

结构与地基国际学术研讨会 论文集

PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL
SYMPOSIUM ON STRUCTURES AND
FOUNDATIONS IN CIVIL ENGINEERING

1994. 10 中国杭州

主 编 董石麟 益德清 顾尧章 沈 炯



浙江人民出版社

结构与地基国际学术研讨会论文集

PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON
STRUCTURES AND FOUNDATIONS IN CIVIL ENGINEERING

1994 · 杭州

主 编 董石麟 益德清 顾尧章 沈 钢



浙江大学出版社

(浙)新登字 10 号

结构与地基国际学术研讨会论文集

PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON
STRUCTURES AND FOUNDATIONS IN CIVIL ENGINEERING

1994·杭州

主 编 董石麟 益德清 顾尧章 沈 钢

责任编辑 李玲如

* * *

浙江大学出版社出版发行

浙江煤田地质局制图印刷厂印刷

* * *

787×1092 16 开 44.75 印张 1150 千字

1994 年 7 月第 1 版 1994 年 7 月第 1 次印刷

印数:0001—1000

ISBN 7-308-01560-2/TU·026 定价:60.00 元

主办单位

浙江大学
同济大学
浙江省土木建筑学会
杭州市科学技术协会

协办单位

浙江省建筑设计研究院
浙江省建筑科学设计研究院
浙江省工业设计研究院
浙江工业大学
杭州结构与地基处理研究会
杭州市土木建筑学会
杭州市建筑设计院
杭州市城建设计院
杭州地下空间结构研究中心

赞助单位

上海岩土工程勘测设计院
浙江省建筑设计研究院
华东勘测设计研究院
浙江省工业设计研究院
杭州市建筑设计院
杭州市城建设计院
杭州市大跨度预应力建筑研究所
浙江大陆建筑特种工程公司
杭州东南网架厂
绍兴市建筑设计院
广西柳州建筑机械总厂
肖山市商业房地产综合开发公司
杭州大地网架制造有限公司

KAG32/09

顾问委员会 (按姓氏笔划为序)

- | | |
|-----|----------------------|
| 卢肇钧 | 中国科学院院士 铁道部铁道科学研究院教授 |
| 许溶烈 | 中国土木工程学会理事长 |
| | 建设部总工程师 教授 |
| 何广乾 | 中国建筑科学研究院教授 |
| 吴世明 | 浙江大学副校长 教授 |
| 杨永斌 | 台湾大学教授 |
| 张佑启 | 香港大学副校长 教授 |
| 张维岳 | 中国建筑科学研究院教授 |
| 汪闻韶 | 中国科学院院士 水利部水利科学研究院教授 |
| 沈祖炎 | 同济大学副校长 教授 |
| 沈智刚 | 香港科技大学教授 |
| 金问鲁 | 杭州结构与地基处理研究会理事长 教授 |
| 侯学渊 | 同济大学教授 |
| 夏亨熹 | 河北农业大学校长 教授 |
| 莫若楫 | 台湾亚新工程顾问股份有限公司总经理 教授 |
| 益德清 | 浙江省建筑设计研究院总工程师 教授 |
| 高赞明 | 香港理工学院博士 |
| 黄文熙 | 中国科学院院士 清华大学教授 |
| 董石麟 | 浙江大学教授 |
| 曾国熙 | 浙江大学教授 |
| 魏 珽 | 中国建筑科学研究院教授 |

组织委员会

主任: 董石麟 浙江大学
副主任: 沈祖炎 同济大学
 益德清 浙江省建筑设计研究院
 顾尧章 浙江大学
 沈 钢 杭州市科学技术协会

委 员:(按姓氏笔划为序)

王文棠 浙江省土木建筑学会
安浩峰 浙江省工业设计研究院
李育湘 杭州地下空间结构研究中心
严 慧 浙江大学
沈 钢 杭州市科学技术协会
沈祖炎 同济大学
应 浩 杭州市土木建筑学会
陈忠麟 杭州市建筑设计院
居荣初 浙江工业大学
周海龙 杭州市城建设计院
姚雅琴 杭州市科学技术协会
顾尧章 浙江大学
钱国桢 杭州结构与地基处理研究会
侯学渊 同济大学
益德清 浙江省建筑设计研究院
董石麟 浙江大学
曾宪纯 浙江省建筑科学设计研究院
蒋成化 浙江大学
薛荣元 浙江省建筑设计研究院
秘书长: 董石麟 浙江大学
副秘书长: 顾尧章 浙江大学
 姚雅琴 杭州市科学技术协会

目 录

特邀报告

- 基于线性偏微分方程完备通解的半数值分析方法..... 何广乾(3)
- 竖井排水固结理论研究的若干进展
..... 曾国熙、谢康和、朱向荣、刘世明(11)
- 奇异摄动理论在薄壳边界层理论的应用 金问鲁(26)
- 软弱土层对挤压灌浆之反应 莫若樛、杨国荣、黄南辉(30)
- 钢框架受风与地震作用的统一非线性矩阵分析理论
..... 沈祖炎、李国强(57)
- 界面面粘土模型及其验证 沈智刚、李相崧(72)
- 我国网壳结构发展中的新形式、新技术、新结构 董石麟(84)
- A Simplified Procedure for Analysis of Soil-structure Interaction
Systems Yeong-bin Yang Shyh-rong Kuo(94)
- 大底盘上多塔高层建筑结构分析 魏琰、龚兆吉、朱锦心、林云、姜宇(100)
- 基坑工程分析与设计 侯学渊、刘前曦(106)

结构工程:(一)结构理论与设计计算

- 大型建筑结构工程分析的超级单元法 曹志远(113)
- 结构积累损伤的损伤度和传递矩阵..... 余安东、陈兰祥、卞学兵(118)
- A Semi-discrete Simplified Method for Free Vibration Analysis of
Thin-walled Members with Stepped Cross Sections
..... W. Y. Li and K. G. Xin(124)
- 信息理论、相对理论和结构可靠度 金伟良、韩杰、姚谏(132)
- 浅述结构抗震概念设计问题..... 钱国桢(139)
- 棱柱、薄壁杆统一理论的变分原理 余扶健(145)
- 关于工程结构的模糊设计 王柏生(155)
- 楼上机器设备隔振的最优结构参数 陈龙珠、陈新良(161)

Second Order Analysis of Roof Truss and Frame

- P. P. T. Chui Z. H. Zhou and S. L. Chan and Austin D. Pan (167)
- 钢柱空间恢复力模型 沈祖炎、黄靖宇、李国强、陈以一(177)
- 等效桁架法在结构墙分析中的应用 余安东、唐陆(182)
- 计算机在异型楼梯设计中的应用 肖春华、邵力新(188)
- Identification of Dynamic Properties of Large Structures by Ambient
Vibration Measurements Y. Q. Ni J. M. Ko and C. W. Wong(193)
- 框排架厂房空间结构地震反应分析..... 王立军(199)
- 上海大世界尖状塔楼的弹塑性地震反应分析
..... 顾祥林、张誉、王伟(207)
- 单层工业厂房防风柱的抗震计算 王平、彭其铮(213)

结构工程:(二)高层建筑与大跨度空间结构

高层建筑厚板结构转换层的有限元分析程序

- 李志飘、孙炳楠、唐锦春、严家熹(221)
- BSSA 高层建筑三维空间结构设计程序力学单元及模型试验
..... 曾宪纯、郑良知(227)
- 菱形配筋剪力墙连梁的受力性能 戴瑞同、孙占国(232)
- 带斜杆的框架结构在高层建筑中的应用 范明均、钱国桢、倪一清(238)
- 建筑结构三维抗震设计——介绍 BSSA 程序动力分析方法
..... 郑良知(243)
- 用改进力矩分配法估算高层建筑侧移 刘岳东(255)
- 高层建筑空腹桁架转换层优化设计
——温医病房综合楼结构转换层设计分析 裘涛、陈学琪、沈金(264)
- BSSD 建筑结构空间设计系统开发与应用 丁龙章、郑良知(267)
- 海南建行大厦结构设计简介..... 梁安丽、吴宝笑、章华(274)
- 结合青岛黄金广场工程实例计算——介绍 BSSA 程序单元
力学模型 郑良知、曾宪纯(278)
- 《理性设计学》在空间结构设计中的应用
..... 徐国彬、艾合买提、高日、殷少敏(285)
- 我国悬索结构发展的特点与展望 严慧(293)
- 单层网壳结构的稳定性研究 罗永峰、沈祖炎(299)

组合双曲扁网壳结构的静力性能和动力

- 特性的研究 高博青、董石麟(308)
- 初始缺损分析方法研究 夏绍华、钱若军(314)
- 大型三心圆柱面网壳体形优化 罗尧治、葛玮(320)
- 中小型正放四角锥平板网架优化设计初探——网架高度的
优化设计 陈学琪、裘涛、马跃(326)
- 预应力“双拱架”结构体系 俞仁杰(332)
- 系列万向球型钢支座研制 崔玲、徐国彬、高日、曾志斌、殷少敏(341)

结构工程:(三)混凝土结构及预应力混凝土结构

- 钢筋混凝土大梁高强钢绞线预应力加固法 项剑锋(351)
- 小型空心砌块受压砌体可靠度分析 严家熿(358)
- 小砌块结构的控制分析 王修本(366)
- Lateral Deflections of Reinforced Concrete Frames
..... Wong Yuk Lung Miao Qi Song(371)
- 粉煤灰加气混凝土砌体构件轴心受压稳定系数 ψ_0 的研究
..... 姚谏、夏志斌、严家熿、陆涵(381)
- 高温作用后混凝土本构关系试验研究
..... 陆杰峰、钱在兹(390)
- 部分预应力梁开裂以后的截面平均应变和刚度的直接计算法——
双折线法 项剑锋(394)
- 粉煤灰加气混凝土砌块砌体抗压强度试验研究 严家熿(404)

地基与基础(一)理论分析与试验研究

- 频域上地基扭转响应的传递边界及无限元分析
..... 夏唐代、吴世明(413)
- 软土路基变形性状的离心模型试验
..... 谢永利、饶锡保、潘秋元、曾国熙(419)
- 大位移热粘弹性理论的变分原理 潘鼎元、钱国桢(425)
- 循环荷载下层状饱和土体一维固结分析 杨峻、吴世明(431)
- 轴对称循环荷载下饱和粘土粘弹性 Biot 固结 杨峻、吴世明(437)

地下水位上升与液化震陷	周健、屠洪权(443)
粘弹性基支粘弹性圆(环)形薄板的准静态弯曲	居荣初、郑建军(449)
无拉力 Winkler 地基上圆板的轴对称静力分析	郑建军、迟长生、樊承谋(459)
刚性半圆形埋置基础与土体部分脱离时的动力分析	汪越胜、于桂兰(465)
等应变条件下考虑桩体有限渗透性时砂层内孔压解析解及分析	蔡袁强、吴世明、徐长节(471)

地基与基础:(二)设计与施工

反力墙和强力地板之结构分析与设计	李一圣、叶孝民(479)
高压喷射灌浆在岩土工程之应用	黄立煌、J. N. Shirlaw、高祥生(486)
宋代古塔倾斜扶正及塔基加固	顾尧章、蔡泽芳(497)
框架、条形基础、桩和土的共同作用分析	徐珍凤、益德清(504)
强震下软土地基桩-土-结构共同作用	罗晓、吴世明(510)
建物保护施工案例之介绍	朱专志、富谦(515)
桩基优化设计的简易方法	林柏、朱向荣、楼文娟(521)
摩擦群桩上板式桩筏基础的简化分析	严平、龚晓南、李建新(526)
The Settlement of Spread Footing on Cohesionless Soils	Ming-Lou Liu Jin-Ching Chern(532)
框架—筏基—地基相互作用的机理分析——均匀与非均匀地基	干钢(539)
大口径长基桩之设计及施工	江政恩、张吉佐、司徒锐文、陈逸骏(544)
未压密粘土中打击式摩擦桩之行为	黄俊鸿、李淳昌、方仲欣、张吉佐(550)
水平荷载下群桩动刚度的简化算法	杨学林、吴世明(556)
大直径钻孔灌注桩竖向承载力的探讨	施祖元(562)
多分支承力盘桩及其应用	张俊生、张国梁、何其清、宋秀林(567)
弹性地基上中厚板内力分析及计算程序	张力、顾晓鲁、王进忠(575)
一种高层建筑地基基础整体变形和基础内力计算方法	张乃瑞、张凤林、于玮(581)
厦门闽南贸易大厦 2 号工程桩基选型设计	庞孝慈(588)

振冲法加固饱和黄土类轻亚粘土的特点及效果	齐俊修(592)
静压端承摩擦空心预制桩的设计分析	袁涛、沈金、陈学琪(598)
两次强夯处理抛石填海地基建造大型油罐	陈树棕、蒋津、舒正威(601)
垫层复合桩基研究与应用	赵宇宏、周彤、莫锦云、朱志鹏(607)
一个水平及摇摆振动下群桩动刚度(刚度参数和阻尼参数)计算 程序	李刚、高燕希(614)
土工织物加筋堤坝的稳定分析	施淑群、潘秋元、李明远(620)
软土地基灌注桩与承台共同承担上部荷载的探讨和实例	熊荣科(626)
福州软土地区大直径超长灌注桩的实践	施峰、柳春(632)
计算机辅助岩土工程勘察	陈国平(638)

水利、交通、特种结构

多功能智能设计系统	孙杨镛(649)
非均质土坝一维随机地震反应分析方法	陈国兴、谢君斐、张克绪(655)
岩石边坡倾倒稳定分析	汪小刚、张建红、陈祖煜(661)
无损动态检测问基隐患	陈鹏(667)
The Design of the Bridge near 18-Ancient-Tomb at Tai-2 Route	Ching Chyuan Tzeng I-Lan Ou(675)
台北市东西向快速道路高架桥暨地下建筑共构工程之规划设计	林树柱、曾清铨、张获薇(681)
Simulation of the Piston Effect of a Train Traveling Through a Rail Tunnel	Keh-jian Shou(687)
大跨度拱形管道的结构分析	屠洪权、周健(693)
多台大型发电用锅炉共用一座钢排烟筒的探讨	骆锡耀(699)

特 邀 报 告

基于线性偏微分方程完备通解的 半数值分析方法

何广乾

(中国建筑科学研究院)

提 要: 本文探讨了基于线性偏微方程的完备通解进行数值分析, 给出了平板弯曲及薄壳结构的实用分析方法。

关键词: 线性偏微分方程完备通解 半解析 半数值法 平板弯曲 薄壳结构

一、前 言

众所周知, 有限元方法是近年来随着电子计算机的发展而兴起的一种有效的数值分析方法并在结构力学、弹塑性固体力学、流体力学、热传导学及电磁力学分析等领域中获得了广泛的应用。基于变分原理, 它将连续介质进行剖分, 离散成为有限多个小单元并在每个单元内赋予一个插值函数以描叙其变形或内力。如果插值函数能满足应有的边界约束条件, 即可把它们连续复原, 进行数值分析。它的突出优点是原则上对各类工程问题都可求解, 具有广泛的适宜性。它在杆系结构和平板的平面应力问题上的应用, 优点十分突出, 但是当用于平板的弯曲问题以及大跨空间结构如薄壳等, 往往要求构造 C^n ($n \geq 1$) 的连续单元才能保证其分析精度和避免剪力闭锁和薄膜闭锁等问题, 给实际应用带来了一些繁琐与困难。

边界元法在一定程度上克服了上述的缺点并可以降低求解的维数, 仅须在边界上进行积分, 或采用离散的方法来满足其边界条件。该方法适用于边界为任意形状连续介质问题并特别适用于无限域问题的求解。但是边界元法要涉及问题的基本解, 这是往往不易简单地求得。在边界积分时也会遇到一些奇异积分, 需要一定的数学处理才能绕过这类困难。边界元法属于一种半解析的数值分析方法, 在其适用的范围内, 其优点也是颇为突出的。

但是对于一些由线性偏微分方程所控制的结构, 可以基于该偏微分方程的完备通解来进行分析。它是一种半解析、半数值的方法, 可以用来较简便地分析平板的弯曲问题与薄壳结构的内力与变形, 分析精度完全能满足工程设计与施工的要求。偏微分方程的完备通

解渊源于广义函数理论的应用⁽¹⁾，但本文将给出较简便的推导方法，系统而简单，便于实用。一旦求得问题的完备通解值便可加入问题的特解将整个域内视作一个大单元，仅须在边界上采用积分或离散的方法来满足问题的边界条件，从而获得整个问题的全解，因此它是属于 Trefftz 型的一种求解方法。

二、平板问题的完备通解

无论是平板的平面应力问题或是平板的弯曲问题都归结为求重调和方程的完备通解，例如平板的弯曲问题的控制微分方程为：

$$\Delta^2 \omega = \frac{q(x, y)}{D} \quad (2.1)$$

式中 $\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2$ ， ω 为板的挠度， $q(x, y)$ 为板上的荷载分布函数， D 为平板弯曲刚度。

它的完备通解表现在求方程

$$\Delta^2 \omega = 0 \quad (2.2)$$

的完备解，式 (2.2) 是一个重调和方程，为了简明起见，我们先试求调和方程

$$\Delta u = 0 \quad (2.3)$$

的完备通解，令

$$\rho = \xi x + \eta y \quad (2.4)$$

代入 (2.3) 式，得
$$(\xi^2 + \eta^2) \frac{d^2 u}{d\rho^2} = 0 \quad (2.5)$$

根据广义函数原理，在 ξ, η 复平面内所有 (ξ, η) 点上，凡能使 $(\xi^2 + \eta^2) = 0$ 者， $\frac{d^2 u}{d\rho^2}$ 可以不等于 0，这也就是说

$$\text{supp}(\xi^2 + \eta^2) \cap \text{supp} \frac{d^2 u}{d\rho^2} = 0 \quad (2.6)$$

当 $(\xi^2 + \eta^2) = 0$ ，即 $(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = 0$ (式中 $i = \sqrt{-1}$)，则可以存在

$$\xi = \pm i\eta \quad (2.7)$$

在它所代表的曲线上， $\frac{d^2 u}{d\rho^2} \neq 0$

令
$$u = e^{\lambda \rho} \cos \lambda \rho \quad (2.8)$$

及
$$\xi - i\eta = 0, \text{ 即 } \xi = i\eta, \text{ 从而 } \rho = \xi x + \eta y = i\eta(x - iy) \quad (2.9)$$

于是
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda i \eta e^{\lambda \rho} \cos \lambda \rho - \lambda i \eta e^{\lambda \rho} \sin \lambda \rho$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\lambda^2 \eta^2 e^{\lambda \rho} \sin \lambda \rho$$

同样 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\lambda^2 n^2 e^{\lambda \rho} \sin \lambda \rho$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$

如取 $u = e^{\lambda \rho} \sin \lambda \rho$ (2.10)

其结果完全相同, 即 $\Delta u = 0$.

如令 $\xi + i\eta = 0$, 则 $\xi = -i\eta$, 则 $\rho = \xi x + \eta y = -i\eta(x + iy)$ (2.14)

同样可得 $\Delta u = 0$

这就是说, 在 ξ, η 复平面中, 凡在 $\xi = \pm i\eta$ 线上所有的 η 值均能使 $\Delta u = 0$

于是 u 的完备通解应为

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\lambda(x-iy)} \cos i\eta\lambda(x-iy) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\lambda(x+iy)} \cos i\eta\lambda(x+iy) d\eta \quad (2.15)$$

$$\therefore u = A_1 f_1(x-iy) + A_2 f_2(x+iy) \quad (2.16)$$

这就是众所周知调和方程 $\Delta u = 0$ 的最一般的通解, 式中 f_1, f_2 分别为 $(x-iy)$ 及 $(x+iy)$ 的任意函数, A_1, A_2 为待定系数.

现在研究 $\Delta^2 \omega = 0$

令 $\rho = \xi x + \eta y$, 代入 $\Delta^2 \omega = 0$, 则得 $(\xi^2 + \eta^2)^2 \frac{d^4 \omega}{d\rho^4} = 0$ (2.17)

显然, $\text{supp}(\xi^2 + \eta^2)^2 \cap \text{supp} \frac{d^4 \omega}{d\rho^4} = 0$ (2.18)

但是 $(\xi^2 + \eta^2)^2 = (\xi + i\eta)^2 (\xi - i\eta)^2$ (2.19)

这里出现了重根, 于是, 不难验证, ω 应选择如下的形式

$$\omega = ye^{\lambda \rho} \cos \lambda \rho \text{ 及 } \omega = xe^{\lambda \rho} \cos \lambda \rho \quad (2.19)$$

不难验算, 此时 $\Delta \omega \neq 0$ 而 $\Delta^2 \omega = 0$ 从而说明 ω 的取值必须取 (2.19) 所示的值才能获得 $\Delta^2 \omega = 0$.

同前, 可得 ω 的完备通解为

$$\omega = A_1 f_1(x-iy) + A_2 f_2(x+iy) + A_3 (x+iy) f_3(x-iy) + A_4 (x-iy) f_4(x+iy) \quad (2.20)$$

式中 f_1, f_2, f_3, f_4 为 $(x+iy)$ 或 $(x-iy)$ 的任意函数, A_1, A_2, A_3, A_4 为待定系数. 式 (2.20) 即为众所周知的 $\Delta^2 \omega = 0$ 的完备通解.

三、薄壳结构的完备通解

薄壳结构有多种壳体外形而我们这里仅讨论四种常用的薄壳结构, 即圆球壳、椭圆抛物面扁壳、圆柱形壳及双曲抛物面扭壳, 它们的控制基本偏微分程可用下列通式进行表达:

$$D\Delta^4 \varphi + 2E\delta(k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2t \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2})^2 \varphi = q(x, y) \quad (3.1)$$

式中 $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$, δ 为壳体厚度, E 为壳体的弹性模量, k_1 、 k_2 、 t 分别为顺 x 方向及 y 方向的曲率而 t 为壳体的扭率, ν 为壳体材料的泊桑系数 (对混凝土材料, 可以略而不计)。

对于

$$\left. \begin{array}{ll} \text{圆 球 壳:} & k_1 = k_2 = k, t = 0 \\ \text{椭圆抛物面扁壳:} & k_1 \neq k_2 \neq 0, t = 0 \\ \text{双曲抛物面扭壳:} & k_1 = k_2 = 0, t \neq 0 \\ \text{圆 柱 壳:} & k_1 \neq 0, k_2 = 0, t = 0 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

为求其完备通解, 我们现在取椭圆抛物面扁壳为例, 其中 $k_1 \neq k_2 \neq 0$, $t = 0$, 关于其他几个类型的薄壳, 只要将相应的 k_1 、 k_2 、 t 值代入 (3.1) 式, 即可同样求得。

令 $\frac{2E\delta}{D}$ 为 μ^2 , 则椭圆抛物面扁壳的完备通解可从下式求出:

$$\Delta^4 \varphi_0 + \mu^2 (k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \varphi_0 = 0 \quad (3.3)$$

令

$$\rho = \xi x + \eta y \quad (3.4)$$

可得

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi \frac{d}{d\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \eta \frac{d}{d\rho} \quad (3.5)$$

于是 (3.3) 可写作

$$(\xi^2 + \eta^2) \frac{d^8 \varphi_0}{d\rho^8} + \mu^2 (k_2 \xi^2 + k_1 \eta^2) \frac{d^4 \varphi_0}{d\rho^4} \quad (3.6)$$

$$\text{如设 } \varphi_0 = e^{\pm \lambda \rho} \cos \lambda \rho, \text{ 则 } \frac{d^8 \varphi_0}{d\rho^8} = 16\lambda^8 e^{\pm \lambda \rho} \cos \lambda \rho, \quad \frac{d^4 \varphi_0}{d\rho^4} = -4\lambda^4 e^{\pm \lambda \rho} \cos \lambda \rho \quad (3.7)$$

$$\text{如设 } \varphi_0 = e^{\pm \lambda \rho} \sin \lambda \rho, \text{ 则 } \frac{d^8 \varphi_0}{d\rho^8} = 16\lambda^8 e^{\pm \lambda \rho} \sin \lambda \rho, \quad \frac{d^4 \varphi_0}{d\rho^4} = -4\lambda^4 e^{\pm \lambda \rho} \sin \lambda \rho \quad (3.8)$$

代入 (3.6) 式可得

$$16\lambda^8 (\xi^2 + \eta^2)^4 - 4\mu^2 \lambda^4 (k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2)^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$\therefore \lambda = \pm \sqrt{\pm \frac{\mu(k_2 \xi^2 + k_1 \eta^2)}{2(k_2 \xi^2 + k_1 \eta^2)^2}} = \pm \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \sqrt{\pm \frac{\mu}{2} (k_2 \xi^2 + k_1 \eta^2)} \quad (3.10)$$

令

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta \quad (3.11)$$

$$\therefore \rho = \xi x + \eta y = r(x \cos \theta + y \sin \theta) \quad (3.12)$$

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \quad (3.13)$$

$$\therefore \lambda = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{\pm \frac{\mu r^2}{2} (k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta)} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\pm \frac{\mu}{2} (k_2 \cos^2 \theta + k_1 \sin^2 \theta)} \quad (3.14)$$