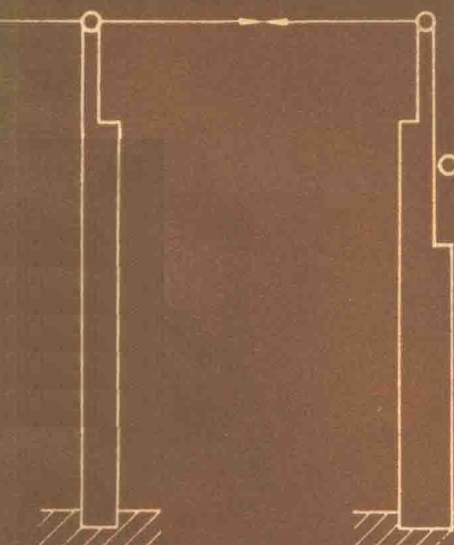
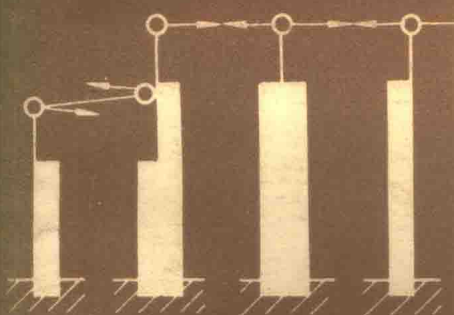
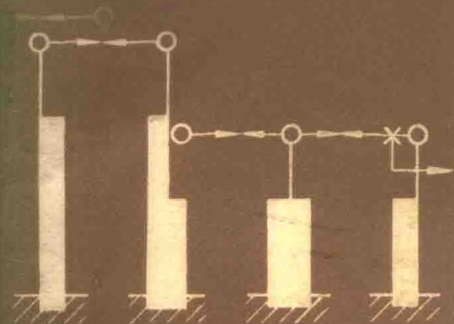
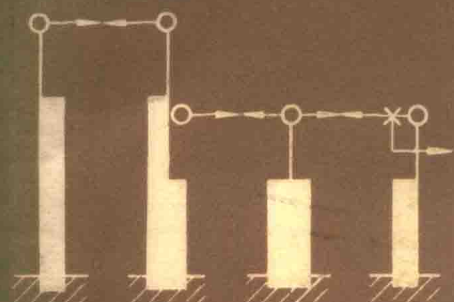


单层厂房排架 计算公式

刘百铨 著

中国工业出版社



单 层 厂 房 排 架 计 算 公 式

刘 百 铨 著



中 国 工 业 出 版 社

本书列出了 608 个单层铰接排架计算公式，可用以计算 18 种具有二阶和三阶变截面柱的单跨和多跨单层厂房和公共建筑铰接排架结构方案。这些公式是根据一般虚功原理及弯矩面积法推导出来的。书中对公式的推导和应用有较详细的介绍，并有应用例题加以说明。此外，对受吊车荷载或其它局部荷载时的排架，提出了一个考虑排架空间工作影响的算法。

本书可供建筑结构设计人员及高等院校土建专业学生应用。

单层厂房排架计算公式

刘百铨 著

建筑工程部图书编辑部编辑(北京西郊百万庄)

中国工业出版社出版(北京佟麟阁路丙10号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第110号

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $7^{5/8}$ ·字数169,000

1965年2月北京第一版·1965年3月北京第一次印刷

印数0001—16,360·定价(科六)1.00元

统一书号: 15165·3490(建工-411)

前 言

在单层厂房承重結構設計中，排架的計算比較复杂。它的計算工作量較大，所占的設計時間也較長。为了减少排架計算工作量，以提高設計工作效率，設計時一般可采用下述方法，即：（1）利用已推导出来的現成的排架計算公式；（2）利用簡化的排架計算方法（如用于鉸接排架的剪力分配法等）；（3）利用電計算新技术（如专用的电子排架計算机）。

对于单层厂房鉸接排架的計算，近年来国内外虽已提出了不少的簡化方法，但对于具有阶形变截面柱的单层厂房排架的現成計算公式，据作者所知，目前只有适用于二阶变截面柱的单跨单层厂房排架一种方案的資料^[1]，^[2]。因此，作者結合我国近年广泛采用装配式鋼筋混凝土单层厂房結構的情况，对一般常用的、具有二阶和三阶变截面柱的单跨和多跨的18种单层厂房鉸接排架方案推导出現成的排架計算公式共608个；作者认为，这些公式基本上可滿足一般設計上需要。至于单层厂房刚接排架的計算公式，本书并未把它包括在內，因为这方面已有專門著作^[3]可供設計人員参考。

本书提出的排架計算公式是根据一般結構理論，按平面排架“橫梁两端位移相等”的原則推导出来的精确解。为使讀者了解本书公式的来源，以及在必要时能按本书方法进行推导起見，书中对公式推导有較詳細的介紹。

在厂房排架計算中一般是按平面排架計算的，但厂房結構的空間工作性质是客观存在的；为使設計更合理一些，书中对于受吊車荷載或其它局部荷載时的排架，提出了一个适当地考虑排架空間工作影响的計算方法，以供設計人員参考。

为便于应用起見，书中对具体的应用方法作了扼要的說明，并举出計算实例。

本书的目的是給設計人員介紹一些現成的排架計算公式，使他們可以跳过繁复的排架分析阶段，能够相当簡便地直接計算出排架贅余力，从而节省設計計算時間，提高工作效率。作者希望本书对設計部門的工程技術人員，以及对于大专院校土木系学生作課程設計和毕业設計時都能起一些作用。但作者水平有限，謬誤和不足之處希讀者随时提出指正，以便本书能成为一本有用的参考书。

符 号

- a, a_i ——二阶变截面柱由柱顶至变阶处的高度。
- a_1 ——三阶变截面柱由柱顶至上面变阶处的高度。
- b_1 ——三阶变截面柱由柱顶至下面变阶处的高度。
- b ——高低跨排架中在衔接柱的高柱柱顶至低跨连接铰点的高度。
- h, h_i ——柱的全部高度。
- $\bar{a}$ ——吊车垂直荷载离某一段柱轴线的偏心距。
- m_{np} ——考虑排架空间工作的空间作用系数。
- α ——柱顶至柱中某一力作用点之间的高度与柱全部高度 h 的比值。
- λ ——二阶及三阶变截面柱的上柱段高度与柱全部高度 h 的比值
- $$\left(\lambda = \frac{a}{h}, \lambda = \frac{a_1}{h} \right)。$$
- β ——三阶变截面柱的中间柱段高度与柱全部高度 h 的比值 $\left(\beta = \frac{b_1}{h} \right)。$
- γ ——柱高度不等的排架中不同柱高的比值。
- Δ_{ik} ——在柱中 K 点处有外力作用而引起 i 点的横向位移。
- δ_{ik} ——一单位力 $P=1$ 作用在 K 点所引起 i 点的位移。
- J_B 及 J_H ——二阶变截面柱的上段及下段柱的截面惯性矩。
- $$\frac{1}{n} = \frac{J_H}{J_B}$$
- 二阶变截面柱的下段与上段柱的惯性矩比值。
- $\mu = \frac{1}{n} - 1$ ——二阶变截面柱与惯性矩有关的系数。
- k_1, k_2, k_3, k_4 ——二阶变截面柱的四个形常数。
- J_1, J_2 及 J_3 ——三阶变截面柱的上段、中段及下段柱的截面惯性矩。
- $$\frac{1}{n_1} = \frac{J_3}{J_1} \text{ 及 } \frac{1}{n_2} = \frac{J_3}{J_2}$$
- 三阶变截面柱的下段柱与其余不同柱段的惯性矩比值。
- $$\mu_1 = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \text{ 及 } \mu_2 = \frac{1}{n_2} - 1$$
- 三阶变截面柱与惯性矩有关的系数。
- $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$ 及 k_1, k_2, k_3, k_4 ——三阶变截面柱的八个形常数。
- K, K_i ——柱刚度不同的排架中各柱下段柱截面惯性矩的比值。
- A, B, C, D, F, G, N, Z ——组合的计算系数, 分别见各表所示。
- P ——作用于柱上的集中力(水平的或竖向的)。
- q, p_1 ——作用于柱上的均布荷载(水平的)。
- p_2 ——作用于柱上的三角形分布荷载的最大值(水平的)。
- M_i ——作用于柱上的偏心弯矩。
- T, T_i ——作用于柱上的吊车水平制动力。
- X_i ——在横梁水平的待定赘余力。
- M ——柱某截面上的弯矩。
- N ——柱某截面上的轴向力。
- Q ——柱某截面上的横向力(剪力)。
- R_B ——柱脚固定而柱顶为不动铰支点的柱顶水平反力。
- M_A ——柱脚固定而柱顶为不动铰支点的柱脚弯矩。

目 录

前 言

符 号

一、应用说明 (1)

二、计算公式推导简介 (4)

(一) 柱位移计算公式的推导 (4)

1. 等截面柱 (5)

2. 二阶变截面柱 (5)

3. 三阶变截面柱 (8)

4. 不动铰支柱的柱顶反力 (10)

(二) 排架计算公式的推导 (10)

三、考虑排架空间受力的计算 (16)

四、计算公式 (20)

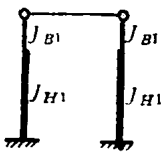
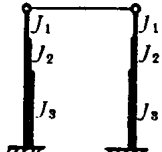
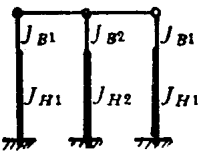
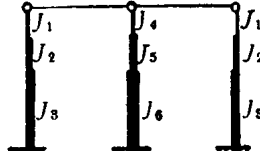
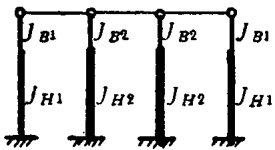
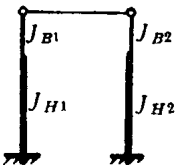
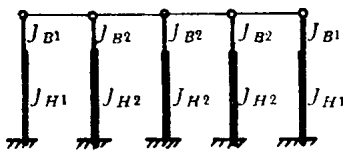
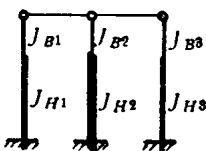
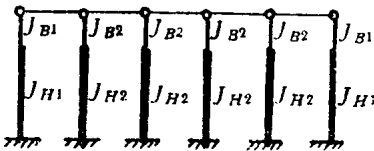
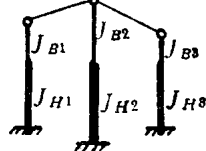
表 1 (第20頁)		表 6 (第35頁)	
表 2 (第22頁)		表 7 (第37頁)	
表 3 (第25頁)		表 8 (第41頁)	
表 4 (第28頁)		表 9 (第43頁)	
表 5 (第32頁)		表10 (第45頁)	

表11 (第49頁)		表17 (第69頁)	
表12 (第52頁)		表18 (第73頁)	
表13 (第56頁)		表19 (第78頁)	
表14 (第59頁)		表20 (第80頁)	
表15 (第62頁)		表21 (第82頁)	
表16 (第65頁)		表22 (第85頁)	

五、計算实例	(88)
例一	(88)
例二	(91)
例三	(95)
例四	(100)
例五	(104)
六、附录	(109)
附录一 在設計中选择柱截面尺寸的参考条件	(109)
附录二 矩形柱截面特征表	(110)
工形柱截面特征表	(111)
双肢柱截面特征表	(112)
附录三 計算柱形常数 k 及 k 值用表	(112)
参考文献	(115)

一、应用說明

(一) 本书所列排架計算公式只适用于柱脚与基础固接而柱頂为鉸接的具有阶形变截面柱或等截面柱的单层厂房排架和单层公共建筑的排架。下列各类结构的計算草图均属于这种情况:

1. 全部柱及屋架(梁)均为預制装配式鋼筋混凝土构件的单层厂房结构;
2. 砖柱及鋼筋混凝土屋架(梁)的单层厂房结构;
3. 鋼筋混凝土柱或砖柱及鋼屋架的单层厂房结构;
4. 鋼筋混凝土柱或砖柱及木屋架的单层厂房结构(屋架上应有木板基层以保证屋面刚度,同时木屋架端部应与柱頂預埋锚栓系紧);
5. 虽用鋼柱,但采用三角形鋼桁架的单层厂房结构(因三角形鋼桁架在支座处高度很小,不能传递柱与横梁连接处的刚接弯矩);
6. 凡构造上要求按柱与横梁连接为鉸接处理的单层厂房结构等。

(二) 本书計算公式不适用于柱頂刚接排架和跨变排架(跨变排架是指屋盖系統在传递外加荷载时需要考虑在跨度方向屋盖跨长变化的排架)。

(三) 本书提出18个排架方案的計算公式共 608 个。这些排架方案草图如本书目录所示。在应用本书公式时应先从目录查取与设计相符的排架方案,然后按书中公式进行計算。应指出,表11及表12是具有二阶变截面柱或等截面柱的单跨及两跨排架的灵活方案;表11可用于图1的排架方案,而表12则适用于图2的排架方案。对于高低跨排架方案是設低跨横梁鉸支于高跨柱的变阶处或在其下的;如所計算的排架方案中鉸接处位于高跨柱的变阶处之上,但鉸支处高出变阶处的距离不大时(如不超过高跨吊車梁梁頂),則在計算时可近似地設低跨横梁鉸支于高跨柱的变阶处,按书中相应的排架方案公式計算。

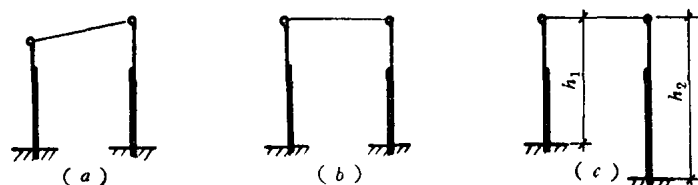


图 1

(四) 表19至22是計算二阶和三阶变截面柱的水平位移及柱頂为不动鉸接时的反力的公式,共 120 个。这些公式也可用于以不同材料組成的“复合柱”(例如阶形变截面柱的下段柱用鋼筋混凝土,而上段用鋼),但此时鋼柱截面的慣性矩应乘以系数 $\frac{E_a}{E_b}$ (E_a , E_b

分别为鋼和鋼筋混凝土的弹性模量)后换算为鋼筋混凝土柱的惯性矩来计算;这个换算原则也适用于有“复合柱”的鉸接排架的计算。

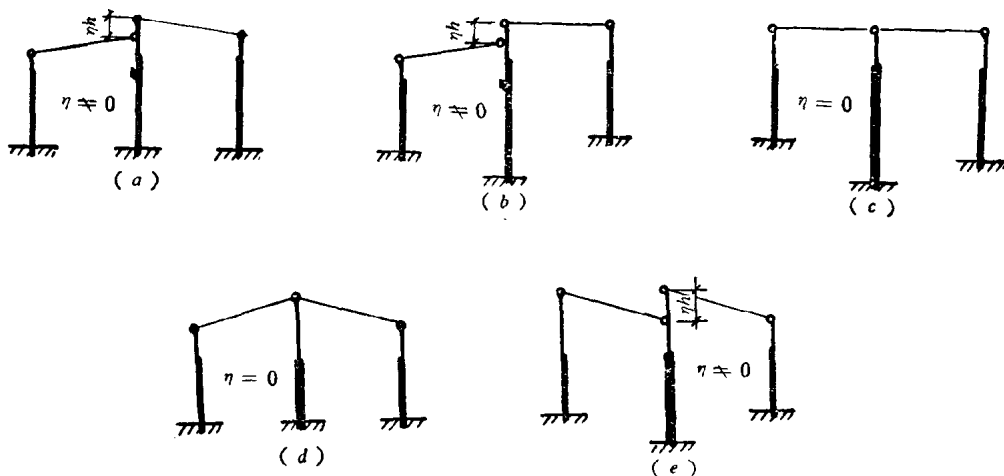


图 2

(五) 公式推导时是以平面排架横梁传递的水平力 X 为未知的贅余力。贅余力 X 的符号是以横梁受拉为正号的 (即表中所示指向); 如计算得的 X 为负值, 即表示贅余力 X 的实际作用方向与表中所示指向相反。

(六) 如计算时实际的荷载作用方向与表中所示荷载作用方向相反, 则在计算公式中的作用力应以负值代入计算。有些表中对桥式吊车垂直荷载的偏心弯矩是按跨计以成对的弯矩表示的; 如某一偏心弯矩只作用于一个柱上时, 则公式中邻柱上的弯矩应以零代入计算。

(七) 当柱受偏心的垂直荷载时, 在排架及位移计算公式中是以偏心弯矩 M 表示的。此时, M 值应按图 3 规定取采。

(八) 计算排架时可按下列步骤进行:

1. 根据厂房轮廓尺寸及横断面形状确定平面排架计算草图;
2. 选定柱的类型及各柱的断面和尺寸;
3. 计算各柱段的截面惯性矩 (本书附录二表 II 列有常用钢筋混凝土柱的截面惯性矩值以备查用);
4. 根据排架计算草图及柱的惯性矩, 从目录中选取适合的排架方案;
5. 确定各种荷载的数值;
6. 计算出选定的排架方案的表中所列的计算系数 (附录三列有形常数 k_1, k_2, k_3, k_4 可供查用, 并可用以求 $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$);
7. 根据荷载情况按排架方案表中的计算公式分别计算出未知贅余力 X ;
8. 将每一荷载作用下的未知贅余力 X 求出后, 可将各柱分别看作独立的悬臂柱来计算柱中各个需要计算的截面的内力: M (弯矩)、 N (轴向力) 及 Q (横向力或剪力) (弯矩以顺时针转动者为正; 剪力以向右者为正);

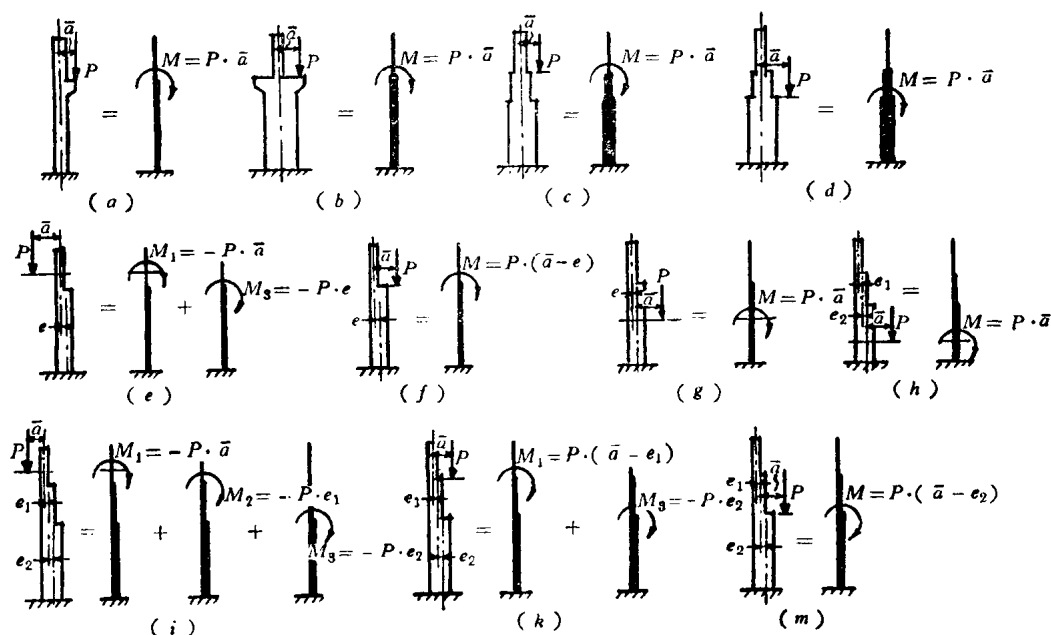


图 3

9. 求出各种荷载作用引起的柱中某一截面的内力: M , N 及 Q 后, 便可列表进行汇总, 以确定该截面最不利的内力组合 (例如分为最大正弯矩、最大负弯矩及最大轴向力三种组合);

10. 需要验算某一种荷载作用下 (例如吊车水平制动力) 受力柱中某一点的水平位移时, 可在求出该荷载作用下所产生的未知赘余力 X 后, 可按表 18 或 19 位移计算公式按独立柱计算;

11. 计算吊车荷载时, 考虑排架空间工作是比较合理的, 建议参照第六节的方法计算;

12. 对于有柱列的柱间距不同的排架, 计算时可按“计算单元”^[3]方法进行。设计时可参阅有关文献, 本书不加详述。

二、計算公式推导簡介

本书所討論的单层厂房排架是用阶形变截面柱或等截面柱，其柱脚与基础固接，而柱頂与屋架（梁）鉸接的。这类排架属于超靜定結構体系。排架的計算草图是以横梁所传递的水平力为未知贅余力 X ，贅余力的数目与横梁（或跨数）的数目相同（图4）。求解时是以“横梁两端水平位移相等”的原則为条件的，也就是假設屋架（梁）传递水平力时引起的变形很小，可不予考虑。这就是說，当屋架（横梁）一端产生水平位移 Δ_a 时，另一端必发生同样大小的水平位移 $\Delta_b = \Delta_a$ 。在求解时应先确定各柱在外力作用下所产生的水平位移。因此，在此先介紹本书中位移計算公式的推导，然后再介紹排架計算公式的推导。

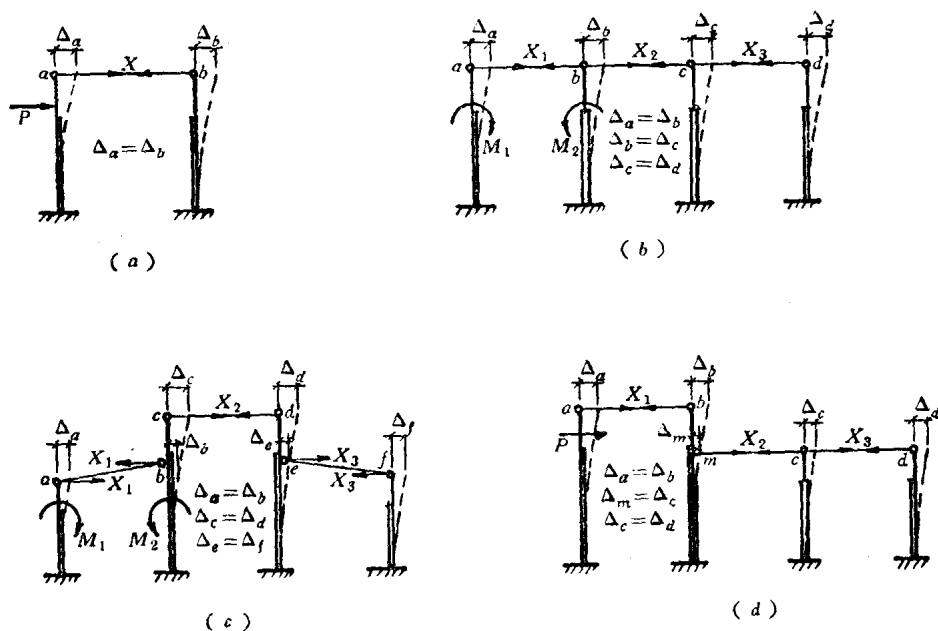


图 4

(一) 柱位移計算公式的推导

計算柱水平位移时是取柱脚与基础固接，柱頂为自由端的独立柱为基本体系的。

按結構理論，当杆件受横向作用力（或弯矩）而引起的横向变形，如不考虑剪力 Q 及軸向力 N 的影响，則由虛功原理有变形方程式为：

$$\Delta_{ik} = \int \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dx \quad (1)$$

式中 Δ_{ik} ——由于外荷载的作用在需要求位移的 i 点处产生的水平位移；

M_k ——由于外荷载的作用在基本体系中产生的弯矩；

$\bar{M}_i$ ——在需要求位移的 i 点处由于单位力 $X=1$ 的作用而在基本体系中产生的弯矩；

E ——杆件材料的弹性模量；

J ——杆件的截面惯性矩。

解积分项 $\int \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dx$ 时采用“弯矩面积法”，即：柱上任一点 i 对柱脚 A 点的位

移等于在 iA 间的 $\frac{M}{EJ}$ 图形面积对于 i 点的弯矩。

1. 等 截 面 柱

以弯矩面积法求独立的等截面柱的水平位移是简便的。因等截面柱的 $\frac{1}{EJ}$ 为一恒值，可移到积分符号外面；而所余积分项 $\int \bar{M}_i M_k dx$ 等于由所求位移的 i 点至柱脚区段内的弯矩图形面积 ω_{iA} 与该面积重心点至 i 点的距离 x_i 相乘之积。这样，式 (1) 可写成：

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_i M_k dx = \frac{1}{EJ} \omega_{iA} x_i \quad (2)$$

例如图 5 的 aA 等截面柱，于柱顶 a 点作用一水平力 P 时有：

$$a \text{ 点的水平位移为 (图 5a)} \quad \Delta_{aa} = \frac{1}{EJ} \omega_{aA} x_a;$$

$$m \text{ 点的水平位移为 (图 5b)} \quad \Delta_{ma} = \frac{1}{EJ} \omega_{mA} x_m.$$

上面水平位移 Δ_{aa} 及 Δ_{ma} 中第一脚标表示所求位移的点，第二个脚标表示外力所作用的点（有时也可表示引起位移的荷载的代号，例如受均布荷载 q 时可写为 Δ_{aq} 及 Δ_{mq} ）。其余 ω 及 x 所代表的意义已见上述及图 5 所示。

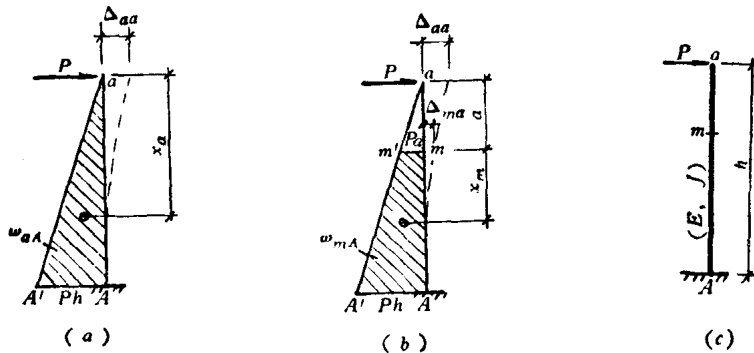


图 5

2. 二阶变截面柱

对于变截面柱因惯性矩 J 并非恒值，所以用弯矩面积法求位移时是比较麻烦的。但对于阶形变截面柱中，因 J 在一定柱段范围内是不变的，所以将位移公式 (1) 适当的改变其

表达形式后, 还可以简便地应用弯矩面积法求位移。

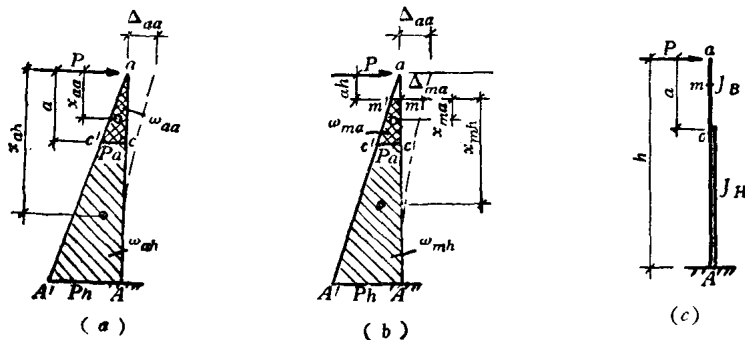


图 6

如图 6 的二阶变截面柱, 上柱段惯性矩为 J_B , 下柱段惯性矩为 J_H ; 其水平位移公式为:

$$\Delta_{ik} = \int_0^h \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ_H} \cdot \int_0^h \bar{M}_i M_k \frac{J_H}{J} dx = \frac{1}{EJ_H} \left[\int_0^a \bar{M}_i M_k \frac{J_H}{J_B} dx + \int_a^h \bar{M}_i M_k dx \right]$$

因 $\frac{J_H}{J_B}$ 比值在二阶变截面柱是一恒值, 故可移到积分符号外面, 则:

$$\begin{aligned} \Delta_{ik} &= \frac{1}{EJ_H} \left[\frac{J_H}{J_B} \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \int_a^h \bar{M}_i M_k dx + \int_0^a \bar{M}_i M_k dx - \int_0^a \bar{M}_i M_k dx \right] \\ &= \frac{1}{EJ_H} \left[\left(\frac{J_H}{J_B} - 1 \right) \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \int_a^h \bar{M}_i M_k dx \right] \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad \mu = \frac{J_H}{J_B} - 1 \quad (3)$$

则有水平位移公式为

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EJ_H} \left[\mu \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \int_a^h \bar{M}_i M_k dx \right] \quad (4)$$

按弯矩面积法涵义: $\int_0^a \bar{M}_i M_k dx$ 等于上段柱高度范围内由所求位移点 i 至变阶处之间的弯矩图形面积 ω_{ia} 与该面积重心点至 i 点的距离 x_{ia} 相乘之积;

$\int_a^h \bar{M}_i M_k dx$ 等于柱全高范围内由所求位移点 i 至柱脚之间的弯矩图形面积 ω_{ih} 与该面积重心点至 i 点的距离 x_{ih} 相乘之积。

这样, (4) 式就可写成:

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EJ_H} [\mu \cdot \omega_{ia} x_{ia} + \omega_{ih} x_{ih}] \quad (5)$$

例如如图 6 的二阶变截面柱 aA , 于柱顶 a 点作用一水平力 P 时有:

$$a \text{ 点水平位移为 (图6a)} \quad \Delta_{aa} = \frac{1}{EJ_H} [\mu \cdot \omega_{aa} x_{aa} + \omega_{ah} x_{ah}];$$

$$m \text{ 点水平位移为 (图6b)} \quad \Delta_{ma} = \frac{1}{EJ_H} [\mu \cdot \omega_{ma} x_{ma} + \omega_{mh} x_{mh}].$$

式中 ω_{aa} 是图6a中 acc' 三角形面积, 而 ω_{ah} 则为 aAA' 三角形面积; ω_{ma} 是图6b中 $mm'c'c$ 梯形面积, 而 ω_{mh} 则为 $mm'A'A$ 梯形面积。如按图6a将具体数值代入有:

$$\omega_{aa} = \frac{1}{2}Pa^2, \quad x_{aa} = \frac{2}{3}a, \quad \omega_{aa}x_{aa} = \frac{1}{3}Pa^3$$

$$\omega_{ah} = \frac{1}{2}Ph^2, \quad x_{ah} = \frac{2}{3}h, \quad \omega_{ah}x_{ah} = \frac{1}{3}Ph^3$$

則
$$\Delta_{aa} = \frac{1}{EJ_H} \left[\frac{1}{3}\mu Pa^3 + \frac{1}{3}Ph^3 \right] = \frac{Ph^3}{3EJ_H} \left[1 + \mu \left(\frac{a}{h} \right)^3 \right]$$

令 $\lambda = \frac{a}{h}$ 及 $k_3 = \frac{1}{3}(1 + \mu\lambda^3)$, 則得
$$\Delta_{aa} = \frac{Ph^3}{EJ_H} k_3$$

这就是表19中当 P 作用于柱頂时的柱頂水平位移 Δ_{aa} 的计算公式。

同理, 在图6b以 $a = \lambda h$ 代入有:

$$\omega_{ma} = \frac{\alpha Ph + \lambda Ph}{2}(\lambda h - \alpha h) = \frac{Ph^2}{2}(\lambda + \alpha)(\lambda - \alpha)$$

$$x_{ma} = \frac{(\lambda - \alpha)h}{3} \frac{2\lambda Ph + \alpha Ph}{\lambda Ph + \alpha Ph} = \frac{h}{3} \frac{(\lambda - \alpha)(2\lambda + \alpha)}{\lambda + \alpha}$$

$$\omega_{ma}x_{ma} = \frac{Ph^3}{6}(\lambda - \alpha)^2(2\lambda + \alpha)$$

及
$$\omega_{mh} = \frac{Ph^2}{2}(1 + \alpha)(1 - \alpha), \quad x_{mh} = \frac{h}{3} \frac{(1 - \alpha)(2 + \alpha)}{1 + \alpha}$$

$$\omega_{mh}x_{mh} = \frac{Ph^3}{6}(1 - \alpha)^2(2 + \alpha)$$

則
$$\begin{aligned} \Delta_{ma} &= \frac{1}{EJ_H} \left[\mu \frac{Ph^3}{6}(\lambda - \alpha)^2(2\lambda + \alpha) + \frac{Ph^3}{6}(1 - \alpha)^2(2 + \alpha) \right] \\ &= \frac{Ph^3}{6EJ_H} [\mu \cdot (\lambda - \alpha)^2(2\lambda + \alpha) + (1 - \alpha)^2 \cdot (2 + \alpha)] \end{aligned}$$

因
$$\frac{1}{6} \cdot [\mu \cdot (\lambda - \alpha)^2 \cdot (2\lambda + \alpha) + (1 - \alpha)^2(2 + \alpha)] = \frac{1 + \mu \cdot \lambda^3}{3} - \alpha \frac{1 + \mu \lambda^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}(\mu + 1)$$

令
$$k_3 = \frac{1}{3}(1 + \mu \cdot \lambda^3), \quad k_2 = \frac{1}{2}(1 + \mu \cdot \lambda^2) \text{ 及 } \mu + 1 = \frac{J_H}{J_B} = \frac{1}{n}$$

則得
$$\Delta_{ma} = \frac{Ph^3}{EJ_H} \left[k_3 - \alpha k_2 + \frac{1}{n} \frac{\alpha^3}{6} \right]$$

这就是表19中当 P 作用于柱頂时, 在上柱段中 m 点的水平位移 Δ_{ma} 的计算公式。

根据公式(5)推导出二阶变截面柱在各种荷载作用下柱上各点的水平位移的计算公式见表19。

对于等截面柱的水平位移计算公式, 也可按表19采用; 因为这时候 $\frac{J_H}{J_B} = 1$ 是二阶变截面柱的特殊情况。

3. 三阶变截面柱

与上述二阶变截面柱情况同理, 对于图 7 的三阶变截面柱, 其上柱段惯性矩为 J_1 , 中柱段惯性矩为 J_2 及下柱段惯性矩为 J_3 , 则位移公式 (1) 可改写如下:

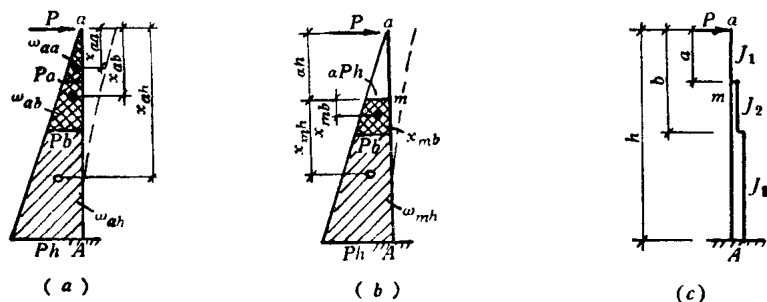


图 7

$$\Delta_{ik} = \int_0^h \frac{\bar{M}_i M_k}{EJ} dx = \frac{1}{EJ_3} \int_0^h \bar{M}_i M_k \frac{J_3}{J} dx = \frac{1}{EJ_3} \left[\int_0^a \bar{M}_i M_k \frac{J_3}{J_1} dx + \int_a^b \bar{M}_i M_k \frac{J_3}{J_2} dx + \int_b^h \bar{M}_i M_k dx \right]$$

因 $\frac{J_3}{J_1}$ 及 $\frac{J_3}{J_2}$ 比值在三阶变截面柱是恒值, 故可移到积分符号外面, 则:

$$\begin{aligned} \Delta_{ik} &= \frac{1}{EJ_3} \left[\frac{J_3}{J_1} \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \frac{J_3}{J_2} \int_a^b \bar{M}_i M_k dx + \int_b^h \bar{M}_i M_k dx + \frac{J_3}{J_2} \int_0^a \bar{M}_i M_k dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{J_3}{J_2} \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \int_a^b \bar{M}_i M_k dx - \int_0^b \bar{M}_i M_k dx \right] \\ \Delta_{ik} &= \frac{1}{EJ_3} \left[\left(\frac{J_3}{J_1} - \frac{J_3}{J_2} \right) \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \left(\frac{J_3}{J_2} - 1 \right) \int_a^b \bar{M}_i M_k dx + \int_b^h \bar{M}_i M_k dx \right] \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad \mu_1 = \frac{J_3}{J_1} - \frac{J_3}{J_2} \quad \text{及} \quad \mu_2 = \frac{J_3}{J_2} - 1 \quad (6)$$

则有三阶变截面柱的水平位移公式为

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EJ_3} \left[\mu_1 \int_0^a \bar{M}_i M_k dx + \mu_2 \int_a^b \bar{M}_i M_k dx + \int_b^h \bar{M}_i M_k dx \right] \quad (7)$$

按弯矩面积法涵义: $\int_0^a \bar{M}_i M_k dx$ 等于上段柱高度范围内由所求位移点 i 至上层变阶处之间的弯矩图形面积 ω_{ia} 与该面积重心点至 i 点的距离 x_{ia} 相乘之积; $\int_a^b \bar{M}_i M_k dx$ 等于下层变阶处以上高度范围内由所求位移点 i 至下层变阶处之间的弯矩图形面积 ω_{ib} 与该面积重心点至 i 点的距离 x_{ib} 相乘之积; $\int_b^h \bar{M}_i M_k dx$ 等于柱全高范围内由所求位移点 i 至柱脚之间的

弯矩图形面积 ω_{ih} 与该面积重心点至 i 点的距离 x_{ih} 相乘之积。这样, (7)式可写成:

$$\Delta_{ik} = \frac{1}{EJ_3} [\mu_1 \omega_{ia} x_{ia} + \mu_2 \omega_{ib} x_{ib} + \omega_{ih} x_{ih}] \quad (8)$$

例如图7的三阶变截面柱 aA , 于柱顶 a 点作用一水平力 P 时有:

$$a \text{ 点水平位移为 (图7a)} \quad \Delta_{aa} = \frac{1}{EJ_3} [\mu_1 \omega_{aa} x_{aa} + \mu_2 \omega_{ab} x_{ab} + \omega_{ah} x_{ah}];$$

$$m \text{ 点水平位移为 (图7b)} \quad \Delta_{ma} = \frac{1}{EJ_3} [\mu_2 \omega_{mb} x_{mb} + \omega_{mh} x_{mh}].$$

如按图7a将具体数值代入有:

$$\omega_{aa} = \frac{1}{2} P a^2, \quad x_{aa} = \frac{2}{3} a, \quad \omega_{aa} x_{aa} = \frac{1}{3} P a^3$$

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2} P b^2, \quad x_{ab} = \frac{2}{3} b, \quad \omega_{ab} x_{ab} = \frac{1}{3} P b^3$$

$$\omega_{ah} = \frac{1}{2} P h^2, \quad x_{ah} = \frac{2}{3} h, \quad \omega_{ah} x_{ah} = \frac{1}{3} P h^3$$

$$\Delta_{aa} = \frac{Ph^3}{3EJ_3} \left[1 + \mu_1 \left(\frac{a}{h} \right)^3 + \mu_2 \left(\frac{b}{h} \right)^3 \right]$$

$$\text{令} \quad \lambda = \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{b}{h} \text{ 及 } \bar{k}_3 = \frac{1}{3} (1 + \mu_1 \lambda^3 + \mu_2 \beta^3)$$

$$\text{则得} \quad \Delta_{aa} = \frac{Ph^3}{EJ_3} \bar{k}_3$$

这就是表20中当 P 作用于柱顶时的水平位移 Δ_{aa} 的计算公式。

同理, 在图7b以 $b = \beta h$ 代入有:

$$\omega_{mb} = \frac{Ph^2}{2} (\beta + \alpha)(\beta - \alpha), \quad x_{mb} = \frac{h}{3} \frac{(\beta - \alpha)(2\beta + \alpha)}{\beta + \alpha}$$

$$\omega_{mb} x_{mb} = \frac{Ph^3}{6} (\beta - \alpha)^2 (2\beta + \alpha);$$

$$\text{及} \quad \omega_{mh} = \frac{Ph^2}{2} (1 + \alpha)(1 - \alpha), \quad x_{mh} = \frac{h}{3} \frac{(1 - \alpha)(2 + \alpha)}{1 + \alpha}$$

$$\omega_{mh} x_{mh} = \frac{Ph^3}{6} (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha);$$

$$\text{则} \quad \Delta_{ma} = \frac{Ph^3}{6EJ_3} [\mu_2 (\beta - \alpha)^2 (2\beta + \alpha) + (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)]$$

$$\text{因} \quad \frac{1}{6} [\mu_2 (\beta - \alpha)^2 (2\beta + \alpha) + (1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)] = \frac{1 + \mu_2 \beta^3}{3} - \alpha \frac{1 + \mu_2 \beta^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6} (\mu_2 + 1)$$

$$\text{令} \quad k_3 = \frac{1}{3} (1 + \mu_2 \beta^3), \quad k_2 = \frac{1}{2} (1 + \mu_2 \beta^2) \text{ 及 } \mu_2 + 1 = \frac{J_3}{J_2} = \frac{1}{n_2}$$

則得

$$\Delta_{ma} = \frac{Ph^3}{EJ_3} \left[k_3 - \alpha k_2 + \frac{1}{n_2} \frac{\alpha^3}{6} \right]$$

这就是表20中当 P 作用于柱頂时，在中柱段中 m 点的水平位移 Δ_{ma} 的计算公式。

根据公式(8)推导出三阶变截面柱在各种荷载作用下柱上各点的水平位移的计算公式，见表20。

4. 不动铰支柱的柱顶反力

当柱頂为不动铰支点时，这属于一次超静定结构体系(图8)。其解可按力法以柱頂反力 R_B 为未知赘余力，按变形平衡条件方程式应有：

$$-\delta_{BB} \cdot R_B + \Delta_{BP} = 0$$

故得

$$R_B = \frac{\Delta_{BP}}{\delta_{BB}} \quad (9)$$

式中 δ_{BB} ——在柱頂为自由端的基本体系中，当单位力 $P=1$ 作用在柱頂时所生的柱頂水平位移；
 Δ_{BP} ——在柱頂为自由端的基本体系中，由外荷载作用所引起的柱頂水平位移。

利用已导出的位移计算公式表19及20就很容易得出柱頂反力 R_B 的计算公式了。

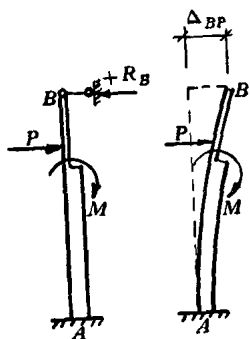


图 8

按表19，当 $P=1$ 作用在柱頂时有：

等截面柱的柱頂位移为

$$\delta_{BB} = \frac{h^3}{3EJ}$$

及二阶变截面柱的柱頂位移为

$$\delta_{BB} = \frac{h^3}{EJ_H} k_3$$

而按表20当 $P=1$ 作用在柱頂时有三阶变截面柱的柱頂位移为

$$\delta_{BB} = \frac{h^3}{EJ_3} \bar{k}_3$$

这样，由表19或20查出在不同荷载作用下柱頂位移的计算公式后，以上列相应的 δ_{BB} 式除之，便可得到不动铰支柱的柱頂反力 R_B 。所导出的反力计算公式见表21及表22。

(二) 排架计算公式的推导

已如前述，单层厂房铰接排架属于超静定结构体系。其计算草图以横梁所传递的水平力为未知赘余力 X ，是按“横梁两端水平位移相等”的原则为条件求解的(参看图4) [43], [13], [5]。当赘余力 X 求出后，则各柱在各已知力作用下可按静定的独立柱计算柱中各截面的内力 M 、 N 及 Q 。故排架计算的关键首先在于求出未知赘余力 X 。

计算时先将横梁切断，使各柱各自成为独立的静定基本体系。这时，设赘余力 X 以指向切口者(即横梁受拉)为正；如以后求出 X 为负值，即表示 X 的实际作用方向与所假设指向相反(亦即横梁受压)。对于每一静定的独立柱，例如图9aA柱，先设 $X=0$ 时由作用于柱上的外荷载引起柱頂(如a点)水平位移为 Δ_{ap} ；再设当移去外荷载后仅由 $X=1$