)-2u\left(t-\frac{3T}{2}\right)+\cdots$$

所以 $$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s}e^{-\frac{T}{2}s}+\frac{2}{s}e^{-Ts}-\frac{2}{s}e^{-\frac{3T}{2}s}+\cdots$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{2}{s}\left(e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots\right)$$

$$-\frac{2}{s}e^{-\frac{T}{2}s}\left(1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{2}{s}\cdot\frac{e^{-Ts}}{1-e^{-Ts}}-\frac{2}{s}\cdot\frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{\left(1-e^{-\frac{T}{2}s}\right)^2}{1-e^{-Ts}}$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-\frac{T}{2}s}}{1+e^{-\frac{T}{2}s}}$$

$$=\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{T}{4}s}-e^{-\frac{T}{4}s}}{e^{\frac{T}{4}s}+e^{-\frac{T}{4}s}}=\frac{1}{s}\operatorname{th}\left(\frac{T}{4}s\right)$$

(*d*) 先写出单个正弦图形的函数

$$g(t)=\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\cdot u(t)+\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]\cdot u\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

〔注：上面用到无穷幂级数求和公式

$$1+a+a^2+a^3+\cdots=\frac{1}{1-a}\qquad(a<1)〕$$

所以 $$G(s)=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left[1+e^{-\frac{T}{2}s}\right]$$

再把单个正弦图形都加起来

$$f(t)=g(t)+g\left(t-\frac{T}{2}\right)+g(t-T)+\cdots$$

所以 $$F(s)=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left[1+e^{-\frac{T}{2}s}\right]\cdot$$

$$\left[1+e^{-\frac{T}{2}s}+e^{-Ts}+\cdots\right]$$

$$=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left(1+e^{-\frac{T}{2}s}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}s}}$$

$$=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\cdot\mathrm{cth}\left(\frac{T}{4}s\right)$$

1-6 $f(t)=A\cos\omega t$, 求 $F(s)$。

[解] 应用微分定理

$$\mathscr{L}\{A\cos\omega t\}=\mathscr{L}\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{A}{\omega}\sin\omega t\right]\right\}$$

$$=\frac{A}{\omega}\left[sF(s)-f(0)\right]$$

$$=\frac{A}{\omega}\left[\frac{s\omega}{s^2+\omega^2}-0\right]$$

$$=\frac{As}{s^2+\omega^2}$$

1-7 求下列函数的初值和终值

(a) $\frac{1}{s}$， (b) $\frac{1}{s^2}$； (c) $\frac{K}{s+a}$； (d) $\frac{K}{s(s+a)}$；

(e) $\frac{s+b}{s(s+a)}$； (f) $\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$； (g) $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$。

[解] (a)

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}SF(s)=1$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}SF(s)=1$$

(b)

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^2}=0$$

因为 $SF(s)$ 在原点处有极点，不合应用条件，所以不存在终值。

(c)

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{sK}{s+a}=K$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{sK}{s+a}=0$$

(d)

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{K}{s+a}=0$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s+a}=\frac{K}{a}$$

(e)

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{s+b}{s+a}=1$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s+b}{s+a}=\frac{b}{a}$$

(f)

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(s+1)}{(s+1)^2+1}=1$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}\frac{s(s+1)}{(s+1)^2+1}=0$$

$$(g)\qquad f(0^+)=\lim_{s\to\infty}\frac{s\omega}{s^2+\omega^2}=0$$

因为 $sF(s)$ 在虚轴上有极点，不合应用条件，所以不存在终值。

（三）拉氏反变换

定义： $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$

按此定义不便于工程应用。一般 $F(s)$ 是 s 的有理代数分式，可将它分成部分分式，然后查表逐项求出原函数，最后得出反变换式。

分为部分分式的方法很多，下面分述之。实用时选用方便的方法。

1-8　已知　$F(s)=\frac{3s^2+2s+8}{s(s+2)(s^2+2s+4)}$ 求反变换。

（$F(s)$ 没有重极点的情况）

［解］　分母已因式分解，因 s^2+2s+4 不满足 $b^2-4ac\geqslant0$ 的条件，已不能再分解为实因式。

命　$$\frac{3s^2+2s+8}{s(s+2)(s^2+2s+4)}=\frac{C}{s}+\frac{D}{s+2}+\frac{As+B}{s^2+2s+4}$$

两端同乘以 s，令 $s=0$，可得 $C=1$；

两端同乘以 $s+2$，令 $s=-2$，可得 $D=-2$；

将 C、D 代入上式，变化如下：

$$\frac{3s^2+2s+8}{s(s+2)(s^2+2s+4)}=\frac{1}{s}-\frac{2}{s+2}+\frac{As+B}{s^2+2s+4}$$

$$=\frac{(s+2)(s^2+2s+4)-2s(s^2+2s+4)+(As+B)\cdot s(s+2)}{s(s+2)(s^2+2s+4)}$$

$$=\frac{(A-1)s^3+(2A+B)s^2+2Bs+8}{s(s+2)(s^2+2s+4)}$$

比较两端分子各项系数，应有

$$0=A-1\,; \qquad 3=2A+B\,; \qquad 2=2B$$

解得 $\qquad A=1, \quad B=1$

因此部分分式为 $\quad F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{s+1}{s^2+2s+4}$

查拉氏变换表，可得原函数：第一项为 $u(t)$；第 2 项为 $-2e^{-2t}$；第 3 项为 $e^{-t}\cos\sqrt{3}\,t$

所以 $\quad f(t)=1-2e^{-2t}+e^{-t}\cos\sqrt{3}\,t$

1-9 已知 $\quad F(s)=\dfrac{s^2+2s+6}{(s+1)^3}$ 求反变换

（$F(s)$ 有重极点的情况）

［**解**］ 这时部分分式应有如下形式

$$\frac{s^2+2s+6}{(s+1)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}$$

两端同乘 $(s+1)^3$，令 $s=-1$，可得 $C=5$

将 C 代入上式，变化如下：

$$\frac{s^2+2s+6}{(s+1)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{5}{(s+1)^3}$$

$$=\frac{A(s+1)^2+B(s+1)+5}{(s+1)^3}$$

$$=\frac{As^2+(2A+B)s+(A+B+5)}{(s+1)^3}$$

比较两端分子各项系数，应有

$$1=A;\qquad 2=2A+B;\qquad 6=A+B+5$$

解得 $\qquad A=1,\qquad B=0$

所以部分分式为

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{5}{(s+1)^3}$$

$$=\frac{1}{s+1}+\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^3}$$

查拉氏变换表，可得原函数第 1 项为 e^{-t}；

第 2 项为 $\frac{5}{2}t^2e^{-t}$

因此 $\qquad f(t)=e^{-t}+2.5t^2e^{-t}$

——有时用求留数的方法会简便些：

无重根的情况，部分分式的型式如下

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{C_1}{s+s_1}+\cdots+\frac{C_i}{s+s_i}+\cdots+\frac{C_n}{s+s_n}$$

这里 C_i 为待定系数，称为 $F(s)$ 在极点 s_i 处的留数，它可按下式计算：

$$C_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)\cdot F(s)$$

或

$$C_i=\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=s_i}$$

1-10 求 $\qquad f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4s^2-40s-100}{s^3-25s}\right]$

[解] 显然 $A(s)=s^3-25s$ 的根为 $s_1=0$； $s_2=5$；$s_3=-5$。

又 $A'(s)=3s^2-25$

所以 $$C_1=\left.\frac{4s^2-40s-100}{3s^2-25}\right|_{s=0}=4$$

$$C_2=\left.\frac{4s^2-40s-100}{3s^2-25}\right|_{s=5}=-4$$

$$C_3=\left.\frac{4s^2-40s-100}{3s^2-25}\right|_{s=-5}=4$$

因此 $$F(s)=\frac{4}{s}-\frac{4}{s-5}+\frac{4}{s+5}$$

故 $$f(t)=4-4e^{5t}+4e^{-5t}$$

结果表明无重根情况下总可以表示为若干指数项之和，有人则直接写出，并称之为展开定理：

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=s_i}e^{s_it}$$

——有重根的情况、部分分式型式如下：（r 重根）

$$F(s)=\frac{C_r}{(s-s_1)^r}+\frac{C_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+$$

$$\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_{r+1}}{s-s_{r+1}}+\cdots+\frac{C_n}{s-s_n}$$

非重极点部分的系数仍按上述公式计算，重极点部分的系数 C_r，C_{r-1}，…，C_1 按下式计算：

$$C_r=\lim_{s\to s_1}(s-s_1)^rF(s)$$

$$C_{r-1}=\lim_{s\to s_1}\frac{d}{ds}[(s-s_1)^rF(s)]$$

…………

$$C_{r-j}=\frac{1}{j!}\lim_{s\to s_1}\frac{d^j}{ds^j}[(s-s_1)^rF(s)]$$

…………

$$C_1=\frac{1}{(r-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[(s-s_1)^rF(s)]$$