科学版

大学数学学习指导系列

高等数学

考研辅导

张天德　编著

- 考点·方法·技巧
- 例题、习题紧扣考研大纲
- 考研复习的系统指导
- 课程学习的良师益友

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学学习指导系列

高等数学考研辅导

山 东 大 学

张天德 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是作者根据多年来从事考研辅导的教学经验，参照教育部最新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试高等数学考试大纲编写而成的，目的是为了帮助考生全面系统地复习，加宽、加深所学高等数学知识，掌握解题方法和技巧，提高解题能力．本书按照考试大纲的要求共分八章，每章都包含考试内容、考试要求、内容提要、例题、习题、习题答案及提示等六个部分．书中典型例题是仿照考研试题的形式与结构编选的，例题的解法注重思路、方法与技巧．

本书可供工学、经济学、管理学等专业的学生学习高等数学和报考研究生复习使用，也可供其他专业的学生复习使用和高校教师参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学考研辅导/张天德编著．—北京：科学出版社，2003
(大学数学学习指导系列)
ISBN 7-03-010996-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 092978 号

责任编辑：吕　虹　李鹏奇／责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生　　　　／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2003年3月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2003年3月第一次印刷　印张：18 3/4
印数：1－7 000　字数：356 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

本书是编者根据多年来从事硕士研究生入学考试考前辅导班的教学经验和受长期批阅统考试卷的启示，参照教育部最新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试高等数学考试大纲编写而成的；目的是为了帮助报考硕士研究生的读者在较短时间内全面、系统地复习、巩固并适当加宽、加深在大学期间所学的高等数学知识，掌握解题方法和技巧，提高解题能力.

本书共八章. 内容包括：函数、极限与连续；一元函数微分学；一元函数积分学；向量代数与空间解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学；无穷级数；常微分方程. 每章都包含6个部分，即：一、考试内容；二、考试要求；三、内容提要；四、例题；五、习题；六、习题答案及提示. 书中典型例题是仿照考试试题的形式与结构而编选的，例题的解法中注重思路、方法与技巧，并随时指出解题过程中容易出现的错误.

本书除可作为报考硕士研究生的高等数学教材外，还可供各类高等学校的教师和学生参考.

本书由山东大学数学与系统科学学院张天德教授编著，书稿完成后由陈广桐教授审阅. 在编写过程中得到了山东大学数学与系统科学学院有关领导和老师的支持及帮助，在此谨向他们表示衷心感谢.

限于水平，书中若有疏漏和错误，欢迎读者批评指正.

张天德

2002年9月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映，函数是高等数学的主要研究对象．极限概念是由研究变量的变化趋势而产生的，极限方法是深入研究函数的重要方法，也是高等数学中研究问题的基本分析方法．连续性是很广泛的一类函数所具有的重要特性．本章主要内容为函数的概念与初等函数，函数的极限与连续性等基本概念及其主要性质．它们是学习高等数学的基础．

一　考试内容

函数的概念及表示法．函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性．反函数、复合函数和隐函数．基本初等函数的性质及其图形．初等函数．简单应用问题的函数关系的建立．数列极限与函数极限的定义以及它们的性质．函数的左、右极限．无穷小．无穷大．无穷小的阶．极限的四则运算．极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则．两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念．函数间断点的类型．初等函数的连续性．闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）．

二　考试要求

1．理解函数的概念，掌握函数的表示方法．

2．了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性．

3．理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念．

4．掌握基本初等函数的性质及其图形．

5．会建立简单应用问题中的函数关系式．

6．理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系．

7．掌握极限的性质及四则运算法则．

8．掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法．

9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型.

11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)，并会应用这些性质.

三　内容提要

(一) 函数

1. 函数的概念　设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的规则总有惟一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

2. 反函数　设函数 $y = f(x)$ 的定义域、值域分别为 D 与 W，若对于变量 y 在 W 中的每一个值，变量 x 在 D 中都有满足 $f(x) = y$ 的确定的值和它对应，则 x 是 y 的函数，记为 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$，并称 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上，自变量、因变量常分别用 x、y 表示，故常将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = \varphi(x)$ 或 $y = f^{-1}(x)$. 若把函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标系内，那么这两个图形关于直线 $y = x$ 对称.

3. 函数的几种特性　有界性、单调性、奇偶性、周期性.

4. 初等函数

(1) 基本初等函数　常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六种函数称为基本初等函数.

(2) 初等函数　凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成，并可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

(二) 极限

1. 数列极限的定义　设 $\{u_n\}$ 为一个数列，a 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在一个正整数 N，使得 $n > N$ 的一切 u_n 都满足不等式 $|u_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{u_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a$$

2. 函数极限的定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内(点 x_0 可除外)有定义，A 为一个常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在一个正数 δ，使得满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

左极限和右极限的定义:若对于满足 $0 < x_0 - x < \delta(0 < x - x_0 < \delta)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 自 x_0 左(右)侧趋于 x_0 时的极限,即左(右)极限,分别记为

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = A \quad (\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0) = A)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$

类似地,可以给出当 $x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 的极限为 A 的定义.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = 0$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷小.

(2) 无穷大的定义　若对任意给定的 $M > 0$,都存在一个正数 $\delta(N)$,使得满足 $0 < |x - x_0| < \delta(|x| > N)$ 的一切 x 所对应的 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)| > M$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷大,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$$

(3) 无穷小与无穷大的关系(以下所讨论的极限,都是在自变量同一变化过程中的极限)

若 $\lim f(x) = 0 \quad (f(x)\neq 0)$, 则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = \infty$;

若 $\lim f(x) = \infty$, 则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(4) 无穷小的阶　设 α、β 都是无穷小. 若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta = o(\alpha)$;若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$,则称 β 与 α 是同阶无穷小,记作 $\beta = O(\alpha)$;特别地,当 $c = 1$ 时,则称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

给定无穷小 β,若存在无穷小 α,使它们的差 $\beta - \alpha$ 是比 α 较高阶的无穷小,即

$$\beta - \alpha = o(\alpha) \quad 或 \quad \beta = \alpha + o(\alpha)$$

则称 α 是无穷小 β 的主部;

若 β 和 $\alpha^k(k > 0)$ 是同阶无穷小,则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

4. 极限的性质

惟一性、有界性、保号性.

充要条件:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha \qquad (\lim\alpha=0)$$

运算法则：$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \qquad (\lim g(x)\neq 0)$$

两个准则：夹逼准则；单调有界数列必有极限

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e} \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

（三）连续

1. 函数连续的概念　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 若函数在区间 I 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续.

2. 间断点的概念　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不满足下列三个条件之一：$f(x)$ 在点 x_0 有定义；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点.

间断点分为：

第一类间断点：左、右极限都存在的间断点；左、右极限不仅存在而且相等的间断点，又称为可去间断点；

第二类间断点：左、右极限至少有一个不存在的间断点.

3. 连续函数的运算性质及初等函数的连续性　若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 也连续；若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，函数 $y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续，则函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续；初等函数在其定义区间内均连续.

4. 反函数的连续性　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增（减）的连续函数，其值域为 (A,B)，则必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且 $x=f^{-1}(y)$ 在 (A,B) 内为单调增（减）的连续函数.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理　闭区间上的连续函数必取得最大值和最小值.

(2) 有界性定理　闭区间上的连续函数在该区间上有界.

(3) 介值定理　闭区间上的连续函数必取得介于它的最大值和最小值之间的一切值.

四　例　题

(一) 填空题

1. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$ ________，定义域为________.

分析　因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$. 而 $f[\varphi(x)]=1-x$，因此 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$. 对上式两端取对数，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，有 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 故应填 $\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则函数 $f[f(x)]=$ ______.

分析　因为由已知条件知　$|f(x)|\leqslant 1$，$-\infty<x<+\infty$，所以由 f 及复合函数的定义知 $f[f(x)]=1$，$-\infty<x<+\infty$，故应填 1.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ________.

分析　本题是求形如 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})$ 的极限，一种常用的方法是将 $\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}$ 有理化，将所给极限化为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$，从而求得所给极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=2$$

故应填 2.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

分析　作变换 $t=\dfrac{1}{x}$，并利用重要极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\sin\frac{2}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{3+5t^2}{5+3t}\cdot\frac{\sin 2t}{t}=\frac{6}{5}$$

故应填 $\dfrac{6}{5}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=$ ________.

分析　本题属于求“$\infty \cdot 0$”型未定式极限问题. 将其进行分子有理化,变为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式来解决.

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

故应填$\frac{1}{2}$.

注意　只有当 $x\to+\infty$ 时,上式极限存在,当 $x\to-\infty$ 时上式极限不存在.

6. 设$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=b$,若函数

$$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续,则常数 $A=$ ________.

分析　根据 $F(x)$ 在点 $x=0$ 连续的充要条件知

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^-}F(x)=F(0)=A$$

而

$$\lim_{x\to0}F(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+a\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=b+a$$

故应填 $b+a$.

7. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}, & x<0\\ b, & x=0\\ \frac{\ln(1+2x)}{x}+a, & x>0\end{cases}$$

当 $a=$ ______,$b=$ ______时,$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续.

分析　当 $x<0$ 时,$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}$ 有定义,函数 $f(x)$ 连续;$x>0$ 时,$\frac{\ln(1+2x)}{x}+a$ 有定义,函数 $f(x)$ 也连续,而在 $x=0$ 处,因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{e^x-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^x-1}\cdot\lim_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\ln(1+2x)}{x}+a\right]=a+\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}$$
$$=a+2$$

因此,当 $a=-2,b=0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 故应填 $-2,0$.

8. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=$ ________.

分析　只有无穷小与有界变量之积仍为无穷小,而无穷大与有界变量之积未必是无穷大,作变换 $t=\frac{1}{x}$,则

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$$

故应填 1.

注意　$\lim\limits_{x\to0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

9. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=$ ________.

分析　本题可先利用三角函数的和、差化积公式,然后再用上一题的思路求解. 由于

$$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}$$
$$=-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

当 $x\to+\infty$ 时,$\left|\dfrac{\sin\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant1$

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$$
$$=\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to0$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$$

故应填 0.

10. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=$ ________.

分析　本题似乎无法下手，我们先将原式恒等变形后再利用无穷小量的性质来求.

$\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)$，$\{(-1)^n\}$是个有界量，而$0<\pi(\sqrt{n^2+1}-n)=\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}<\dfrac{2}{n}$，因$0<\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)\leqslant\sin\dfrac{2}{n}<\dfrac{2}{n}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$，由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$$

故应填0.

11. 极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=$ ________.

分析　本题应先恒等变形，然后再利用等价无穷小代换定理

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln[e^x(1+e^{-x}\sin^2x)]-x}{\ln[e^{2x}(1+e^{-2x}x^2)]-2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+e^{-x}\sin^2x)}{\ln(1+e^{-2x}x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\sin^2x}{e^{-2x}x^2}=1$$

故应填1.

注意　在应用等价无穷小代换定理求极限时要特别小心，一般情况下强调对分子或分母的乘积因子可以应用等价无穷小代换，从而简化极限运算，否则会导致错误的结果.

当$x\to0$时常用的等价无穷小量有

$\sin x\sim x$，　　$\tan x\sim x$，　　$\ln(1+x)\sim x$

$e^x-1\sim x$，　　$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$

（二）选择题

1. 已知函数$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则$f(x)$是________.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　(D) 不能确定

分析　因为$f(x+y)=f(x)+f(y)$，所以$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$

$=2f(0), f(0)=0$. 因为 $0=f(0)=f(x-x)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$，即　$f(-x)=-f(x)$

因此 $f(x)$ 是奇函数. 所以只有(A)项正确.

2. 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为________.

(A) 等于 2　　(B) 等于 0

(C) 为 ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

分析　函数在某一点的极限存在的充分必要条件是函数在该点的左、右极限都存在并且相等.

因为若函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限存在，则

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$$

然而，

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}2e^{\frac{1}{x-1}}=0$$

所以只有(D)项正确.

3. 函数 $f(x)=x\sin x$，________.

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限

分析　只要正确理解当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大与 $f(x)$ 无界两个概念之间的区别，就容易作出正确选择.

验证法　可直接验算(C)为正确选项，根据 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 无界的定义，无论给定 M 多么大，均存在 x_0 使得 $f(x_0)>M$. 现取正整数 k，使 $\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M$，并令 $x_0=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，则 $f(x_0)=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\sin\left[\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right]=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M$.

排除法　若取 $x_k=2k\pi$，则 $f(x_k)=2k\pi\sin2k\pi=0$，故 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大量，从而排除(A).

分别取 $x_k^{(1)}=2k\pi, x_k^{(2)}=\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，则当 $k\to\infty$ 时 $f(x_k^{(1)})=0$，而 $f(x_k^{(2)})\to\infty$，因此，$x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不存在有限极限，且在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 也不是有界的，于是(B)、(D)不成立. 所以只有(C)项正确.

4. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，________.

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量

(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

分析　$x\to 0$ 时，显然 $f(x)$ 是一个无穷小量，比较 $f(x)$ 与 x 的阶数，需要根据极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 的值进行判别，这里只须知 $e^x-1\sim x(x\to 0)$ 就能判别本题，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}+e^{x\ln 3}-2}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\cdot\ln 2}\cdot\ln 2+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{x\cdot\ln 3}\cdot\ln 3=\ln 2+\ln 3\neq 1$$

故 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量，所以只有(B)项正确.

5. 下列各式中正确的是________.

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

分析　本题应从重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 入手考虑，显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\dfrac{1}{e}$ 故(C)、(D)为干扰项，对照 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，(B)项也被排除，只有(A)为正确选项.

事实上，

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$，所以只有(A)项正确.

6. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a,b 是常数,则________.

(A)$a=1,b=1$　　　　(B)$a=-1,b=1$

(C)$a=1,b=-1$　　　　(D)$a=-1,b=-1$

分析

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+(x^2-1)}{x+1}-ax-b\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}+\lim_{x\to\infty}(x-ax-1-b)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1-a)x-(1+b)=0$$

知$\lim\limits_{x\to\infty}(1-a)x=1+b$,由于 a,b 是常数,故当且仅当

$$\begin{cases}1-a=0\\1+b=0\end{cases}$$

时上式成立,因此 $a=1,b=-1$,所以只有(C)项正确.

为了正确而迅速地解答选择题,首先要对题意和备选项进行整体的对比考察,弄清题目的考查目标,从题干和备选项中获得解决问题的充分信息,其次选择适当的解题方法,下面归纳几种解题方法,供读者参考.

直接法:直接从题目的已知条件出发,经过严密的推导,合理的运算,从而得出结果和判断的方法. 其选择过程是先计算,然后将计算的结果与备选项对照,选出正确项. 当题目中给出已知条件,备选答案列出所需求的结果时,一般首先考虑直接法.

验证法:把可供选择的各备选项代入题目中的已知条件或将题干中的条件代入备选项进行验算,从而选出正确项的方法.

排除法:又叫筛选法,通过找出已知和结论的矛盾,用特例或特殊值验证或举出反例等方法,排除错误选项,从而得到正确选项的方法.

图象法:通过画出直观的几何图形,帮助分析,便于做出正确的选择的方法.

每种方法都不是孤立的,有时同一试题可用多种方法求解,有时需借用几种方法综合求解.

(三) 计算、证明题

1. 讨论 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的连续性.