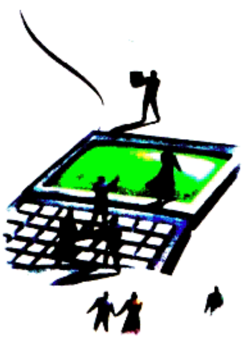
高考题题高分丛书

高考数学

《丛书》总策划：江夏 肖毅 余健棠

填空题题题高分

数学科目主编：刘佛清 梁法驯
本　　书主编：梁法驯 刘佛清



· 汇集近十年高考试题及答案
· 提供一批高考仿真试题供实战演练
· 分析试题点明获取高分的思路与技法
· 适用于“3+X”、“3+2” 模式

3+

中南大学出版社

TITIGAOFEN

高考题题高分丛书

高考数学填空题题题高分

本书主编：梁法驯　刘佛清

数学科目主编：刘佛清　梁法驯

丛书总策划：江　夏　肖　毅　余健棠

中南大学出版社

内 容 提 要

本书内容由两部分组成，第一部分，试题展示分析，汇集了1991～2001年普通高等学校招生全国统一考试的填空题，按现行课本顺次分类，共13章，为了便于单元复习和测试训练，试题的安排基本上与教材同步，每道题都给出了解答过程，并将试题与解答过程分开编写；第二部分，汇编了39套仿真填空试题，先展示后解答，安排了两套完整的2002年高考模拟试卷并提供详细的解答。

本书适合全国高考"3＋X"、"3＋2"模式，适用于全国高中统编版、实验版教材，是高三学生在三轮复习中的备考必备书，也可供高二学生作超前复习参考。

高考数学填空题题题赢分

本书主编　梁法驯　刘佛清

□责任编辑　刘辉　李立鹏
□策划编辑　刘辉
□出版发行　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　邮编：410083
发行科电话：0731-8876770　传真：0731-8829482
电子邮件：csucbs @ public.cs.hn.cn
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　湖南望城湘江印刷厂

□开　　本　787×1092 1/16　□印张　6.5　□字数　210千字
□版　　次　2001年8月第1版　□2001年8月第1次印刷
□印　　数　00001—13000
□书　　号　ISBN 7-81061-428-2/G·100
□定　　价　8.00元

《丛书》总序

为了适应“3+X”、“3+2”高考改革的需要，为了给高中学生提供一套科学的、贴近高考实战的复习资料，我们特组织湖北省武汉、黄冈、荆州市的一批高中的特级教师和对高考规律及高考试题解题方法有深入研究的教授、专家共同编撰《高考题题高分丛书》。

我们认为，一套科学的贴近高考实战的复习资料应具五个条件：

第一、必须对近几年的高考试题有所介绍、有所归纳并有中肯的分析。借鉴、了解近几年的考试题目，从中分析出避免错误、获得高分的题解思路、方法与技巧，这对于今天考生提高应试能力具有很大的作用。

第二、必须有覆盖面很广的复习测试题或模拟题。所设计的复习测试题或模拟题应有与历届各科高考试题相对应的较广的覆盖面。

第三、必须有相应的承前性与预测性。承前性是指在制作复习自测题或模似题时要使高考试卷的结构形式保持相对的完整性。预测性是指对未来高考检验知识的方式、形式应有预测，并根据预测精心制作复习测试题或模拟题，使考生在演练中获得较大的效益。

第四、必须给予复习者以仿真的考时练。也就是说，复习测试题或模拟题在份量、标准、时间等方面都应与高考试卷的要求一样，使演习的考生都有仿真的实战感受。

第五、必须教给考生避免错误与获取高分的方法。无论是历届高考试题还是自测题、模拟题，都应仔细分析，使考生熟练地掌握避免错误、获取高分的方法，且这种方法应该是简单明确、易于掌握的。

《高考题题高分丛书》正是体现了以上五条标准。这套丛书首批书是与语文、数学、英语高考试卷中的试题题型相对应，每类题型编撰一种书(共十二种)。

语文科目由江夏、肖毅教授主编，共四种书：《高考语文作文题题高分》、《高考语文文言文题题高分》、《高考语文现代文题题高分》、《高考语文综合题题题高分》。

数学科目由刘佛清特级教师、梁法驯教授主编。共三种书：《高考数学选择题题题高分》、《高考数学填空题题题高分》、《高考数学解答题题题高分》。

英语科目由张冰梅特级教师主编。共五种书：《高考英语单项填空题题高分》、《高考英语完形填空题题高分》、《高考英语阅读理解题题高分》、《高考英语短文改错、书面表达题题高分》、《高考英语听力题题高分》。

这套丛书中，每本书都有两部分内容：第一部分是将近十年高考试卷中同类的试题汇集在一起，并根据高考评分标准对近几年的试题进行分析，传授考生获得高分的良策；同时将前几年的试题展示在书中，供考生演练。第二部分是根据国家新的《教学大纲》和《考试说明》及“3+X”、“3+2”高考命题的趋势，参照高考该类型试题的实战时间、份量、标准，提供一批仿真试题，供考生作“考时练”，帮助考生进一步掌握获得高分的解题思路和方法。同时，每本书都附录有两套“高考语文(或数学、或英语)模拟试卷”(全卷)，供考生全面测试自己应考的能力。

在策划和编撰这套《丛书》的过程中，得到黄冈市、荆州市及武汉大学附属中学、华中科技大学附属中学、湖南师范大学附属中学等一批特级教师和高级教师的支持，同时得到了张元忠教授、刘其寿校长的支持。在此，对他们表示最衷心的感谢！

中南大学出版社、新疆大学出版社社领导、有关编辑在这套《丛书》的策划、组稿、质量把关等方面做了大量的有效的工作，武汉诺亚信息传播有限责任公司对《丛书》的编撰出版给予全力的支持，在此一并表示诚挚的谢意！

《丛书》总策划：江夏　肖毅　余健棠

前　言

高考数学选拔的特点是以解题能力的高低为标准，而考生是以解题的速度和解题的正确率来表现能力的强弱．高考复习要以解题为中心，巩固“三基”，提高解题能力为目的．为了配合高考复习解题训练，我们编写了这套《高考数学题题高分丛书》．本书《高考数学填空题题题高分》就是这套丛书的三种书目之一．

目前高考数学试卷由选择题、填空题和解答题三类题目组成，其中选择题占全卷150分的40%，即60分，题量12个，填空题占全卷总分的10.7%，即16分，题量为4个，解答题包括计算题、证明题、讨论题和应用题等，占全卷总分的49.3%，即74分．

试卷合成后，分为Ⅰ卷和Ⅱ卷，其中Ⅰ卷为选择题，Ⅱ卷为非选择题，全卷答题时间为120分钟．

本书包括两部分：第一部分，试题展示分析，汇编1991～2001年普通高等学校招生全国统一考试的填空题，按现行课本顺序分为13章，为了便于单元复习和测试训练，试题的安排基本上与教材同步，每道题都给出解答过程，并将试题与解答过程分开编写；第二部分，模拟仿真，汇编了39套仿真填空题，先展示后解答，然后安排了2套完整的2002年高考模拟试卷及其解答．

本书由梁法驯教授和特级教师刘佛清主编，参加编写人员有王圣中、王先东、郑家鲸，贺斌、伊彦波、马锐雄、陶伟宏、陈坚球．

编　者

2001年8月于武汉

目　录

第一部分　展示分析

第二部分　模拟仿真

第一部分　试题展示分析

壹 代数篇

一、幂函数、指数函数和对数函数

考试内容和考试要求

(1) 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念. 了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些简单的集合.

(2) 了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系.

(3) 理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

(4) 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

试题展示

1. 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，共 n 个数据. 我们规定所测量物理量的"最佳近似值"a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小，依此规定，从 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 推出的 $a =$ ______.

2. 设 $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$，则 $f^{-1}(0) =$ ______.

3. 方程 $\log_2(x+1)^2 + \log_4(x+1) = 5$ 的解是______.

解答分析

1. [1994 年，理，第二(20)题]

答　$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

解　设 a 与各数据的差的平方和为 y，那么有

$$y = (a - a_1)^2 + (a - a_2)^2 + \cdots + (a - a_n)^2$$

$$= na^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)a + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

$$n = \left(a - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n},$$

$\therefore$ 当 $a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 时，y 值最小.

注　本题考查二次函数最值问题与建立数学模型解决实际问题的能力. 本题求最佳近值 a 的方法，称为最小二乘法.

2. [1992 年，文，理，第二(23)题]

答　1.

解法 1　设 $y = 4^x - 2^{x+1}$，则 $y = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x + 1 - 1$，$\therefore (2^x - 1)^2 = y + 1$.

若 $x \geqslant 0$，则 $x = \log_2(1 + \sqrt{y+1})$，$\therefore f^{-1}(x) = \log_2(1 + \sqrt{x+1})(x \geqslant -1)$，

$\therefore f^{-1}(0) = \log_2(1 + \sqrt{1}) = 1$.

解法 2 ∵ 要求 $f^{-1}(0)$ 的值，∴ 令 $4^x-2^{x+1}=0$，即 $(2^x)^2-2\cdot 2^x=0$，解得 $2^x=0$（舍去），或 $2^x=2$，故 $x=1$. 于是 $f^{-1}(0)=1$.

注 此题中的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数，所以命题有失严谨. 为使问题可解应增设条件 $x\in[0,+\infty)$ 或 $x\in(-\infty,0]$，上述解法中是按 $x\in[0,+\infty)$ 求解的. 解法 2 绕过了 $f^{-1}(x)$ 的过程.

3. [1995 年，文，第二(16) 题]

答 $x=3$.

解 原方程可化为

$$2\log_2(x+1)+\frac{1}{2}\log_2(x+1)=5, \therefore \log_2(x+1)=2, \therefore x+1=4, \text{解得 } x=3.$$

经检验，$x=3$ 是原方程的解.

本题考查对数方程的解法. 解对数方程应注意验根.

二、三角函数

考试内容和考试要求

(1) 理解弧度的意义，并能正确地进行弧度和角度的换算.

(2) 掌握任意角的三角函数的定义、三角函数的符号、三角函数的性质、同角三角函数的关系式与诱导公式，了解周期函数和最小正周期的意义. 会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期，或者经过简单的恒等变形可化为上述函数的三角函数的周期. 能运用上述三角公式化简三角函数式、求任意角的三角函数值与证明较简单的三角恒等式.

(3) 了解正弦、余弦、正切、余切函数的图象的画法，会用“五点法”画正弦、余弦函数和函数 $y=A\sin(\omega x'+\varphi)$ 的简图，并能解决与正弦曲线有关的实际问题.

试题展示

1. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\cot\theta$ 的值是______.

2. 关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，有下列命题：

① $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

② $y=f(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数；

③ $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称；

④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是______.（注：把你认为正确的命题的序号都填上.）

3. 关于函数 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$，有下列命题：

① 由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍；

② $y=f(x)$ 的表达式可改写为 $y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$；

③ $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称；

④ $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称.

其中正确的命题的序号是______.（注：把你认为正确的命题的序号都填上.）

解答分析

1. ［1994年，理，第二(18)题］

答 $-\frac{3}{4}$.

解法1 $\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}<0$，

$\because \theta\in(0,\pi)$，$\therefore \sin\theta>0,\cos\theta<0,\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

则 $\sin\theta,\cos\theta$ 是二次方程 $x^2-\frac{1}{5}x-\frac{12}{25}=0$ 的两实数根，解得 $\cos\theta=-\frac{3}{5},\sin\theta=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cot\theta=-\frac{3}{4}$.

解法2 $\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，两边平方得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}<0$，

$\because \theta\in(0,\pi)$，$\therefore \sin\theta>0,\cos\theta<0$.

又 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$，$\because \sin\theta-\cos\theta>0$，

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$.

由 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5},\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5},\end{cases}$ 得 $\sin\theta=\frac{4}{5},\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\therefore \cot\theta=-\frac{3}{4}$.

解法3 设 $\tan\frac{\theta}{2}=t$，由万能公式得 $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2},\cos\theta\frac{1-t^2}{1+t^2}$，由题设 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，

$\therefore \frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{5}$.

整理得 $3t^2-5t-2=0$，则 $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1-t^2}{2t}=-\frac{3}{4}$. **解得** $t_1=-\frac{1}{3},t_2=2$.

$\because \theta\in(0,\pi)$，$\therefore \frac{\theta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore t>0$，$\therefore t=2$.

解法4 $\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，两边平方得 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{25}$，

$\therefore 25\sin^2\theta+50\sin\theta\cos\theta+25\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta$，

整理得 $12\cos^2\theta+25\sin\theta\cos\theta+12\sin^2\theta=0$， ①

$\because \theta\in(0,\pi)$，$\therefore \sin\theta>0$，

① 式两边同除以 $\sin^2\theta$ 得 $12\cot^2\theta+25\cot\theta+12=0$， 得 $\cot\theta=-\frac{3}{4}$ 或 $\cot\theta=-\frac{4}{3}$.

又由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}>0$，$\therefore \sin\theta>-\cos\theta$，$\because \sin\theta>0$，$\therefore -\cot\theta<1$，$\therefore \cot\theta>-1$，$\therefore \cot\theta=-\frac{3}{4}$.

本题考查三角函数的基本关系式与三角函数的求值，同时考查逻辑思维能力和运算能力，属推理计算题.

2. ［1998年，文，第二(19)题］

答 ①，③.

解 $\because 4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore$ ① 正确；

$\because T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，$y=f(x)$ 的最小正周期是 π，② 不正确.

$\because f\left(-\frac{\pi}{3}-x_1\right)=4\sin\left(-\frac{\pi}{3}-2x_1\right)=-f(x_1)$，$\therefore$ ③ 正确，④ 不正确.

本题的解也可以通过观察函数 $y=f(x)$ 的图象得到.

3. [1998 年,理,第三(19)题]

答 ②,③.

解 可先画出 $y=f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的草图,利用图象可知命题 ①、④ 不正确. 命题 ③ 正确.

又 $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.
所以命题 ② 正确. 正确命题的序号是 ②,③.

三、两角和与差的三角函数

考试内容和考试要求

(1) 能推导并掌握两角和、两角差、二倍角与半角的正弦、余弦、正切公式,以及三角函数的积化和差与和差化积等公式.

(2) 能正确地运用上述公式化简三角函数式、求某些角的三角函数值、证明较简单的三角恒等式以及解决一些简单的实际问题.

试题展示

1. $\frac{\sin7^\circ+\cos15^\circ\sin8^\circ}{\cos7^\circ-\sin15^\circ\sin8^\circ}$ 的值为________.

2. $\tan\frac{\pi}{8}=$________.

3. $\tan20^\circ+\tan40^\circ+\sqrt{3}\tan20^\circ\cdot\tan40^\circ$ 的值是________.

4. 函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos x$ 的最小值是________.

5. 函数 $y=\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值是________.

解答分析

1. [1997 年,文,第二(18)题]

答 $2-\sqrt{3}$.

解 原式 $=\dfrac{\sin7^\circ+\frac{1}{2}[\sin23^\circ-\sin7^\circ]}{\cos7^\circ-\frac{1}{2}[\cos7^\circ-\cos23^\circ]}=\dfrac{\sin23^\circ+\sin7^\circ}{\cos7^\circ+\cos23^\circ}$

$$=\frac{2\sin15^\circ\cos8^\circ}{2\cos15^\circ\cos8^\circ}=\tan15^\circ=2-\sqrt{3}.$$

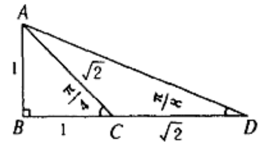
2. [1992 年,文,第二(18)题]

答 $\sqrt{2}-1$.

解法 1 $\tan\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1.$

解法 2 由如图 Rt$\triangle ABD$ 可知

$$\tan D=\tan\frac{\pi}{8}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$



（第 2 题图）

解法 3 $\because \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$,

$\therefore \tan^2\dfrac{\pi}{8}+2\tan\dfrac{\pi}{8}-1=0$, $\tan\dfrac{\pi}{8}=-(1+\sqrt{2})$（舍去），

或 $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

3. [1996 年，理，文，第二(18)题]

答 $\sqrt{3}$.

解法 1 原式 $=\tan(20°+40°)(1-\tan20°\tan40°)+\sqrt{3}\tan20°\tan40°$

$=\tan60°(1-\tan20°\tan40°)+\sqrt{3}\tan20°\tan40°=\sqrt{3}$.

解法 2 原式 $=\tan20°(1+\sqrt{3}\tan40°)+\tan40°=\tan20°\cdot\dfrac{\tan60°-\tan40°}{\tan20°}+\tan40°$

$=\tan60°=\sqrt{3}$.

本题主要考查公式 $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ 的灵活运用及特殊角的三角函数值.

4. [1995 年，理，第二(18)题]

答 $-\dfrac{3}{4}$.

解 $\because y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos x=\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\sin\dfrac{\pi}{6}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{4}$.

当 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ 时，函数 y 取最小值，

$\therefore \quad y_{\min}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4}$.

5. [1995 年，文，第二(18)题]

答 $\sqrt{3}$.

解 $\because y=\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=\sqrt{3}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

当 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ 时，函数 y 取最大值，

$\therefore \quad y_{\max}=\sqrt{3}$.

四、反三角函数和简单三角方程

考试内容和考试要求

(1) 理解反三角函数的概念，能由反三角函数的图象得出反三角函数的性质，能运用反三角函数的定义、性质解决一些简单问题.

(2) 能够熟练地写出最简单的三角方程的解集，并会解简单的三角方程.

试题展示

1. $\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{2}$ 的值是________.

2. $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)=$ ________.

解答分析

1. [1991 年,理,第二(16) 题]

答 $\frac{\pi}{4}$.

解法 1 利用三角变换.

设 $\arctan\frac{1}{3}=\alpha$,$\arctan\frac{1}{2}=\beta$,则 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$,$\tan\beta=\frac{1}{2}$,且 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$,$0<\beta<\frac{\pi}{4}$.

设 $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}=\gamma$,则 $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$.

而
$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1,\ \therefore\ \gamma=\frac{\pi}{4}.$$

即 $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$.

解法 2 利用反三角变换.

因 $\tan\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\tan\arctan\frac{1}{3}\right)+\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)}{1-\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1.$

$\therefore$
$$\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{2}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

$\left(\text{这是因为 } 0<\arctan\frac{1}{3}<\arctan\frac{1}{2}<\pi\right)$

2. [1993 年,理,第二(18) 题]

答 $\frac{1}{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$.

解 设 $\arccos\frac{1}{2}=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

设 $\arccos\frac{1}{3}=\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\cos\beta=\frac{1}{3}$,$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故 原式 $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{6}(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$.

五、不等式

考试内容和考试要求

(1) 掌握不等式的性质及其证明,掌握证明不等式的几种常用方法,掌握两个(或三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数这一定理,并能运用上述性质、定理和方法解决一些问题.

(2) 在熟练掌握一元一次不等式(组)、一元二次不等式的解法的基础上初步掌握其他的一些简单的不等式的解法.

(3) 会用不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 解一些简单问题.

试题展示

1. 若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$,则 ab 的取值范围是________.

2. 建造一个容积为 $8m^3$,深为 2m 的长方体无盖水池.如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,那么水池的最低总造价为______.

3. 不等式 $6^{x^2+x-2}<1$ 的解集是________.

4. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8}>3^{-2x}$ 的解集是________.

解答分析

1. [1999 年,文,理,第二(17)题]

答 $[9,+\infty)$.

解法 1 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$.

$$(\sqrt{ab}-1)^2\geqslant 4.$$

解得 $\sqrt{ab}\geqslant 3$,或 $\sqrt{ab}\leqslant -1$(舍去).

$\therefore ab\geqslant 9$(当且仅当 $a=b=3$ 时,取等号).

解法 2 $(ab)^2-6ab+9=a^2+b^2+2ab\geqslant 4ab$.

即 $(ab)^2-10ab+9\geqslant 0$

$$(ab-1)(ab-9)\geqslant 0$$

解得 $ab\geqslant 9$, $ab\leqslant 1$(舍去,因 $ab=a+b+3>3$).

2. [1993 年,文,理,第二(22)题]

答 1760.

解 设池底一边长为 x 米,水池的总造价为 y 元,则依题意得

$$y=4\times 120+2\left(2x+2\cdot\frac{4}{x}\right)\cdot 80=480+320\left(x+\frac{4}{x}\right)(x>0)$$

由平均值不等式得 $x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$.当且仅当 $x=\frac{4}{x}$,即 $x=2$ 时等号成立.

故 $y_{最小}=480+320\times 4=1760$(元).

此题也可用判别法等方法来求其最小值,但还是不如上述方法快捷.

3. [1991 年,第二(17)题]

答 $\{x|-2<x<1\}$.

解法 1 利用单调性求解.

因 $6^{x^2+x-2}<6^0$,且 $6>1$,则 $a^x(a>1)$ 是单调递增,故 $x^2+x-2<0$, $\therefore -2<x<1$.

故原不等式的解集为 $\{x|-2<x<1\}$.

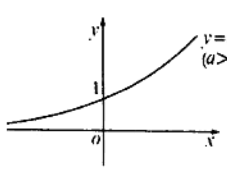
解法 2 数列结合.由图象知

$$x^2+x-2<0,$$

则 $-2<x<1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为

$$\{x|-2<x<1\}.$$



(第 3 题图)

解法 3 取对数求解.

两边同取以 6 为底的对数(因 $6>1$,故不等号方向不变)得

$$\log_6 6^{x^2+x-2}>\log_6 1=0.$$

$\therefore x^2+x-2<0$, $\therefore -2<x<1$.

即原不等式的解集为 $\{x|-2<x<1\}$.

4.[1995 年,理,第二(16)题]

答 $\{x \mid -2 < x < 4\}$.

解法1 原不等式化为$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$,因$0 < \frac{1}{3} < 1$,所以不等式同解于

$x^2 - 8 < 2x$,即 $(x+2)(x-4) < 0$.

$\therefore -2 < x < 4$,解集为$\{x \mid -2 < x < 4\}$.

解法2 $\because 3^{2x} > 0$恒成立,

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8} \cdot 3^{2x} > 1$,即$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-8} > 1$.

$\therefore x^2 - 2x - 8 < 0$,解得$-2 < x < 4$,$\therefore$ 原不等式解集为$\{x \mid -2 < x < 4\}$.

本题考查解指数不等式.本题涉及到的知识点主要是:指数运算法则,指数函数的单调性,解一元二次不等式.

六、数列、极限、数学归纳法

考试内容和考试要求

(1) 理解数列的有关概念,了解递推公式是给出数列的一种方法,并能根据递推公式写出数列的前几项.

(2) 掌握等差数列与等比数列的概念、通项公式、前n项和的公式,并能够运用这些知识解决一些问题.

(3) 了解数列极限的意义,掌握极限的四则运算法则,会求公比的绝对值小于1的无穷等比数列前n项的极限.

(4) 了解数学归纳法的原理,并能用数学归纳法证明一些简单问题.

试题展示

1. 设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列,S_n是它的前n项和.若$\{S_n\}$是等差数列,则$q =$ ________.

2. 设$\{a_n\}$是首项为1的正项数列,且$(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0(n = 1,2,3,\cdots)$,则它的通项公式是$a_n =$ ________.

3. 设$a > 1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1+a^{n-1}} =$ ________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right] =$ ________.

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d > 0$,首项$a_1 > 0$,$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i a_{i+1}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n =$ ________.

解答分析

1.[2001 年,理,文,第二(15)题]

答 1.

解 $\{a_n\}:a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$ $\{S_n\}:a,a(1+q),a(1+q+q^2),\cdots$

因为$\{S_n\}$为等差数列, 即

$$a(1+q) - a = a(1+q+q^2) - a(1+q),$$
$$q = q^2,$$

解之得 $q=1, q=0$(舍去).

故公比 $q=1$.

2. [2000 年,理,第二(15)题]

答 $\frac{1}{n}$.

解法 1 所给等式为一齐次式,故等式两边同除以 a_n^2,得

$(n+1)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2+\frac{a_{n+1}}{a_n}-n=0$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1$(舍). 这样可以求出 a_{n+1} 与 a_n 的直接关系式

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$. 此后类似于等比数列的定义及通项公式的求法,可得

$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$ 即为所求的通项公式.

解法 2 由已知得 $n(a_{n+1}{}^2-a_n^2)+a_{n+1}(a_{n+1}+a_n)=0$

$$(a_{n+1}+a_n)[(n+1)a_{n+1}-na_n]=0,$$

由已知得 $a_n>0 \Rightarrow (n+1)a_{n+1}=na_n$, 以下同解法 1.

本题同时考查了运用方程的观点和类比的思想解决问题的能力,充分体现了知识的迁移能力.

3. [1993 年,文,第二(18)题]

答 $-a^2$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{a^{n-1}}-a^2}{\frac{1}{a^{n-1}}+1}=\dfrac{0-a^2}{0+1}=-a^2$.

4. [1992 年,理,文,第二(21)题]

答 $\frac{1}{3}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]\frac{1}{3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3_{n+1}}\right)=\frac{1}{3}$.

5. [1993 年,理,第二(24)题]

答 $\frac{1}{a_1d}$.

解 $\because S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\right]=\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right]$.

又 $a_1>0, d>0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a_1d}$.

七、复　　数

考试内容和考试要求

(1) 理解复数及其有关的概念. 掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换.

(2) 掌握复数的运算法则,能正确地进行复数的运算,并理解复数运算的几何意义.

(3) 掌握在复数集中解一元二次方程和二项方程的方法.

无填空题展示

八、排列、组合、二项式定理

考试内容和考试要求

(1) 掌握加法原理及乘法原理，并能用这两个原理分析和解决一些简单的问题.

(2) 理解排列、组合的意义，掌握排列数、组合数的计算公式和组合数的性质，并能用它们解决一些简单的问题.

(3) 掌握二项式定理和二项式系数的性质，并能用它们计算和论证一些简单问题.

试题展示

1. 圆周上有 $2n$ 个等分点($n > 1$)，以其中三个点为顶点的直角三角形的个数为________.

2. 在一块并排10垄的田地中，选择2垄分别种植 A、B 两种作物，每种作物种植一垄. 为有利于作物生长，要求 A、B 两种作物的间隔不小于6垄，则不同的选垄方法共有________种(用数字作答).

3. 从1,2,…,10这十个数中取了四个数，使它们的和为奇数，共有________种取法(用数字作答).

4. 正六边形的中心和顶点共7个点，以其中3个顶点的三角形共有________个(用数字作答).

5. 乒乓球队的10名队员中有3名主力队员，派5名参加比赛. 3名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余7名队员选2名安排在第二、四位置. 那么不同的出场安排共有________种(用数字作答).

6. 四个不同的小球放入编号1,2,3,4的四个盒中，则恰有一个空盒的放法共有________种(用数字作答).

7. 在50件产品中有40件是次品，从中任意抽出5件，至少有3件是次品的抽法共________种(用数字作答).

8. $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^{10}$ 的二项展开式中 x^3 的系数为________.

9. 在 $(3-x)^7$ 的展开式中，x^5 的系数是________(用数字作答).

10. 已知 $\left(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数为 $\frac{9}{4}$，常数 a 的值为________.

11. 在 $(ax+1)^7$ 的展开式中，x^3 的系数是 x^2 的系数与 x^4 的系数的等在中项，若实数 $a>1$，那么 $a=$________.

12. $(x+2)^{10}(x^2-1)$ 的展开式中，x^{10} 的系数为________(用数字作答).

13. 91^{92} 除以100的余数是________.

解答分析

1. [2001年，理，文，第二(16)题]

答 $2n(n-1)$ 个.

解 圆周上的 $2n(n>1)$ 个等分点可以作 n 条不同的直径，使每条直径的两个端点恰好是这 $2n$ 个点中的两个点.

又对应一条直径的两个端点与圆周上余下的 $2n-2=2(n-1)$ 个点可组成 $2(n-1)$ 个直角三角形因此有一条直径就对应 $2(n-1)$ 个直角三角形. 现有 n 条不同直径. 故有 $2(n-1)\cdot n=2n(n-1)$ 个直角三角形.

2. [1999年，文，理，第二(16)题]

答 12.

解 不妨将10垄地按顺序编号.

若选用了1号地，则另一垄只能是8号、9号、10号，有3种选择；若选用了2号地，有2种选择；若选用