经济应用数学

第三册

（第二版）

中等财经学校教材

□ 李冠云　何屏生 / 主编

中国财政经济出版社

中等财经学校教材

经济应用数学（第二版）

第三册

李冠云　何屏生　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学　第3册/李冠云，何屏生主编．-2版．-北京：中国财政经济出版社，1999.1
中等财经学校教材
ISBN 7-5005-4084-1

Ⅰ．经…　Ⅱ．①李…②何…　Ⅲ．经济数学-专业学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第02673号

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www.cfeph.com
E-mail：cfeph@drc.gov.cn

社址：北京东城大佛寺东街8号　邮政编码：100010
发行处电话：64033095　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
850×1168毫米　32开　5.875印张　138 000字
1999年7月第1版　1999年7月北京第1次印刷
印数：1—15 000　定价：8.00元
ISBN 7-5005-4084-1/F・3711
（图书出现印装问题，本社负责调换）

目　录

第九章　极限与连续……………………………………（1）

§9-1　初等函数 ……………………………………（1）

§9-2　函数的极限 …………………………………（5）

§9-3　无穷小量与无穷大量 ………………………（12）

§9-4　极限的四则运算法则 ………………………（16）

§9-5　两个重要极限 ………………………………（23）

§9-6　函数的连续性 ………………………………（32）

第十章　导数与微分……………………………………（47）

§10-1　导数 ………………………………………（47）

§10-2　导数的基本公式及四则运算法则 …………（57）

§10-3　复合函数的导数 …………………………（65）

§10-4　隐函数的导数 ……………………………（69）

§10-5　二阶导数 …………………………………（75）

*§10-6　罗比达法则 ………………………………（76）

§10-7　函数的极值与最值 ………………………（82）

§10-8　目标函数的优化分析与经济决策 …………（96）

§10-9　函数的微分 ………………………………（102）

*§10-10　函数的弹性 ……………………………（110）

*第十一章　不定积分…………………………………（118）

§11-1　不定积分的概念 …………………………（118）

§11-2　积分的基本公式、法则及直接积分法 ………（123）

§11-3　换元积分法……………………………………（130）
§11-4　分部积分法……………………………………（137）
§11-5　积分表的使用…………………………………（142）
*第十二章　定积分……………………………………（147）
§12-1　定积分的概念…………………………………（147）
§12-2　定积分的计算…………………………………（153）
*§12-3　无限区间上的积分…………………………（162）
§12-4　定积分在经济分析中的运用………………（165）
附录　简单积分表……………………………………（176）

第九章　极限与连续

函数是微积分研究的主要对象，微积分在研究函数时，采用的方法就是极限，微积分的许多概念都是建立在极限概念的基础上．因此极限理论是微积分的一个最基本、最重要的概念．

本章在介绍初等函数以后，将给出极限的描述性定义，并讨论极限的计算以及函数的连续性．

§9-1　初等函数

一、基本初等函数

在实际问题的研究中，所遇到的函数关系是多种多样的，其中应用最广泛的是我们已熟悉的下列六种函数：

1. 常数函数　$y=C$（C 为常数）；
2. 幂函数　$y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）；
3. 指数函数　$y=a^{x}$（$a>0$，且 $a\neq1$）；
4. 对数函数　$y=\log_{a}x$（$a>0$，且 $a\neq1$）；
5. 三角函数　$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\operatorname{tg}x$、$y=\operatorname{ctg}x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$；
6. 反三角函数　$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\operatorname{arctg}x$、$y=\operatorname{arcctg}x$．

因为上述六类函数又能以一定的方式构成许许多多的函数，故称这些函数为基本初等函数.

基本初等函数是研究复杂函数的基础，因此掌握基本初等函数的性质是非常重要的. 关于基本初等函数的性质，我们前面已详细讨论过，这里不再重复.

二、复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间的联系并不是直接的，而是通过另外一些变量联系起来的.

例如：某种产品的销售收入 R 是产量 x 的函数

$$R=f(x)$$

而产量 x 又是时间 t 的函数

$$x=\varphi(t)$$

因为对于每一个确定的 t 值，不仅相应地有一个确定的 x 值，且通过 x 还有一个确定的 R 值与之对应，所以收入 R 也是时间 t 的函数. 也就是说，t 与 R 的函数关系是通过 x 而实现的，我们把 R 称为 t 的复合函数.

定义 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果对于 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的复合函数，记作

$$y=f\,[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量.

例如：$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$.

又如：$y=e^u$，$u=\sqrt{x}$，则 $y=e^{\sqrt{x}}$ 是 x 的复合函数，它的定义域是 $[0,\ +\infty)$.

注意：(1) 如果对于 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$ 无定

义，则 $y=f[\varphi(x)]$ 就无意义，此时 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 就构不成复合函数.

例如：$y=\sqrt{u}$ 及 $u=-(1+x^2)$ 就不能复合成一个复合函数. 这是因为 $u=-(1+x^2)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值所对应的 u 值均小于零，都不能使 $y=\sqrt{u}$ 有意义.

(2) 复合函数不仅可以由两个函数复合而成，而且可以由更多的函数复合而成.

例如：$y=\sqrt{\mathrm{tg}x^2}$ 就是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\mathrm{tg}v$，$v=x^2$ 三个函数复合而成的复合函数，这里的 u、v 都是中间变量.

为了便于研究复合函数的性质，我们往往把一个复合函数分解成若干个简单函数. 把一个复合函数分解成若干个简单函数，一般情况下分解到每个函数都是基本初等函数或者是基本初等函数的四则运算为止.

例 1 试将 y 写成 x 的函数：

(1) 已知 $y=\arcsin u$，$u=2x$；

(2) 已知 $y=\sqrt{v}$，$v=\ln u$，$u=2x+3$；

解 (1) $y=\arcsin 2x$，其定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$；

(2) $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$，其定义域为 $[-1,+\infty)$.

例 2 分别指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=3^{\sin x}$；

(2) $y=\ln(1+\cos x)$；

(3) $y=\mathrm{tg}\sqrt[5]{\ln\arcsin x}$.

解 (1) $y=3^{\sin x}$ 是由 $y=3^u$，$u=\sin x$ 复合而成的；

(2) $y=\ln(1+\cos x)$ 是由 $y=\ln u$，$u=1+\cos x$ 复合而成的；

(3) $y=\mathrm{tg}\sqrt[5]{\ln\arcsin x}$

是由 $y=\mathrm{tg}u$，$u=\sqrt[5]{v}$，$v=\ln w$，$w=\arcsin x$ 复合而成的.

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如 $y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{x^2+1}$，$y=(1+\sin x)^2$，$y=\arccos\sqrt{1-x^2}$等都是初等函数.

习题 9-1

1.（1）已知 $y=u^3$，$u=\log_a x$，将 y 表示为 x 的函数，并确定其定义域.

（2）已知 $y=a^u$，$u=\sqrt[3]{v}$，$v=x^3+1$，将 y 表示为 x 的函数，并确定其定义域.

2. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

（1）$y=(1+x)^{20}$；（2）$y=\sqrt{(2x+1)^3}$；

（3）$y=\cos^2(3x^2+1)$；（4）$y=\sin(2^x)$；

（5）$y=[\arcsin(1-x^2)]^3$；（6）$y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$；

（7）$y=\sin^3\log_a x$；（8）$y=\lg[\lg(\lg x^2)]$；

（9）$y=\log_a\sin e^{x+1}$；（10）$y=x^x$.

3. 某厂生产某种产品，x（单位：吨）表示产量，p（单位：元）表示单位产品的价格，Q（单位：吨）表示市场的需求量，在不考虑其它因素的条件下，设 Q 是 P 的函数 $Q(p)=\dfrac{1150}{p}$，而 p 又是 x 的函数 $p(x)=50-\dfrac{x}{2}$，则当该产品的产量为 8 吨时，市场的需求量为多少？

§9-2 函数的极限

一、数列的极限

定义 以自然数集为定义域的函数 $y_n=f(n)$，当自变量 n 按自然数 1，2，3，…依次增大的顺序取值时，函数值按相应的顺序排成的一列数：

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots$$

称为一个数列，数列中每一个数称为数列的项，$y_n=f(n)$ 称为数列的一般项或通项.

下面观察几个无穷数列的例子：

例 1 $y_n=\dfrac{1}{2^n}$：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{1}{16}$，…，$\dfrac{1}{2^n}$，…

例 2 $y_n=\dfrac{n+1}{n}$：$\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，…，$\dfrac{n+1}{n}$，…

例 3 $y_n=2n$：2，4，6，8，…，$2n$，…

例 4 $y_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$：0，1，0，1，…，$\dfrac{1+(-1)^n}{2}$，…

以上数列随着项数 n 的增大，它们有着各自的变化趋势.

当 n 逐渐增大时，数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 的通项 y_n 逐渐接近于 0；

当 n 逐渐增大时，数列 $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 的通项 y_n 逐渐接近于 1；

当 n 无限增大时，数列 $\{2n\}$ 的通项 y_n 也无限增大；

当 n 无限增大时，数列 $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 时而取 0，时而取 1.

从以上各例可以看出，在 n 无限增大的过程中，数列的变化趋势大致可分为两类：一类是 y_n 趋向于某一个确定的常数，这个确

定的常数就是数列的极限；另一类是 y_n 不趋向于某一个确定的常数，即该数列不存在极限.

由以上讨论，我们可描述出数列极限的定义：

定义 对于无穷数列 $\{y_n\}$，如果当项数 n 无限增大时，数列的通项 y_n 无限地趋近于某一个确定的常数 A，则常数 A 叫做数列 $\{y_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \text{ 或 } y_n \to A (n\to\infty)$$

这里所说的"y_n 无限地趋近于某一个确定的常数 A"是指 y_n 与 A 的差的绝对值 $|y_n - A|$ 可以任意小.

如果数列有极限 A，则称该数列收敛于 A；如果数列没有极限，则称该数列是发散的.

这样，例 1 可记为

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，即数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 收敛于 0.

例 2 可记为

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，即数列 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 收敛于 1.

例 3，例 4 中的数列是发散的.

例 5 观察下列数列是否有极限

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…；

(2) $y_n=\sin\frac{n\pi}{2}$.

解 (1) $y_n=\frac{n}{n+1}$，由于当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{n+1}\to 1$，所以数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 以 1 为极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

(2) 将 $y_n=\sin\frac{n\pi}{2}$ 写出就是

$$\sin\frac{\pi}{2},\ \sin\pi,\ \sin\frac{3\pi}{2},\ \cdots,\ \sin\frac{n\pi}{2},\ \cdots$$

即　1，0，-1，1，0，$-1\cdots$

显然，当 n 无限增大时，y_n 在 1，0，-1 之间摆动，而不趋近于某一个确定的常数，所以数列 $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ 没有极限.

二、函数的极限

数列是一类特殊的函数，它的自变量 n 只能取自然数，数列极限讨论的是当 n 依次取自然数，且无限增大时，$y_n=f(n)$ 的变化趋势. 下面我们将讨论自变量定义于实数的函数 $y=f(x)$ 的变化趋势，即函数的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大，它包含以下两种情况：

(1) x 取正值且无限增大，记作 $x\to+\infty$；

(2) x 取负值且绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$.

例 6　讨论当 $x\to+\infty$ 时，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的变化趋势.

解　作出指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像（见图 9-1).

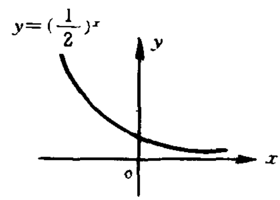

图 9-1

由图 9-1 可以看出，当自变量 x 逐渐增大时，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 逐渐减小且趋向于 0；此时，我们就称 x 趋于正无穷大时，函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 以 0 为极限.

例 7 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.

解 作出函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像（见图 9-2）.

由图 9-2 可以看出，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 无限地趋近于 0，也就是说，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 无限地接近于 0，此时，我们就称 x 趋于无穷大时，函数 $y=\frac{1}{x}$ 以 0 为极限.

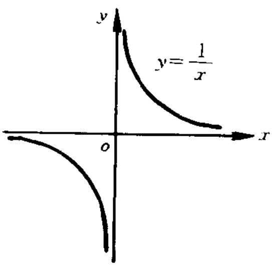

图 9-2

定义 如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于某一个确定的常数 A，则常数 A 就叫做当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

这样，例 6，例 7 可分别记为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0 \text{ 和 } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

函数的自变量 $x\to x_0$（定值），是指 x 从 x_0 的左、右两侧无限趋近于 x_0 但 x 不等于 x_0.

例 8 讨论当 $x\to\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)=2x+1$ 的变化趋势.

解 作出函数 $f(x)=2x+1$ 的图像（见图 9-3）.

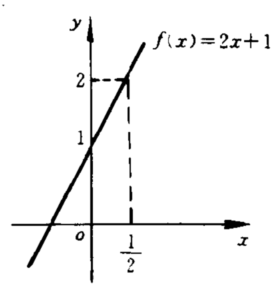

图 9-3

由图 9-3 可以看出，不论 x 从 $\frac{1}{2}$

的左侧，还是右侧沿着 x 轴趋近于$\frac{1}{2}$时，函数$f(x)=2x+1$的值都无限地趋近于 2，此时，我们称 x 趋于$\frac{1}{2}$时，函数$f(x)=2x+1$以 2 为极限.

例 9 讨论当 $x\to\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ $x\in\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$的变化趋势.

解 在 $x=\frac{1}{2}$处，$f(x)$无意义，当 $x\neq\frac{1}{2}$时，

$$f(x)=\frac{(2x+1)(2x-1)}{2x-1}=2x+1$$

作出函数$f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$的图像(见图 9-4).

由图 9-4 可以看出，当 x 从$\frac{1}{2}$的左、右两侧趋近于$\frac{1}{2}$ $(x\neq\frac{1}{2})$ 时，函数$f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$的值都无限地趋近于 2，因此当 $x\to\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{4x^2-1}{2x-1}$也以 2 为极限.

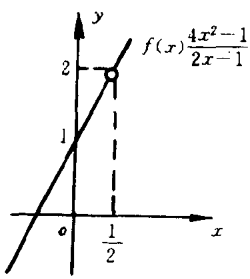

图 9-4

由例 8、例 9 两个例子可以看出，两个函数尽管不同（其中例 9 中$f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处无定义），但当 $x\to\frac{1}{2}$时它们的极限相同，因此，研究 x 趋于$\frac{1}{2}$时，函数$f(x)$的极限是否存在与函数$f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处是否有定义无关.

定义 设函数$f(x)$在点 x_0 的左、右两侧附近有定义（但在点 x_0 处可以没有定义），如果当 x 无限地趋近于 x_0 时，函数$f(x)$无

限地趋近于某一个确定的常数 A,则常数 A 就叫做当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

这样,例 8、例 9 可分别记为

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x+1)=2 \quad \text{和} \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=2$$

例 10 试说明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ (C 为常数);(2) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ (x_0 为任一实数).

解 (1) 设 $f(x)=C$,因为不论自变量 x 取何值,$f(x)$ 的值恒等于 C,所以当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to C$,此时也可看成 $f(x)$ 无限地接近于常数 $A(A=C)$,即

$$\lim_{x\to x_0}C=C \text{ (}C\text{ 为常数)}$$

注意:此结果当 $x\to\infty$ 时也成立.

(2) 设 $f(x)=x$,因为不论自变量 x 取何值,$f(x)$ 的值都与 x 相等,所以当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to x_0$,即

$$\lim_{x\to x_0}x=x_0 \text{ (}x_0\text{ 为任一实数)}$$

3. 函数的左极限和右极限

在上面给出的 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义中,自变量 x 是从 x_0 左、右两侧同时趋近于 x_0 的. 但是,有时我们仅仅需要讨论 x 从 x_0 的左侧 ($x<x_0$) 趋近于 x_0,或 x 从 x_0 的右侧 ($x>x_0$) 趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势,因此需要引进左极限和右极限的概念.

定义 当 x 从 x_0 的左侧 ($x<x_0$) 趋于 x_0 时,如果函数 $f(x)$ 的极限为 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

当 x 从 x_0 的右侧 ($x>x_0$) 趋于 x_0 时,如果函数 $f(x)$ 的极限

为 A，则称 A 为函数$f(x)$在点 x_0 的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

根据左、右极限定义，我们可得到如下定理：

定理 当 $x \to x_0$ 时，函数$f(x)$以 A 为极限的充分必要条件是函数$f(x)$在点 x_0 的左、右极限同时存在且相等，即函数$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

例 11 设$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$

讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)$的极限是否存在.

解 当 $x < 0$ 时，$f(x) = 0$，

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = x$，

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

因为左、右极限存在并且相等，所以

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

例 12 设$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$，证明$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在.

证 当 $x < 0$ 时，$f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{-x} = -1$

当 $x > 0$ 时，$f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = 1$

于是 $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在.

习题 9-2

1. 写出下列数列的一般项，并用观察的方法判断下列数列是否收敛：

(1) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots$；　　(2) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \cdots$；

(3) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$；　　(4) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$；

(5) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \cdots$；　　(6) $1,\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \cdots$.

2. 设$f(x)=\begin{cases}-2 & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$，讨论当 $x\to 1$ 时，$f(x)$的极限是否存在.

3. 设$f(x)=|x|$，画出$f(x)$的图形，并用左、右极限说明当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限存在且为 0.

§9-3 无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

定义 极限为零的变量称为无穷小量，简称为无穷小，即若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$)，则称$f(x)$为 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷小量.

例如：当 $n\to\infty$时，$\frac{1}{n}$是无穷小量；当 $x\to+\infty$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$是无穷小量.

又如函数 $y=\sin x$ 与 $y=\operatorname{tg}x$，当 $x\to 0$ 时，$\sin x\to 0$、$\operatorname{tg}x\to 0$，即 $y=\sin x$ 与 $y=\operatorname{tg}x$ 均为 $x\to 0$ 时的无穷小量，而当 $x\to\frac{\pi}{2}$时，